Johannis Wallisii, S S. Th. D.

GEOMETRIÆ PROFESSORIS

SAVILIANI in Celeberrimâ

Academia OXONIENSI;

OPERUM

MATHEMATICORUM

Pars Prima.

Qua Continentur,

Oratio Inauguralis.

Matheſis Univerſalis; ſive, Arithmeticum opus Integrum, tum Numeroſam Arithmeticam tum Specioſam complectens.

Adverſus Meibomii, de Proportionibus Dialogum, Tractatus Elencticus.

OXONII,

Typis LEON. LICHFIELD Academiæ Typographi,

Impenſis THO. ROBINSON. *Anno* 1657.

UMI

UMI

AMPLISSIMÆ
INCLYTISSIMAEQVE,
TUM PIETATE ET VIRTUTIBUS
TUM ERUDITIONE OMNIGENA
CELEBERRIMÆ
MATRI;
ACADEMIÆ
OXONIENSI:
HÆC SUA
OPERA MATHEMATICA
IN OBSEQUII DEBITI TESTIMONIUM
D. D.
JOHANNES WALLIS
GEOMETRIÆ PROFESSOR
SAVILIANUS,

AMPLISSIMÆ

INCLYTISSIMAEQVE

TUM PIETATE ET VIRTUTIBUS

TUM ERUDITIONE OMNIGENA

CELEBERRIMÆ

MATRI:

ACADEMIÆ

OXONIENSI:

HÆC SUA

OPERA MATHEMATICA

IN OBSEQUII DEBITI TESTIMONIUM

D. D.

JOHANNES WALLIS

GEOMETRIÆ PROFESSOR

SAVILIANUS

PARTE PRIMA

CONTINENTUR.

I. Oratio Inauguralis.

II. Matheſis Univerſalis; ſive Arithmeticum Opus integrum, Arithmeticam tum Numeroſam, tum Specioſam, complectens; tum etiam Rationum & Progreſſionum traditionem; Logarithmorum item doctrinam; aliaque quæ Capitum ſyllabus exhibet.

CAP. I De *Matheſi in genere*; *ejuſque Objecto, & Diſtributione.*
II De *Arithmetica & Geometria ſpeciatim*
III De *Mathematicis Demonſtrationibus*
IV De *Unitatis, Numerique Definitionibus*; *Principio Numeri &c.*
V *Numerorum Procreatio, & Nomenclatura.*
VI *Latina numerorum Nomina, a Græcis derivata*
VII *Numerorum Notatio per Alphabeti literas omnes, Hebræis & Græcis communis*
VIII *Numerorum Notatio per ſelectas aliquot Alphabeti literas, communis Græcis & Latinis*
IX *Numerorum Notatio per Ziphras Saracenicas, ſive Indicas*
X *Figurarum Numeralium valores, tum in ſe, tum pro locorum gradibus ſive aſcendentium ſive deſcendentium ratione.*
XI De *Notatione Algebrica & ſpecioſa*
XII *Fractionum ſive Minutiarum Notatio*
XIII De *Additione Numeroſa*
XIV De *Subductione Numeroſa*
XV De *Additione & Subductione Algebrica & Specioſa*
XVI *Additionis & Subductionis Examina*
XVII *Additionis & Subductionis*, *in re Chronologica ſpecimen*
XVIII De *Multiplicatione numeroſa*
XIX De *Diviſione Numeroſa*
XX De *Multiplicatione & Diviſione Algebrica & Specioſa*
XXI *Multiplicationis & Diviſionis examina.*
XXII *Multiplicationis & Diviſionis ſpecimen, in Parallelogrammis Rectangulis menſurandis & invicem comparandis*
XXIII *Elementorum Euclidis liber ſecundus Arithmetice traditur & demonſtratur*
XXIV *Totius Planorum Geodæſiæ, traditio*
XXV *Numerorum, aliarumve Quantitatum Homogenearum, Comparatio*; *tum quoad Differentiam, tum quoad Rationem.*
XXVI De *Progreſſione Arithmetica*

XXVII Ejusdem fusior traditio
XXVIII Ejusdem brevis synopsis
XXIX Rationum Distributio, & Nomina
XXX De Rationum Compositione
XXXI De Progressione Geometrica
XXXII De Logarithmorum Origine & Usu
XXXIII Progressio Geometrica, fusius traditur
XXXIV Ejusdem brevior Synopsis.
XXXV Elementorum Euclidis liber Quintus, Arithmetice traditur & demonstratur
XXXVI Ejusdem synopsis
XXXVII De Proportionalium Regula, Aurea dicta
XXXVIII De Reciproca proportionalium Regula, sive Aurea Regula inversa
XXXIX De Aurea Regula composita
XL De Regula Societatis dicta
XLI De Fractionibus, sive minutiis
XLII De Fractionum Additione, & Subductione
XLIII De Fractionum Multiplicatione & Divisione
XLIV De Fractionum Reductionibus variis
XLV De Fractionum Rationumve Rationibus: Totinsque operis Epilogus.

III Adversus *Meibomii* de Proportionibus Dialogum, Tractatus Elencticus.

Cui præfigitur Epistola; qua de Paraboloide Cubicali, & Æquationibus Cubicis agitur.

PARTE SECUNDA

CONTINENTUR.

I De Angulo Contactus & Semicirculi, Disquisitio Geometrica.

II De Sectionibus Conicis Tractatus, Nova Methodo expositis.

III Arithmetica Infinitorum; sive de Curviliniorum Quadratura, aliisque difficilioribus matheseos Problematis, Nova Methodus Inquirendi.

IV Eclipseos Solaris Observatio.

Johannis Wallis,

GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI,

ORATIO INAVGVRALIS:

IN

Auditorio Geometrico, *Oxonii*, habita;
ultimo die Menſis Octobris, Anno
Æræ Chriſtianæ 1649. quum publicam
Geometriæ Profeſſionem auſpicatus eſt.

OXONII,
Typis *Leonardi Lichfield* Academiæ Typographi.
Impenſis *Tho. Robinſon.* 1657.

ORATIO INAUGURALIS,

a *Johanne Wallis*, Geometriæ Professore *Saviliano*, in Auditorio Geometrico, Oxoniæ, habita; ultimo die Mensis *Octobris*, Anno 1649; quum publicam Geometriæ Professionem auspicatus est.

Insignissime Domine, Vice-Cancellarie;

Reliquique Doctores, Professores, Ædiumque Præfecti Venerandi:

Egregii Procuratores; Cæterique, tum Regentes, tum Non-Regentes, Magistri:

Undque quotquot adestis Viri, Juveneſque Academici.

QUantumvis non sim ego prorsus nescius, quanto subsidat intervallo Geometra (dicam?) vester, an hodiernus Orator; tam infra sublimem tantæ Scientiæ dignitatem, quàm Majestatem hujusce Auditorum Coronæ celeberrimæ: Non tamen esse, spero, quicquam, cur reformidem penitus, favore ve-

ſtro fretus, & de nobiliſſima Scientia, & coram humaniſſimis Auditoribus, verba facere.

Suſcepti ratio. Audacior fortaſſe res videri poſſit, & modeſta parum, virum vix ſatis notum, vix dum alumnum, in Academia celeberrima ſtatim prodire Profeſſorem; eoſque tanquam de Cathedra compellare, quorum non paucis ſatius eſſet ſe auditorem ſiſtere.

Non deeſt tamen quod hic dicendum occurrat, non tam prætextûs, quam juſtæ defenſionis loco.

Partim enim invitat notiſſima veſtra Clementia, quâ in Advenas, etiam exteros, ſumma ſoletis humanitate propenſi eſſe; præſertim vero in ἀνεψιὸς veſtros, ex conjunctiſſima ſorore *Cantabrigia* nepotes; quos, non tam ut adoptivos, quam germanos filios, in proprio repoſitos ſinu, ſumma ſoletis indulgentia exoſculari.

D. H. Savilii Encomia. Partim etiam animum faciunt ipſa *Statuta* Domini *Henrici* SAVILII, Equitis Honoratiſſimi, candore morum, & multiplici Eruditione inſignis, deq; literis literatiſq; omnibus optime meriti; Quibus ipſe, pro ſumma qua erat munificentiâ, animoq; ad ſtudia, præſertim Mathematica, promovenda propenſiſſimo, duos *Mathematum Profeſſores* ſancivit, alendos curavit, iiſque leges poſuit; quos ἐντῶς de quacunque gente, de quacunque profeſſione, ſtatuit eligendos.

Invitat igitur Clementia veſtra; Suadent *Statuta Saviliana*; propriuſque animus ad hujusmodi ſtudia per ſe propenſus, eorumque ſive vota, ſive ſuffragia, qui id negotii mihi demandandum curarunt, Jubent, iſtis invitamentis obtemperare.

Cum vero gratiſſimum SAVILII nomen memorare contigerit; prolixa ſatis oratione poſſem in ipſius Encomia, ſi id neceſſe, perorare; ſi nempe, quæ, dum in vivis erat, edidit eruditionis ſpecimina,

quæ-

quæque, mortuo, superstunt monumenta, recesenrem singula. Norunt hæc *Ætonenses*, Norunt & *Mertonenses*, quorum utrorumque Collegiis summa cum laude simul præfuit; imo *Oxonia* tota, & universa quidem Respublica literaria, norunt melius, quam ut mihi sit opus sigillatim illa repetendo singula immorari: eumq; ne posteri penitus ignorare possint, hujusce saltem diei & loci celebritas, & exercitia Mathematica, in omnia (spero) secula, ipso jubente, continuanda, prohibebunt.

Taceo igitur, summam quam habuit Græcarum literarum peritiam, & cognitionem limatissimam; qua in re vix ulli, per universum terrarum orbem, secundus erat. Unde hic solus selectus fuit, qui Serenissimam Angliæ Reginam ELIZABETHAM in Græcis literis instituat; & deinde ab Augustissimo JACOBO Rege, dum novam Sacri Codicis versionem Anglicanam parabat, accitus est *Savilius*, qui, cum aliis aliquot magni nominis viris, & linguarum peritissimis, operam hac in re navaret. Quod & summa cum laude præstitit.

Sed & opera celeberrimi illius Græcorum Theologi, *Iohannis Chrysostomi* Antiocheni, summa industria, incredibili labore, & indefessis vigiliis, ex variis collatis exemplaribus Manuscriptis restituta, suis tandem sumptibus immensis, eleganti charactere, excusa edidit.

Egregium etiam illud *Bradwardini* opus (qui & ipse aliquando fuerat Collegii *Mertonensis* præfectus) quod, *De causa Dei*, inscribitur, adversus *Pelagium*, SAVILIUS noster ex Manuscriptis exemplaribus in publicam lucem protulit, & typis commisit.

Præter autem illa in Theologia (cui tamen ipse nomen non ex professo dederat) magni molimi.is

opera; se etiam aliàs præstitit eximium virum, Historicum, Criticum, Philosophum, Mathematicum. Veteres *Historiæ Anglicanæ* scriptores, ex situ & pulvere, quibus erant obsiti, in lucem edidit. *Cornelium Tacitum*, celebrem illum Romanorum Historicum, suis in eum annotationibus illustravit. Denique (ut alia præteream) in re *Mathematica*, non modo Munificentissimus erat Patronus, sed & egregius ipse Mathematicus. Quod non modo *Prælectiones* ejus in *Euclidem* editæ testantur, sed & varia etiam quæ supersunt specimina ipsius calamo exarata. Varios siquidem veteres Authores Græcos, propria ipsius manu transcriptos, ex partibus transmarinis huc adduxit, & in suorum Professorum usum reliquit. Suasque ipsius in *Apollonium Pergæum*, *Eutocium Ascalonitam*, *Claudium Ptolemæum*, aliosque ex veteribus, Annotationes habemus; ejusque in *Iosephi Scaligeri Cyclometrica* Animadversiones; aliaque non pauca schediasmata, acutissimi ingenii argumenta; quæ qui legerit, non poterit dubitare, illum & virum fuisse summe industrium, & summum Virum; atque in penitiora Matheseos penetralia, & reconditiores recessus penetrasse. Adeo ut mihi quidem res omnino miranda videatur & stupenda summe; virum in omni literaturæ genere exercitatum, adeo tamen in singulis eminuisse.

Verùm hæc ego omnia necesse habeo ut taceam; aliaq; insuper multa, quæ in ipsius laudes prolixe dici possunt: Ne vel gratissimam ipsius apud vos memoriam suspicari, vel abuti videar, nimia digressione, patientiæ vestræ; si nempe præsentis immemor instituti, Virum, utut dignissimum, potius ἐγκωμιάζειν, quam lectionibus Geometricis præfari vellem.

De

De rebus autem Mathematicis, & nominatim Geometria, cum verba sim facturus; hæret aliquandiu suspensus animus, nescius unde vel exordium sumam, vel ubi finem ponam. Amplissimum siquidem campum apertum video; ubi spatiari, quantumlibet, licet; totum percurrere non licet. Si enim Matheseos Originem, varioſque Progressus & Incrementa; si, quam utilis, dicerem, & necessaria; non solum ad disciplinas reliquas commode perquirendas, verùm etiam ad insignes rerum humanarum usus innumeros, & propemodum infinitos; si, quanta perspicuitate demonstrationes instituat, quanta sagacitate veritatem investiget, quanta certitudine inventam probet, & quanta denique voluptate invenientis animum afficiat, vellem delineare: Non oratio unica, sed multa potius volumina componenda; nec tam esset ad Clepsydram perorandum, quam in infinitum. *De Matheſi generatim.*

Originem ipsius si repetam; ad ipsa mundi principia necesse est recurram: neque enim ipse Mundus, Mathematum usum, antiquitate multum superat. *Matheſeos origo & progreſſus.*

Author est *Josephus*, jam olim, ante diluvium Mathematicas artes viguisse: Duasq; memorat *Columnas Sethi*, lateritiam alteram, alteram lapideam; quibus utrisque inscripserat res Mathematicas jam tum inventas; eo nempe consilio, ut, sive igne sive aquâ mundus periret prius, (Utramque enim perditionem præsensisse dicitur,) earum saltem altera supersit. *Ante diluvium.*

Sin illa *Iosephi* relatio dubiæ cuiquam fidei videatur; non ideo tamen dubium erit, quin, & tunc dierum, Mathematum cognitio non obscura fuerit. Patet illud vel ex artificioso Numerorum usu, & rebus apte computandis jam tum accõmodato. Numeros etiam reperimus, etiam ab ipsis mundi primordiis

(prout in ætatum Patriarcharum Catalogo liquet) per Monadas, Decadas, Centuriasque apte disposi-tos; gradibus, scilicet, proportione decupla continue ascendentibus; ne, inordinata Numerorum multitudine & ἀταξία, confusus laboret calculus, vel quidem nullus omnino sit. Quod, certe, neque temere, nec inartificiose factum est: sed, Arithmeticam tum cultam esse, satis indicat.

Eamque numerorum dispositionem, non ut commodam modo, sed ut absolute necessariam, per omnia huc usque secula continuatam, etiamnum retinemus. Quanquam enim primis Arithmeticis, liberum erat, sive decuplam, sive aliam quamlibet proportionem ad placitum elegisse, juxta quam numerorum gradus dispositos esse vellent: attamen, aliquam saltem eligendam esse, numerosque necessariò gradatim disponendos, res ipsa clamat; nisi nullos omnino numeros esse vellent, vel saltem nullum eorum usum. Si enim res miranda olim habita est, Cæsarem, aut quemvis alium, singulorum in toto exercitu militum nomina memoriâ retinere, recensere, & sua singulis applicare posse; cum tamen eorum in legiones, turmas, cohortes, & quaterniones distributio non parum adjumenti huic negotio contulerit: certe miraculi instar esset, aut plane impossibile, plusquam decies centies millena millia numerorum nomina, eáque inordinata prorsus & independentia, recordari, intelligere, &, prout oportet, applicare. Hanc enim unam numerorum nomenclaturam callere, plus esset negotii, quam omnes omnium linguarum voces edisscere.

Quisquis igitur fuerit, sive Adamus ipse, sive quispiam alius ætate prima natus, qui primus infinitam numerorum multitudinem in ordinem digessit, eosq; quasi in tribus & familias ὑπάκτως disponendo

ἀπε

ἀταξίαν sustulit, certe dignissimus est qui magnus habeatur Arithmeticus, & προτομαθηματικός: sive etiam nondum lapsus Adam, quum sua singulis creaturis imposuit nomina, sua etiam numeris imposuerit, debito interim ordine distributis: sive denique Deus ipse Optimus Maximus, quum Adamum Grammaticam docuit, docuerit etiam & Arithmeticam; fuerit-que tam loquendi, quam numerandi habitus, ipsi a Deo immediate infusi, qui tamen aliis post illum hominibus præceptis & crebris actibus sunt acquirendi: saltem, utcunq; numerandi peritiam ætate prima non fuisse incognitam, abunde liquet.

Nec minus dubitandum est, Arithmeticæ Geometriam adjunctam esse. Partim quod mensurarum omne genus necessitas videatur id postulare; partim etiam quod, numeris semel intellectis, non adeo difficile sit eos mensuris applicare.

Atq; hoc ideo præsertim videtur affirmandum, quod Instrumenta etiam Musica, Metallorum notitia, & fabriles operæ, non ita multo post, a *Caini* posteris sint inventa; authoribus nempe *Iubale*, & *Tubal-Caino*. Quorum si illum *Apollinem*, hunc *Vulcanum*, postea dictos esse dixerimus, a vero fortasse non aberrabimus: Neq; enim eorum vel nomina vel inventa sunt prorsus absimilia. Nam *Iubalis* instrumenta Musica, cum *Apollinis* Lyra, sat apte concordant; & *Tubal-Caini* fabrilia, *Vulcano* Fabro, commode applicantur.

Utriq; vero, Arithmeticæ scilicet & Geometriæ, *Astronomiam* etiam adjunctam esse, ex annorum, tunc temporis Mensiumq; calculo, sat innotescit. Qui Solem enim, & Lunam, reliquaq; Sydera, ad dierum, annorum, mensiumq; discrimina, constituit Deus, noluit hæc temporum indicia diu ignorari.

Erat

Erat igitur universa Mathesis, quoad præcipuas saltem ipsius partes, etiam tunc exculta; gradatim tamen succedentibus seculis perficienda. Adeoque poterit cum disciplinis reliquis, si non omnibus, plerisque saltem, de primatu contendere.

Post Diluvium. Sed neque diluvio extinctus Matheseos ardor; nec ipsa succedentibus ætatibus deferbuit: sed, sive *Noachi* arcâ conservata, sive deinceps postea exsuscitata, viguit magis.

Apud Chaldæos. Apud *Chaldæos* siquidem, post Diluvium, primo floruisse creditur; deinde & apud *Ægyptios*, (unde in *Græciam* tandem, *Italiam*, aliasque mundi partes est allata:) cum hoc tamen discrimine, *Chaldæorum* Astronomia, *Ægyptiorum* Geometria, præcipue celebrata est.

Chaldæos jam olim rebus Astronomicis operam dedisse, testantur Observationes illæ Cælestes, quæ, (Alexandro victore,) a Calisthene, ad Aristotelem, Babilone dicuntur allatæ; annorum scilicet mille nongentorum & trium; hoc est, ab ipso circiter Diluvio ad Alexandri tempora continuatæ, ut ex calculo Chronologico satis liquet: Nec enim multo plures anni a Diluvio ad Alexandri tempora elapsi fuerant.

Sed &, in sacris Scriptoribus, Chaldæorum, non modo peritiam Astronomicam, sed & superstitionem Astrologicam, notatam legimus; quo minus dubitare liceat, artes Mathematicas apud illos antiquitus floruisse.

Apud Ægyptios. Nec etiam multò seriùs ad Ægyptios delata est Mathematum cognitio: sive enim ab *Abrahamo*, prout nonnullis videtur, sive a quopiam alio ex Chaldæis Magistro, edocti; sive etiam ipsa rei necessitate coacti fuerint: certum est Mensurandi peritiam non serò ad illos appulisse. Aversus enim notissimas inundation e

undationes Nili, vix efficacius ullum adhibuere remedium, quam quod Geometriæ beneficio obtinebant: diſpertitis nempe Geometrice terris, quas undarum injuria conſuderat, & reſtitutis agrorum emerſorum limitibus, quos ſubmerſio ſuſtulerat, quo melius ſua ſingulis diſtribuantur.

Atque hinc fortaſſe factum eſt, quod tota menſurandi ſcientia *Geometriæ* nomine indigetetur, quoniam Gæodeticis præſertim menſurationibus applicata; nomine nempe totius, συνεκδοχικῶς, ab inſigniori quâdam ipſius parte, mutuato; quæ *Pantometria* non minus recte dici poſſet, vel ſimpliciter Μετρική. Neque enim terræ magis, quam cuiquam alii vel ſpatio, vel corpori, menſurando convenit: agit enim de Magnitudine, ſeu Quantitate continuâ, abſtracte & ἀυλῶς conſideratâ, adeoque cuilibet ſubjecto capaci pariter applicabili. *Geometriæ nomen unde.*

Quæ autem de Ægyptiorum Geometria diximus, non ita dicta velim exiſtimetis, acſi aliarum Matheſeos partium rudes eſſent: ſed quoniam neceſſitate rei coacti, ea præcipue uſi ſunt; quò meliùs Nili injuriis obveniatur: (pari ſcilicet neceſſitate, ac illa quæ Phœnicibus incubuit poſtea, Arithmeticam excolendi; quò felicius nempe ſuccederet mercatura.) Cum enim fuerint Ægyptii Geometriæ periti, Arithmetici calculi ignaros eſſe, ſine quo Geometria practica parùm procederet, non eſt exiſtimandum. *Phœnices Arithmeticam excoluerunt.*

Nec etiam Aſtronomiæ rudes cenſendi ſunt: cum enim ὀνειροκριτικὸς fuiſſe conſtet, adeoque Divinatricis ſive artis ſive impoſturæ ſtudio deditos: non credendi ſunt cœleſtia φαινόμενα, quorum ſive uſus ſive abuſus apud ejuſmodi ſciolos maximus eſſe ſolet, inobſervata præteriiſſe. Quod ideo quidem minus credendum eſt; quia, & regio ipſa, ob perpetuam cœli ſerenitatem, adeo cœleſtibus obſervationibus eſt accommoda,

ut nulla magis: Et Chaldæos, a quibus hujuſmodi artes didiciſſe creditum eſt, Aſtrologiæ fuiſſe peritos, abunde liquet; unde non minus Aſtrorum cognitionem, quàm cognatas artes, hauſiſſe commode potuiſſent: Imo & vicinos Arabes aſtra notaſſe & nominaſſe, ex hiſtoria Jobi liquidò patet; quem Arabiæ vel incolam vel vicinum fuiſſe, & Patriarcharum temporibus Ægypto commorantium vixiſſe, vix dubitandum eſt. Nec interim tota hæc Ægyptiorum doctrina vel futilis erat, vel ſuperſtitioſa; cum Moſen ipſum illorum diſciplina imbutum legimus, nec tamen ideo culpæ inſimulatum.

Verum jamdiu apud Chaldæos & Ægyptios morati ſumus, (diutius fortaſſe quam opus erat,) ut Matheſeos originem, & antiquiores progreſſus inveſtigemus. Fatendum autem eſt, in toto illo temporis decurſu, quo apud illos Matheſis morata fuerit, vix inſignem aliquem perfectionis gradum adeptam eſſe: ſaltem, niſi forte, vel invidioſa illorum reticentia, quâ inter arcana Sacerdotum myſteria etiam res Mathematicas occuluerunt; vel injuria temporis, etiam aliis diſciplinis inimica, eorum inventa oblivioni dederit, quò minus ipſorum peritia poſteris innoteſcat.

Apud Græcos. Ad Græcos tandem Matheſis tranſmigravit: quo etiam feſtinat Oratio noſtra. Eam nempe Thales Mileſius in Græciam primus adduxiſſe creditur; quam Pythagoræ ſubinde Schola, Platonis Academia, Ariſtotelis Lyceum, multique his edocti magiſtris, foverunt, excoluerunt, auxerunt indies. Quod eo quidem ſucceſſu factum eſt, ut paucis annorum centuriis ſub illorum auſpiciis plus floruerit Matheſis & ampliores progreſſus fecerit, quam per omnia ſecula ſuperiora; ne dicam etiam & ſubſequentia, ſi ſaltem ducentos jam proxime elapſos annos eximamus. Teſtatur illud numeroſa Græcorum Mathematicorum cohors:

inter

inter quos, præter ſuperius nominatos, etiam Hippocrates Chius, Archytas Terentinus, Leo, Theudius, Eudoxus, Euclides, Eratoſthenes, Archimedes, Hipparchus, Apollonius Pergæus, Cteſibius, Hero, Gemînus, Soſigenes, Ptolemæus, Pappus, Diophantus, Serenus, Proclus, Theon, aliique multi quorum ne quidē nomina recenſere licet. Quorum alii Theoremata & Problemata ingenioſe excogitarunt; alii methodice diſpoſuerunt, ἀποδείξεις addiderunt, quibus illuſtrarunt & confirmarunt; alii Mechanicis uſibus applicarunt; alii denique cælis, alii terris, alii aliis magis exercitati: vix enim ullo uſpiam ſolo, quam apud Græcos, Mathemata felicius floruerunt.

Neque ſtudia iſthæc Mathematica coluerunt tantum Græciæ Philoſophi plerique omnes; ſed inter prima eruditionum rudimenta poſuerunt; unde κατ' ἐξοχὴν μαθήματα nominarunt. Grammatices enim ſtudio vix opus erat; cum linguâ vernacula perage-bantur omnia: Rhetorices floſculos, antiquiores Græci minus curabant; ut qui res magis quam verba inſectabantur: Logicam etiam, quâ uſi erant, ipſo potius uſu, quam præceptis, addiſcebant: adeoque prima ſtudiorum principia in ipſis Mathematis ponebant; quique horum rudes eſſent, ut omnino ἀμαθεῖς, ἀπαίδευτοι, & indocti prorſus habebantur.

Matheſis apud Græcos ante alias diſciplinas docebatur.

Μάθησις unde dicta.

Hinc orta eſt illa Pythagoræ φυσιογνωμόνησις, quâ, inſpecto vultu, judicium primo fecit, an Mathematum capaces eſſent, qui ipſius ſcholam adire vellent; nequis ἀμαθὴς, ἀπαίδευτος intraret, ſtudiumque male collocaret. Haud ſecùs & Plato affixo programmate prohibebat μήτις ἀγεωμέτρητος εἰσίτω. Xenocrates poſtea quendam repulit, Mathematum ignarum, ne ſui auditor eſſet, ut qui Anſas Philoſophiæ non habuerit: τὰς λαβὰς inquit, φιλοσοφίας οὐκ ἔχεις. Nec multo ſecius Ariſtoteles feciſſe creditur; qui & Mathematica mul-

ta ſcriptis aliis immiſcuit, & libros etiam Mathematicos conſcripſit; licèt eorum non pauci injuria temporis perierunt.

Matheſeos neglectus.

At heu! quam noſtræ Athenis illis longe diſpares! Ubi, ſi Pythagoræ φυσιογνωμόνησις, Platonis Programma, aut cenſura Xenocratis obtineret, ut ἀγεωμέτρητοι omnes exſularent, certe exiguus ſupereſſet Philoſophorum numerus. Studia nempe Mathematica, quæ primas olim obtinebant, vix nunc dierum (neſcio quo malo fato) apparent uſpiam: acſi hodierni Philoſophi Cynicis mallent & Epicuræis accenſeri, quibus fere ſolis erat Matheſis neglectui; quàm Pythagoricis, Platonicis, aut Ariſtotelicis, quibus & curæ fuit & delectationi. Imo vero res Mathematicas ad Philoſophiam non pertinere, arbitrantur hodierni quales quales Peripatetici, cum tamen erat ipſe πειρατικὸς egregie Mathematicus: quod ipſi ſive negent, ſive neſciant, ſaltem diſſimulant.

Verum fatendum ingenue quod res eſt. Ex quo Athenis migrarunt ſeveriores Muſæ, vix uſpiam firmas poſuere ſedes, ſed vel errare coactę vel deliteſcere.

Matheſis Romæ neglecta.

Romani nempe, quanquam Græcorum literaturę hæredes habiti, pro florido quo erant ingenio, potius quàm ſolido; dicendi potius copiâ & verborum ornatu, quàm rerum pondere & argumentorum acumine delectati; Rhetoricâ magis quam Logicâ inſtructi; orationis potius quam rationis Magiſtri; leviores Muſas amplexi, ſeveriores omnino inſalutatos prętereibant. Grammaticam ſcilicet, Rhetoricam & Poeticam ornare ſatagunt: Philoſophiam interim, Medicinam, & rerum pręſertim Mathematicarum ſtudia miſſa faciunt; Condendis carminibus, componendis orationibus, rebus forenſibus agendis apti, ut & Hiſtoriis conſcribendis; Verum ſi apud illos Philoſophiam aut Matheſin quęſitemus, omnino fruſtra ſumus;

Exceptis

Exceptis enim, quę apud Ciceronem & Senecam occurrunt pauca, Philoſophię quidem parum, Matheſeos vix quicquam occurrit uſpiam: Niſi forte quòd Architectonicâ uſi fuerint.

Verum quidem eſt, Julium Cæſarem annum reformaſſe, *Julianum* deinceps dictum, & Calendarium Romanum inſtruxiſſe: At illud Græci Soſigenis ope factum eſt, aliunde advocati; nec enim Romanorum quempiam huic negotio parem legimus.

Romæ vero nimium neglecta Matheſis, ut & Philoſophia reliqua, in Arabiam deflexa eſt; h ſpitium nempe apud Arabes nacta, ſi non quo floreat, ſaltem quo deliteſcat. Græcorum enim depoſita conſervârunt potius, & tandem reddiderunt, quam auxerunt. Quamquam & eorum ſtudia, minime contemnenda, non ingrati agnoſcimus: quorum non obſcura veſtigia in multis rerum Mathematicarum nominibus etiamnum retinemus. Hinc puncta *Zenith* & *Nadir* nominata; circuli item *Almicantri* & *Azimathani* dicti; & ipſa Sinum appellatio, ut taceam *Algebræ* & *Algorithmi* nomina, & ipſum *Almanach*, & ſiqua ſunt ſimilia, quæ Arabiſmum ſonant. Qui autem Arabum hiſtorias paulo accuratius inſpexe it, varioſque inter illos tum Matheſeos tum aliarum diſciplinarum egregie doctos notaverit, rem illam extra omnem dubitationis aleam poni haud dubitabit. *In Arabiam tranſiit.*

Poſtremis autem hiſce ſeculis jam tandem redux, Matheſis gratiori hoſpitio in variis Europæ partibus excepta eſt: fautores egregios nacta. Quorum indefeſſis vigiliis, & ſumptibus haud exiguis, progreſſus & magnos quidem, & non ſperatos, fecit. Exſurgit ſiquidem, quaſi ex alto ſopore exſuſcitata; ſeu potius, ut p idem quaſi ſemimortua, jam reviviſcit: nec reviviſcit tantum, ſed quaſi vegetum vigorem recens adepta, *In Europam rediit: incrementa multa nacta eſt.*

adepta, in singulis quidem ipsius partibus & aucta multum & ornata incedit.

Arithmeticam si spectemus; fractionum ad partes decimales reductio, laborioso calculo senagenario multo facilior est & expeditior: Et mirandum illud Logarithmorum inventum, egregium attulit calculo subievamen; ut alia minora taceam.

Geometriam quod attinet: Doctrina Sinuum, Tangentium & Secantiũ, fere tota nova est; quâ Trigonomtriæ calculus maxime sublevatur. Et præter varia Theoremata de novo inventa, ipsa inveniendi methodus multum facilitatur. Algebræ nempe, sive Analitices usus, ultra quam qui veteribus innotuit, jam innotescit.

Astronomia, eximiis inventis instauratur; non tantum novis systematis, sed & novis φαινομένοις repertis. Quis enim veterum vel circum-Joviales planetas? vel Solis maculas? ejusve motum circa proprium axem? vel cometas etiam, sive novas in fixaru regione stellas, observavit? Quis item Veneris aut Mercurii cornua? Saturni ansulas, & figuram ovalem? aut Jovis faciem undulatam? ipsosque Lunæ montes, & valles, inæqualiter asperam superficiem notavit unquam? Et (ut alia levioris momenti transeam) Ars ipsa nautica, Astronomicis ut plurimum principiis fulta, præter stupendum magneticæ pyxidis usum, variis tum inventis tum instrumentis locupletatur.

Non ideo tamen mirum videri debet, aut Græcorum industriâ quicquam derogatum iri, si multa veteribus incognita nostræ ætatis Mathematici investigârint. Multo enim facilius nobis est ipsorum inventis addere, quam ipsis primitus invenire. Præsertim cum studia nunc liceat, Typographiæ beneficio, per totam Europam communicare, quæ tunc dierum quasi unis erant Athenis conclusa.

Verum

Verum omnino excitandi estis, Academici, & hortandi serio, ut hisce rebus animum applicetis sedulo; nec patiamini, ut veternum rebus mathematicis aut denuo obrepat, aut diutius incumbat. *Παραίνεσις ad Mathesees studium.*

Si, quorsum hæc? quæratis; aut cui bono? Quanquam ea vox Academicis omnino est indigna; mihi tamen erat in animo pluribus ei, quam nunc licebit, obviam ire. Sed angustia temporis illud prohibet; Ne nimio vobis tædio sim molestus.

Quin Mechanicos consulite, si nesciant Academici, aliosque ex vulgo sive operarios sive negotiatores, Numquis rerum Mathematicarum usus? Consulite Mercatores, numquis plane ἀναειθμητ& eorum ratiocinia curare possit? Interrogate nautas, numquis Geometriæ, Astronomiæ, Geographiæ plane rudis, navigia possit de portu in portum ducere? A Latomis item & Architectis scisciteminí, numquis ἀγεωμέτρητ& superbas ædificiorum moles, turrita palatia, & arcuata laquearia, Geometrice (ut loquuntur) ad stuporem vulgi suspensa, ædificare? Dicant vel fabri, numquis normæ, libellæ, aut circini usus? Sed & milites percontari liceat, numquis Matheseos usus ad arces & oppida munienda, castra ponenda, tormenta bellica commode regenda, aliaque multa militaria peragenda? Respondeant ipsi Siracusani, ut cætera taceam, num non Archimedis rerum Mathematicarum peritia usui fuerit, Siracusis ipsis propugnandis? *Ipsius utilitas & necessitas.*

At, Quorsum hæc omnia? dicitis Academici. Tractent fabrilia fabri: Quid ad nos istæc, qui mechanici neque nunc sumus, nec aliquando futuri? Qui nec instrumenta bellica facturi unquam, nec ædificia? Itane, vero Academici? Adeone vestrâ nihil interest ea scire, quæ non aliquando facturi estis? Ideone Deus *Os homini sublime dedit, cœlumque videre, Jussit, ---* ut ea tantum contempletur quę posset ipse condere? *Academicorum interest Mathemata calere.*

Num

Num libri de Cœlo, de Mundo, de Animalibus, aliis rebus naturalibus, omnino indigni sunt quos legat Philosophus, nisi hæc omnia possit efficere? Apage vox illa! Philosopho indigna! cujus illud est, ea scire quæ Deus ipse condidit, quæque vel Ars vel Natura possit efficere. Quem melius deceat Chremetis illud Terentiani, quam Chremetem ipsum, *Homo sum, nihil humanum a me alienum puto.*

Sed ut serio agamus, Auditores; unde est quod hæc efficiat Mechanicus operator? Nonne quia Philosopho Mathematico edoctus? Ea nempe quæ Mechanicus efficit, non nisi Philosopho dictante facit: Altioris siquidem scientiæ munus est, ea docere & intelligere, quæ ipsi operantur: Prout minoris artis est, admoto pollice barbita pulsare, quàm concentum musicum ἁρμονικῶς depingere. Horologium puta sciotericum depingit forte sive Pictor sive Cæmentarius; sed præscribente Mathematico: Haud secus ac medicamina componit Pharmacopœus, sed dictante Medico. Nec minus interest Philosophi, μαθηματικῶς & intelligere & demonstrare; quam Mechanici χειρωνικῶς operari. Adeoque indignum esset Academicis, si in opificum potius Mechanicorum officinis, quam Philosophorum scholis, Matheseos cognitio quærenda foret.

Matheſin ignorare non leve dedecus.

An vero tantę laudis est, dicetis forsan, ea scire quæ nec mechanicis sunt aliena? Demus, si placet, non esse; (nec concedamus tamen:) At multa sunt, quæ scire, non est magnæ laudis, cum ea tamen nescire, non parvi sit dedecoris. Non magnæ laudis est, virum Academicum Latine posse & intelligere & loqui, at magni est dedecoris, non posse.

Julius Scaliger Matheſeos ignarus.

Exemplo sit illud Julii Scaligeri; (ut de Josephi Cyclometricis nihil dicam;) qui non modo sibi, sed & aliis non paucis, videtur magnus. Cùm Cardanus

arguerat ſive Cometas, ſive Novas Stellas, Luna ſuperiores apparuiſſe, quod minorem habuerint Parallaxin; Ipſe, aſſumptione conceſſa, ſequelam negat; Cometæ Parallaxin ratus, non ex locali ipſius poſitione, ſed ex ſuperioris cujuſdam ſive planetæ ſive ſtellæ motu pendere poſſe. Quæ perinde abſurde ſonant Mathematicis auribus, & inconcinne dicta ſunt, ac ſi Diem tunc eſſe neget quum Sol meridianâ luce fulgeat: Adeoque, turpiter titubando, inſignem prodidit Matheſeos imperitiam; ut qui dignior eſſet a præceptore diſcere, Quid ſit parallaxis; quam de rebus cœleſtibus diſputare: eoque nomine apud viros doctos, nec ſemel quidem, nec immerito vapulat. Julius ſiquidem Scaliger, pro more ſuo, ſatis pro imperio Cardanum tractans, Cardano negare quidlibet ſibi licere ratus eſt; adeoque ſat amplam ſibi negandi anſam videtur nactus, ſi Cardanus affirmaverit. Atque hoc quidem in rebus mere Phyſicis, magis impune feciſſe poſſet; ubi in utramque ut plurimum partem probabili ſaltem argumento, diſputare licet. Non ita tamen in Mathematicis; ubi veritas ſemel cognita extra dubium protinus collocatur; errores interim tam manifeſto deteguntur, ut nulla quidem ſuperſit vel pretextus larva.

Nec leve illud Ovidii σφάλμα: dum, diurnum Solis motum, Phaetonte duce, deſcripturus, per ſingula Zodiaci ſigna tranſire fingit: motum nempe Solis Diurnum & Annuum temere confundens. Quod indicio eſt, ipſum ſuos ipſius Faſtorum libros vix ſatis intellexiſſe: & Romanorum potius Calendarium, quam cognitos Syderum ortus & occaſus, ſuis carminibus deſcripſiſſe. *Ovidii σφάλμα.*

Verum feſtinandum eſſe video: metuo enim ne jamjam fuerim in patientiam veſtram injurius nimis. Ideoque quæ dicenda ſuperſunt multa, quibus Ma-

theseos studia suadere possem, intacta prorsus praeterire necesse habeo.

Matheseos utilitas ad alia perdiscenda.

Hoc saltem addam: Mathematum studia non modo pro ea quam in se habent veritate colenda esse, (quae tamen ipsa, per se conspicua, & ultra Scepticorum litigia posita, animum reficiet valde & oblectabit;) sed & quod rerum aliarum cognitioni, nec id uno quidem nomine, conducant multum. Praeterquam enim quod in aliis disciplinis passim occurrant multa, quae citra Matheseos opem nullatenus intelligenda sunt: variaque quotidie, ex Matheseωv cultura, Philosophiae Naturali accedant incrementa: Illud interim non est exiguum; Matheseωv studio paratum animum, aliarum disciplinarum capaciorem reddi, rebusque aliis tum apprehendendis tum judicandis longe paratiorem. Haud secus ac vesicas nonnunquam, animalium corporibus exemptas, flatu distendimus & exsiccamus, quo fiant rebus aliis commode continendis aptiores. Sive liceat potius cum Verulamio comparationem instituere; qui scientias Mathematicas cum lusu pilae in sphaeristerio confert. Ubi praeter ipsum exercitationis bonum, quod per se intenditur, etiam ἐυκίνητον σῶμα, (ut cum Hippocrate loquor,) membrorum nempe agilitas, oculorum attenta θέσις, totiusque corporis gestus decorus, aliaque subinde commoda, ex accidenti conciliantur. Pariter & Mathesis, praeter ipsam Mathematicae veritatis cognitionem, habet & alia commoda, eaque non exigua, [quasi adnascentia.] Nec enim aptius occurrit remedium, quo phantasia mobilis attentior fiat, quo ingenium volatile reddatur fixum (ut Chymicorum verbis utar,) quam si Mathematicarum demonstrationum compedibus coerceatur. Vix item maturo magis judicio quispiam, quam qui rebus hisce exercitati, vel sophismatum fallacias

Mathesis ingenium acuit.

felicius

felicius deteget, vel syllogismorum vires justamque sequelam assequetur.

Verùm ego non parum metuo, ne suada nostra ad persuadendum vix satis valeat: adeoque Mathematum studia, quæ digna quidem sunt (Academici) quæ amplectamini, etiamnum nimis neglectui sint futura.

Sin minus valuerit Oratio nostra, (quæ fortasse non adeo eleganter vel artificiose est elaborata, ut multum valere possit:) utinam saltem periculum facere dignaremini, ipsaque Mathemata cominus tractare: ut vel vosmet ipsi, experimento tandem edocti, judicium hac de re possitis experti ferre. Neque enim vos ipsos aliquando iniquos me habiturum judices, abunde confido.

Quod ego interim non pro forma tantum, Rhetoricantium more; sed serio quidem & animitus opto: ut quod siquando feceritis; nec laboris impensi, nec temporis, spero, quasi male collocati, pigebit unquam. Ea nempe res Mathematicæ dulcedine & suavitate delectant ambientis animum, quam siquis Rhetorico ornatu describere satagat, quasi ad vivum se posse delineare ratus, omnino frustra est. Haud secus enim hac in re contingit, ac siquis de Mellis dulcedine judicium laturus esset: quæ quanta sit, vel uno gustu melius perdiscet quis, quam Rhetoris, utut facundissimi, descriptione. Et Mathemata pariter, ipso quidem quasi contactu potius, quam indicatu, docent, quam sint delectabilia. Nativa nempe sua ipsorum pulchritudine, quam penecillo licet peritissimo depicta, videntur venustiora.

Siquis autem difficultatis incusет, & perobscura queratur studia Mathematica: Quanquam illud quidem non prorsus inficias eam; Tamen --- *est infamia vero Major* --- Præter enim ipsum aspectum primum, & frontem quasi subtetricam, cætera quæ

Matheseos obscuritas non tanta quanta vulgo creditur.

ſuperſunt non tam terrere comperta ſunt, quam oblectare? Quodque ipſum, aggreſſuris, videtur prima fronte formidabile, illud, aggreſſis, & dulce ſatis compertum eſt & volupe; Ipſiq; qui ſubſequuntur labores ſuaviſſimis adeo delectamentis condiuntur, ut neſciam an Labores illi, an Voluptates, haberi mereantur. Sunt enim & luſus ipſi nonnunquam ſatis laborioſi, quæ tamen oblectamenta potius quam gravamina exiſtimantur. Adeoq; qui ad Matheſin requiritur ſive mentis labor, ſive attentus animus, non niſi, ut condimentorum acrimonia, appetitum potius excitat, quam palatum offendit.

Quicquid autem illud ſit difficultatis quæ Matheſin comitetur, quodque aſperum occurrit, cònabor ego ſecuturis (Deo volente) prælectionibus, quanta quidem poſſum facilitate alleviare. Interim, ne περὶ μαθηματικῆς ἀμέτρως dicam, orata prius læſæ patientiæ veſtræ venia, conticebo.

DIXI.

Johannis Wallisii, S S. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI;

MATHESIS UNIVERSALIS:

SIVE,

ARITHMETICUM OPUS INTEGRUM,
Tum Philologice, tum Mathematice traditum;
Arithmeticam tum *Numerosam*, tum *Speciosam*
sive *Symbolicam* complectens, sive *Calculum*
Geometricum; tum etiam *Rationum* Proportionumve traditionem; *Logarithmorum* item Doctrinam; aliaque quæ Capitum Syllabus indicabit.

OXONII,
Typis LEON. LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. *Anno* 1657.

Insignissimis Doctissimisque Viris,

D. GERARDO LANGBAIN, *S. T. D.*
Collegii Reginensis, Oxoniæ, Præposito.

D. HENRICO WILKINSON, *S. T. D.*
Præbendario Ædis Christi.

D. JOHANNI WILKINS, *S. T. D.*
Collegii Wadhamensis Custodi.

D. JONATHANI GODDARD, *M. D.*
Custodi Collegii Mertonensis.

JOHANNES WALLIS, Geometriæ
Professor Savilianus,
S.

CUM quæ in publicum prodeunt, pro more scilicet (eoque satis inveterato) nonnullis inscripta soleant prodire; neq; mihi quidem a recepto illo more jam recedendum plane videatur: Ex reliquis, quos & amo & veneror Collegiorum Præfectis, aliisque apud nos summis in omni eruditionis genere viris, vestra libuit, Viri Insignissimi, nomina seligere, quibus qui sequitur tractatum duxerim inscribendum. Quod quidem eo consilio factum est, ut, cum

pra-

præ ipſorum reliquis (pleriſque ſaltem) Vos maxime ſtudiis hiſce Mathematicis indulgeatis, ſive etiam incumbatis: eadem opera tum meos in vos affectus & obſervantiam teſtari poſſim, tum ſequentis etiam operis rationes breviter aperire.

Hoc autem quicquid eſt negotii eo potiſſimum fine ſuſceptum eſt, ut huic quam ſuſtinere datum eſt provinciam, non modo non deeſſe penitus videar, ſed & eam ornare potiùs, pro viribus noſtris, & quo defungor munus adimplere. Quippe, cum hoc ſibi animo fuiſſe propoſitum, Eques Honoratiſſimus, idemque munificentiſſimus Patronus, D. HENRICUS SAVILIUS, *eximius ſui temporis Mathematicus, ſtatutis ſuis ſatis teſtatur; ne mera nomina ſint Profeſſoris ſui, ſed qui ſtudia Mathematica ſedulo promoveant: Id mihi maxime viſum eſt incumbere, ut juſtiſſimis votis ſuis quantum in me eſt ſatisfaciam, nec nudo contentus titulo, Matheſeos ſtudia vel promovere ſatagam, vel adjuvare.*

Atque in hunc finem, præter aſſiduas prælectiones publicas, & privatas eorum qui hoc deſiderant inſtitutiones, omnino expedire videbatur, ut univerſalem hujuſmodi Calculi traditionem publici juris facerem, qui non tam ſpeciatim Arithmeticam, quanquam & hanc etiam, quam totam Matheſin ſpectet. Ex quo enim in Matheſin introducta eſt, quæ dicitur, Arithmetica Specioſa, *ſive* Symbolica, *vel (quod aliis etiam audit)* Calculus Geometricus, *aut etiam (forte omnium optime)* Matheſeos Univerſalis principia, *(quippe ut tota Rationum traditio, ita & hujuſce Calculi exercitium, indifferenter omnes Matheſeos partes reſpicit;) ex quo, inquam, hæc introducta eſt;* Vietæi, Oughtredi, Harrioti, Carteſii, *aliorumq; magni nominis virorum, ope; quam ingentes fecerit profectus Matheſis univerſa, nemo hiſce rebus vel leviter exercitatus*

exercitatus ignorare possit. Quod autem ego, post tot exímios qui in hoc negotio præcessêre viros, rem hanc aggrediar; non eo factum est animo, ut eorum laboribus quicquam ego derogatum velim; sed quod non ita rem hactenus absolutam putaverim quin & mihi pariter, quod post illorum messem colligam, etiamnium supereſſe putem spicilegium.

Et quanquam eorum pars magna, quæ nunc proferimus, Auditoribus noſtris jam publicis fuerint prælectionibus expoſita. Attamen, cum nec eoſdem plane auditores continuis ſemper prælectionibus adeſſe, res ipſa clamet; & quidem, ſi adeſſent, non eâ tamen valeant memoriâ, ut non ſæpe ad ea quæ præceſſerunt reſpicere ſubinde opus habeant; quid, quod & hujuſmodi ſtudia non ea ſint quæ auditione prima ſatis imbibantur, ſed attentam inſuper mentem poſtulent, & contemplationem, qua penſitemus ſerio, & dictis inhæremus: Haud importunum fore autumo vel ipſis qui hæc audiverint, nedum aliis, ut & oculis eadem ſubjecta habeant, quo & ea perſentiſcant altius, & ſeriis, hiſce, cogitationibus aſſueſcant.

Rem ipſam quod attinet; non eſt ut nova hic expectetis omnia; ſed neque nulla tamen. Numerorum natura, ſaltem quoad integros jam olim erat veteribus probe nota. At calculus eorum perplexus admodum & intricatus, labore plane improbo abſolvendus: Et ſiquando ad integrorum particulas deſcendendum erat, ad ſcrupulos ſexageſimales confugiebant (qui integrorum inſtar habebantur) aut etiam ad Rationum doctrinam figuris lineiſve explicandam. Atq; hinc factum autumo, quod Rationum Doctrinam, quæ mihi quidem Arithmeticæ potius conſiderationis videatur (atque ad omnes plane Matheſeos partes perinde ſpectet,) ad Geometriam plane relegarint; partem ſcilicet quod lineis facilius quam laborioſo illarum calculo res ex-

rgatur, partim etiam quod Arithmetices pomœria tam ſtricta fecerint, ut veris numeris (rationalibus ſcilicet, & quidem integris,) coerceantur, quibus tamen immenſos Rationum campos haud coerceri poſſe certum erat.

Poſtquam autem in Arithmeticam introductus eſt Notarum numeralium uſus, quæ Saracenicæ, ſeu rectius Indicæ, vulgo audiunt (ab Indis quippe in Arabiam, atque ad nos inde, delatæ;) tum incredibili ſtatim levamine facilior evaſit moleſti labor calculi, tum etiam Arithmetices pomœria inſigniter ampliata. Et quidem ex eo tempore, præter faciliorem integrorum calculum, acceſſit etiam ad Arithmeticam, Fractorum ſpeculatio, ſed & Surdorum deinceps numerorum.

Atque hactenus ubi perventum erat, revixit denuo, & quaſi ex poſtliminio revocata eſt, Veterum Algebra (nomen jam Arabicum ſortita) quæ (præter ea quæ apud Diophantum exſtant) jam altum obdormiverat. Quam hæc interea temporis ſortem apud Arabes nacta fuerat (qui tum Matheſin, tum alias item eruditionis partes alioqui perituras feliciter conſervarunt, & tandem reddiderunt) haud in promptu eſt ut dicam; ſub Cardani ſaltem, Tartaleæ, & Clavii temporibus redux facta, eorum ſcilicet aliorumq; jam proxime elapſi ſeculi laboribus ornata, apud Europæos ſedem fixit.

Ubi autem hæc redux veterum Algebra jam denuo excoli cœpta fuerat, atque ob jam receptas notas numerales expeditior facta; neque nunc Radicem primam *quam vocant ſolummodo, ejuſque poteſtates,* Characteribus Coſſicis *inſignire ſolenne fuerat, ſed &* Radices ſecundas *literis Alphabeticis: hinc credo anſam arripuit primus acutiſſimi & ſagacis admodum ingenii Vir* Franciſcus Vieta, *non ignotas tantum quantitates, ſed & cognitas etiam literis Alphabeticis inſigniendi, eam-*

que

que quam Speciosam *vocamus Arithmeticam, & Novam Algebram introduxit: quam deinceps* Oughtredus, Harriotus, Carteſius, Schotenius, *&c. auxerunt indies, & plenius excoluerunt.*

Sed & interea temporis, in Arithmeticam numeroſam partium Decimalium uſus (quæ ſexa geſimalium ſcrupulorum vices inſigni præſtant compendio,) ſive a Regiomentano *ſive ab alio quopiam, ita ſenſim invectus eſt, ut quis ipſius fuerit primus Author vix (credo) ſatis conſtet. Atque inſuper* Logarithmorum *doctrina ab Honoratiſſimo* Johanne Neppero (*Merchiſtoniæ apud Scotos Barone*) *primitus excogitata, atque ab ipſo junctim cum* Henrico Briggio (*Geometriæ primum Profeſſore* Greſhamenſi *Londini, deinde* Saviliano *Oxoniæ,*) *recognita & penitus abſoluta, Multiplicandi, Dividendi, & Radices educendi laborem, incredibili plane compendio ſublevavit.*

Cum autem hoc adepta ſit faſtigium Arithmetica, variorum in ſuo cujuſque genere virorum eximiorum ope fulta; quod illi ſigillatim præſtiterunt, id mihi jam in unicum ſyſtema redigendi incumbit onus. Adeoque Arithmeticam (niſi Matheſin *potius* Univerſalem *malitis appellare) non tantum in* Numeris *ſpeciatim, ſive Integris ſive etiam Fractis; aut partibus tandem vel Decimalibus vel Sexageſimalibus abſolvendam: ſed univerſaliter in* Speciebus *etiam (uti dici ſolent) vel ſymbolis exercendam: hoc eſt, non Numeroſam tantum, ſed & Coſſicam & Speciosam Arithmeticam, ſum traditurus. Sed & Demonſtative omnia (quod tamen negligere ſolent Arithmetici plerique omnes,) ut & Arithmeticæ ſpeculativæ doctrinam, & praxeos item regulas tradam ex ipſis deductas principiis, continuis inde demonſtrationibus (utut breviter, perſpicue tamen,) ſtabilitas.*

Verum & Rationum item & Proportionum doctrinam, ad Arithmetica principia revocatam, jam ſua tandem ſede collocavi. Cum enim eouſq; ſe dilatarunt Arithmetices pomœria, ut non contenta ſolis numeris, univerſum illud qua longe lateq; patet matheſeos ſubjectum, ſpecierum ope, ſuo jam comprehendat ambitu; & quantitates invicem tum Rationales dictas, tum Irrationales perinde reſpiceat: non eſt cur Rationum ſive proportionum doctrina univerſa, iiſdem ſe concludi cancellis patiatur; quæ quidem vix alio nomine, relictis Arithmeticis, in Geometricos olim fines recipi poſtulavit, quam quod Arithmetica dum veris numeris ſe concludi paſſa eſt, non agnoverit Rationes ullas quam quæ veris explicari numeris potuerunt.

Quod vero longiuſculis nonnunquam digreſſionibus expatiari videar, (nec tamen extra iſtius quod ſuſcepe-rum negotii limites,) id data opera factum eſt, nec quidem uno nomine. Partim enim illud in lectorum gratiam faciendum videbatur, quo rerum varietate nonnunquam oblectari poſſint, & traditorum utilitatem vel ipſa uſu edi-ſcant: partim etiam (quod in toto hoc negotio mihi fuiſſe propoſitum non diffitear) ut reapſe oſtendam etiam Geometrica Problemata (quatenus ſaltem a poſitione ſive locali ſitu abſtrahunt) a principiis Arithmeticis vel maxime dependere; & quidem eouſque abeſſe ut ad Problemata ſive Theoremata pure Arithmetica ſtatuminanda (quod tamen non raro factum video) Geometricæ plane demonſtrationes ſint huc forinſecus advocandæ, ut contra quæ Geometrica habebantur, ſimplicius quidem & univerſalius ex puris Arithmeticis adeoque univerſalibus demonſtranda videantur.

Quod autem vel Philologica, vel etiam alia Philoſophica Mathematicis immiſcuerim; partem illud ad ſubjecti explicationem commodum videbatur, partim etiam ut condimenti

condimenti loco, quò quæ, tyronibus præsertim, satis arida videantur facilius deglutiantur, a quippe qui Mathematicis forsan parum ante hac exercitati, diverticuli nonnunquam opus habeant ne continua mentis intentione nimiũ defatigentur. In quorum item gratiam, fui ex consulto in primoribus, prolixior & fusior explicandis, quam in succedentibus; quippe quod quibus primum aggressuris necessaria visa est prolixitas, iisdem ipsis quadantenus exercitatis non minus grata sit futura brevitas.

Quod denique tardius aliquando prodeat tractatus ille quam speraveram (quippe jam secundus annus agitur exquo prelo subjectus fuerit,) ne miremini, hoc faciet maxime, si saltem quibuscum & quam perpetuis preli difficultatibus luctandum erat, satis intelligatis; præsertim tum apud Typographos hujusmodi scriptis edendis parũ assuetos, tum etiam non admodum instructo typographeo. Quippe hinc non raro factum est, ut nunc ob schematum, nunc characterum inusitatorum, nunc etiam literarum inopiam, (quæ omnia non nisi Londino quoties res exigebat cum non exigua temporis jactura supplenda erant,) hærendum tum aliquandiu tum aliquoties fuerit. Et quidem eousque, ut postquam hanc Partem Primam aliquatenus inchoaveram seponenda tamen ea plane fuerit, dum Pars secunda serius incepta (quæ jam ante annum prodiit) absoluta fuerit. Sed & etiam interea temporis (præter opuscula quædam Theologica emissa) bis occurrebat castigandus Hobbius Latine primum, Elencho meo in ipsum edito, quo ipsius in libro De Corpore ἀγνωμοσυνία castigatur, & fastus reprimitur; deinde & Anglice, obscriptum ipsius Anglicanum convitiis fartum, quo furiam agit, & omne genus λοιδορημάτων tum in me, tum in Collegam meum Virum Clarissimum, spurcissimo effundit ore; quod nempe ipsius arrogantiæ, inscitiæ conjunctæ, uterque ausi sumus contraire, nec eum

passi

passi sumus tum Scholas tum Academias qua Veterum qua Recentiorum omnino omnes impune lacessere, aut se vanum efferre, suamque ignorantiam cum professo illorum omnium contemptu venditare : (& quidem tertio, ni fallor, castigandus adhuc, quippe quem audio iterum vel scripturientem vel scribillantem.) Nonnihil etiam attulit moræ, quod Marci Meibomii, de Proportionibus Dialogus, *ad examen etiam videbatur revocandus; quod in subjuncto huic Tractatu factum est. Quæ omnia, tum preli difficultates, tum tot interim aliorum librorum editio, ne & alia memorem negotia quibus multoties fuerim avocatus, non mirum est si nonnihil edendo huic tractatui injecerint moræ.*

Valete denique, Viri insignissimi; & pergite, quod facitis, tum Academiam hanc celeberrimam, tum Rempublicam universam literariam, studiis ornare vestris & decorare.

Oxonii Dec. 20.
1656.

ERRATA.

ORat. p.7. l.7. *fuerint*: p. 8.l.8. *sive*. l.ult. *Adversus*. p.13.l.20. *sinuum*. p.14.l.22. *valles*, &. p.16.l.2. *aliisque*.

Arithm. p. 3.l. 15. *graduum*. l.ult. marg. *Astronomia*. p. 6.l.32. *lineam*. p 16 l 34 *alia*, p 23 l 15 Ἐννηήκοντα, p 27 l 2 *numerorum*, l 30 *immiscentur*. p. 30. l. 11. *f & v*. l. 12 dele *sine*, p 31 l 36 a σφενδόνη, p 36 l 3 *nescis*, p 50 l 13, 6000 100c. p 53 l ult. *adjungatur*, p 58 l 22 *figlas*, p 63 l 36 *scribantur*, p 65 l 36 *computando*, p 66 l 28 *eadem*, p 68 l. ult: *confugerint*, p 66 l pen. *magnitudinem quadrati*, p 73 l 30 *Geometria*, p 74 l 11 *qui*, l 33 *linea*, l 35 *millia*, p 76 l 32 + 3 *a*, p 77 l 37 *concessurus*, p 78 l 28 *signabo*, l. ult *manebunt*, p 85 l 3 *latius*, l 10 marg. *notiones*, p 94 l ult. *illum*, p 98 l 5 *collocare licebit:*) l 14, 15 (*sive a sinistra sive a dextra ordiamur*) *dependet ex noto*: l 21 *gradui*, p 103 l 27 *sunt* — 1. p 105 l 1 *percipientur*, l 10 *deerant*, p 110 l 35 *restent*, p 113 l 5 *reliquus*, p 114 l 3 *ponendæ*, p 116 l 3. 73981. p 117 l 5 *completos*, p 125 l pen. *dicere*, p 131 l 17 πολλαπλάσιον, p 133 l 14 *exhibere dicendus est*, *hoc est*. l 27 *nempe quadratum*, l 34 *multiplicatione*, *laxiore*, p 134 l 19 *augeri*, p 140 l 28. 4722, l 36 *suas pedes*, p 144 l 6. 3 × 3. ibid. — 1 + 1. l 15, 5 × 3, p 153 l 16 *possent*, p 154 l 22. 9 × 2, p 156 l 22 *divisori* 32 *subscribo*, p 162 l 12 *aliquando*, p 168 l 15 XIX. p 169 l 9. BA — BE = BX. p 170 l 10. 4BAq, l 13. 4B, p 171 l 9 a fine, *e*, p 173 l antepen: + *ae*², p 181 l 12 CD, p 191 l ult: *tum*, p 194 l 20 *rectam*, p 198 l 36 4+9+4+9, p 207 l 4 *Aq*, p 210 l 23 GH = CF, l 25 HD = FB) p 211 l 30 *Cap*: *XXII*.) p 213 l 36 *angulum rectum*, p 214 l 6, 7 *obtusangulum*, l 9 *quorum*, p 229 l 24 *superat*, p 234 l 1 *tradidero*, p 238 l 26 *quod*, p 248 l 9 *Cap*. 33, p 249 col 1. l 12 *T per* 11, l 26 *T per* 4, 11, col 2 l 3 *T per* 11, l 36 *X per* 9, p 258 *Latini*, p 254 l 34 *& ipsius*, p 259 l 15 *minimi*, l ult *sint*, p 263 l 29 *huc*, p 264 l 28, $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$, l ult τετραπλασίονα λόγον ἔχειν, p 265 l 13 D = 8A p 266 l 4, 5 $\sqrt{\ }$, l 28 *Proclo*, l 29 *Theoni Smyrnæo*, p 278 l 27 *valdeq*, l 33, *libuerit*, p 280 l 15 *nomine*, p 291 l 30 *Rd* = *R*'; &, p 279 l 14 *ut est*. l 24 :: BR) V. p 298 l 11 *n*) *N*, p 302 l 25 *demonstrationem*, p 303 l 25 = V + p 307 l 18 *per pr*. 16 $\frac{V}{A}$, p 308 l 6, 7 pro V) A, lege $\frac{V}{A}$) V, p 309 l 10 *prop*. 56, p 311 l 4 *hic*, p 315 l 6 *T per* 11, p 317 l 21, 22 *prop*: 30. *Cap*: 33, p 318 l 16 *Hoc*, l ult *Si enim A*. α:: p 319 l antepen α & γ, l ult *eisdem*, ibid μ = 1, p 323 l 11 *prop* 17, p 324 l 15 *Primam*, l 28 B. B + β, p 335 l pen B + α, p 342 l 17 *ad eandem denominationem*, *quam proce*— p 346 l 2 *multiplicatorem*, p 350 l 24 *ductam*, l 26 *absurdi*) *quod*, p 356 l 14 *in* 12 *mensibus*, l 18 Q = 120, p 359 l 5, 180 = α, p 370 l 30, 5 — 3, p 373 l 11, $\frac{7}{12}$, p 374 l 28 EE, p 375 l 2 *habentur*, p 380 l pen: *fractionibus*, p 381 l 22 *ille dividit per* 2, p 382 l 12 *multiplicantis*, p 384 l 9 *contineantur*, p 386 l pen. $\frac{1}{2}$. $\frac{2}{5}$, l ult $\frac{2}{49}$. p 387 l 1 :: 20. 8. p 393 l 15, 360.

Meibom.

Meibom. Dedic. p.1 l.2 *Aurato*, p 2 l 1 *doctrina*, l 8 *meas*, p 5 l 20 dele *vel*, p 6 l 3 d^2g, p 11 l ult 1 $-\frac{1}{2}\times 2 . \frac{1}{2}\times 2$. p 13 l 20 $\frac{9}{2}\sqrt{3}-6$, p 14 l antep: *aliud*, p 16 l 13 DP+Pp) :: p 18 l 2 *vat*, p 20 l 1 Ec. l ult: Æc: $-\frac{1}{2}$ X, p 21 l 13, $-$Ec $=$ Ac $-$Ec, l 15 Ac, p 23 l pen: $\frac{1}{2}\sqrt{13}$, p 27 l 10, $\frac{44}{9}$ $=$ C, 17, 3 $=$ *R*, p 29 l 24 γέροντος, p 33 l 28 *Quoad*, l 31 r $\mp$, p 37 l 33 *Paraoloide*, p 41 l 32 *erant*, p 48 l 17 *concavam*.

Refut: p 1 l 23 *Moriæ*, p 2 l pen: *sortiatur*, p 7 l 10 *indefinite Relatio*, l ult: *Quantitatis qualitatem*, p 21 l 13 *Quid*, p 36 l 1 *stabiliat*, p 37 l 32 *quidni*, p 40 l ult: *At*, p 46 l 10 *tur* $\frac{4}{5}$, p 50 l 10 *absurde*, p 51 l 35 *est*, p 52 l 24 *At vero*, p 58 l 7 *duæ simplæ*, p 63 l 4 *paginæ*.

Matheſis Univerſalis.

SIVE,

Arithmeticum opus integrum; tam Philologicè quam Mathematicè traditum.

CAP. I.

De Matheſi in genere; ejus Objecto & Diſtributione.

PRiuſquam Arithmeticam, quam deinceps ſum traditurus, ſpeciatim aggrediar: non omnino abs re fore judico, generalia quædam quaſi προλεγόμενα præmittere, de ipſa Matheſi in genere (cujus Arithmetica pars eſt ſatis inſignis,) ut, Quid ipſa ſint Mathemata, paucis enarrem; cur ita dicta; & Quibus in rebus verſentur: & Matheſeos deinde diſtributionem ſubtexam.

Si, *Quid ſint ipſa Mathemata*, quæratur; aut, quas diſciplinas illo nomine indigitemus: Reſpondeo, Mathemata dici, ſeu diſciplinas Mathematicas, omnes illas ſive Artes ſive Scientias, quæ circa *Quantitatem* peculiari modo verſantur; ſive continuam quidem, ſive Diſcretam. *Matheſis quid?*

Quantitatem verò cum dico, non eam laxiori quodam ſenſu intellectam vellem; prout eam Ariſtoteles nonnunquam, ſive poſt illum alii, laxiùs loquendo, deſcribunt; quando Tempus, Locum, Orationem, aliquando etiam Motum & Pondus, & ſiqua ſunt ſimilia, ipſius ſpeciebus annumerant: Sed ſtrictiori ſenſu, prout ad Numerum & Magnitudinem reſtringi ſolet; quæ vel ſolæ ſunt, vel ſaltem præcipuæ Quantitatis propriè dictæ ſpecies. Reliqua verò non niſi Reductivè ad Quantitatem propriè dictam pertinere reputantur, quatenus nempe vel Menſuræ vel Numeri ſunt capacia; adeóq; vix ullam ſubeunt Mathematicam ſpeculationem, niſi quatenus ad modum vel *Magni* vel *Multi* conſiderantur; præſertim ſi tota Rationum vel *Matheſeos objectum, Quantitas propriè dicta.*

Proportionum doctrina vel Arithmeticæ vel ſaltem Geometricæ conſiderationis habeatur.

Verum quidem eſt, ea omnia in diſciplinis Mathematicis tractari, iis præſertim quæ Mixtæ dicuntur: quâ forſan ſolâ ratione, inter Quantitatis ſpecies fuerunt annumerata. *Tempus* enim tractat Aſtronomia, (ut & *Motus* cœleſtes quibus menſuratur;) item Chronologia; atq; etiam Gnomonice, Aſtronomiæ principiis ut plurimùm nixa. *Locus* autem in Stereometriâ, quantum ad ejus capacitatem; in Geographiâ verò, quoad ejus ſitum & poſituram, ſpeciali modo conſideratur. *Orationem* tractat Muſica, tam quoad Temporum (ut loquuntur) menſuram; quàm quoad Tonorum elationem, ſuppreſſionem, vel etiam circumflexionem; unde non modo Rhetorum & Poetarum, ſed & Muſicorum, oritur & menſura & modulatio. *Motus* autem & *Pondus* in Mechanicis præſertim conſiderantur.

Quanquam autem hæc omnia in diſciplinis Mathematicis tractentur; non tamen per ſe, & primariò; ſed quatenus vel menſurantur vel numerantur.

Dico igitur Matheſeos Objectum eſſe Quantitatem propriè dictam; Magnitudinem ſcilicet & Multitudinem. Reliqua verò eatenus ad Mathemata pertinent, quatenus (reductivè) ſunt vel Numeri vel Menſuræ capacia: nempe quatenus de illis interrogari poterit, vel *Quot* ſint, vel *Quanta* ſint. Adeóq; ſatis apparet, *Quibus in rebus verſatur Matheſis*; nempe in Quantitate, per ſe; in aliis autem rebus omnibus, quatenus vel quantitatis capaces ſunt, vel ad eam reductivè referantur.

Matheſis, unde dicta.

Si de *Mathematum*, ſive *Matheſeos*, nomine quæratur, *Cur hæc appellatione inſigniantur* illæ diſciplinæ: Ideo fortaſſe fuit, quoniam Mathemata apud multos quidem ſola, apud alios Antiquorum primo ante alias Diſciplinas loco, ediſcebantur: adeóq, κατ' ἐξοχὴν Μαθήματα dicta, quia προτομώτατα.

Atq; hæc de Matheſeos in genere tam Objecto, quàm Appellatione dicta ſunto. Sequitur ut ipſius ſive Species, ſive Partes, ſeorſim conſiderentur.

Matheſeos diſtributio, in Puram & Mixtam.

Sunt autem diſciplinæ Mathematicæ aliæ *Puræ*, aliæ *Mixtæ*. Puras dicimus illas, quæ Quantitatē abſolute conſideratā tractant, prout a Materiâ abſtrahitur. Mixtas autem illas appellamus, in quibus, præter conſiderationem quantitatis, (ſive Multitudo illa fuerit

fuerit, ſive Magnitudo,) etiam ſubjectum, cui ineſt, connotatur.

Verbi gratiâ. Ubi in Arithmeticâ traditur, *Bis duo quatuor efficere*; Numeri hic ſeorſim conſiderantur, & abſtractim ab omni materiâ ſubjectâ. Pariter enim verum eſt, ſive de Hominibus, ſive de Angelis, ſive de aliis quibuſcunq; rebus agatur. Item, ubi in Geometria traditur, *Circuli peripheriam ubiq; a ſuo centro æqualiter diſtare*: hic, præter ipſius circuli conſiderationem, ſubjecti nulla ratio habetur; ſive in cœlis ſit ille circulus, ſive in terris, ſive ubivis aliàs. Adeoq; diſciplinas has, Mathematicas *Puras* dicimus; quia purè de ipſis quantitatibus agunt, non immiſtâ ſubjecti conſideratione.

In aliis ſecus eſt. Verbi gratia: Cùm docet Aſtronomia, *Æquatorem & Zodiacum ſe mutuo in binis punctis ſecare*; & quidem hunc ad illum oblique Inclinari, angulumq; gradum viginti trium cum ſemiſſe (circitèr) conſtituere: videmus hic, præter inſtituta pure Mathematica, multa etiam mere Phyſica immiſceri. Quid ſit *circulus*, & *circulorum interſectio*; quid *obliqua inclinatio*, & *inclinationis angulus*, Mathematica mere ſunt, atq; inde petenda; At, ſolem (Terrámve) hujuſmodi obliquum curſum peragere, eúmq; annuo ſpatio abſolvere, Phyſica ſunt, ex Hiſtoria nempe naturali obſervanda; adhibitis interim Mathematicis tam Principiis quam Inſtrumentis, quò meliùs hujuſmodi obſervatio inſtituatur.

Mathematicas igitur diſciplinas *Puras* dicimus, duas tantùm: nempe *Arithmeticam* & *Geometriam*; quarum illa agit de quantitate Diſcreta, ſive Numero; Hæc autem de Continua, ſive Magnitudine. Sed & ex his, eſt quidem altera magis altera minùs pura; eſt enim Arithmetices ſubjectum purius quiddam & magis abſtractum, quàm ſubjectum Geometriæ; ideóq; ſpeculationes habet magis univerſales, quæ rei Geometricæ pariter ac aliis æquè ſunt applicabiles. Puræ: *Arithmetica*, & *Geometria*.

Reliquas autem omnes *Mixtas* eſſe dicimus; quæ eatenus quidem ſunt Mathematicæ, quatenus in illis occurrit quidpiam vel Arithmeticum, vel Geometricum; quicquid autem inſuper eſt, pro Mathematico non habendum eſt, ſed pro mixtura aliunde allata. Atq; ex his quidem aliæ minùs, aliæ magis Mixtæ ſunt; prout ad Mathematicas puras magis minúſve accedant. Mixtæ.

Inter Mixtas, celeberrima quidem eſt *Aſtronomia*: Quæ men-

ſuram quidem & calculum adhibet, ſed ad Cœleſtia tantùm φαινόμενα ſpeculanda. Corporum nempe cœleſtium magnitudines, diſtantias, motus, variáſq; eorum & quoad nos, & inter ſe, poſituras contemplatur.

Cometographia. Dum autem Phænomena Cœleſtia nomino; ne ipſos quidem *Cometas* eximo; quì in ſublimi conſpiciuntur, & obſervandi rationem, aſtrorum obſervationibus non prorſus abſimilem, videntur poſtulare; quanquam eorum fortaſſe nonnulli ſint ſublunares: *Nonnulli*, inquam; Omnes enim ſublunares eſſe, (prout cenſebant veteres,) neutiquam eſt concedendum; cum id præſentis præteritíq; ſeculi obſervationes manifeſto reclament.

Geographia. Aſtronomiæ ſubjungo *Geographiam*; utpote Aſtronomicis principiis ut plurimum fultam: quæ, præterquam quod ab Aſtronomia mutuatur, non multum habet Mathematicum.

Gnomonice. Utriq; verò (Aſtronomiæ & Geographiæ) *Gnomonicen* ſubjungo, (unde varia Horologia Scioterica, aliáq; inventa confimilia dependent;) & Artem etiam *Nauticam*: quarum utraq; *Ars Nautica.* tam Aſtronomiæ, quam Geographiæ, peritiam poſtulant.

Chronologia. Sed nec *Chronologiam* penitus omittam; quæ Temporis calculum rerum geſtarum hiſtoriis accommodat: quod quò meliùs fiat, τὰ φαινόμενα cœleſtium etiam rationem cumprimis habet; & Eclipſeon præcipuè.

Aſtrologia judiciaria. Futiles autem *Genethliacorum* vanitates, aliáſq; ineptias *Aſtrologiæ Judiciariæ*, prætereundas duco: ut quæ pro frivolis potiùs aut ſuperſtitioſis impoſturis habendæ ſunt, quàm Mathematicis diſciplinis: Ideóq; illarum profeſſionem prudentiſſimus atque Honoratiſſimus Eques Dominus *Henricus Savilius* Profeſſoribus ſuis Mathematicis merito interdicendam curavit.

Geodæſia. Poſt Aſtronomiam autem, eíq; affines diſciplinas, annumeranda eſt *Geodæſia*; cui & totam quidem *Longimetriam*, *Planimetriam*, & *Stereometriam* adjungo: Unde propoſitæ diſtantiæ, anguli, ſuperficies, & corpora ſolida, ſeu (quod perinde eſt) ſpacia ſolidorum capacia, menſurantur: quæ omnia Geometricis principiis peraguntur, particulari ſubjecto applicatis.

Perſpectiva. Sed & *Perſpectiva* tota; tam quæ ſimplicior eſt, lineáſq; ab objectis in directum exeuntes perpendit, ipſiſq; peritioribus Pictoribus uſui eſt; quàm quæ in *Dioptricis* & *Catoptricis*, de lineis refractis & reflexis, traditur; Geometrica ferè tota eſt: quanquam

quam etiam ipſius in Aſtronomia uſus ſit haud exiguus.

Neq; interim *Mechanices* & *Architectonices* obliviſcendum eſt: quarum utraq; (præſertim Mechanica) Geometricas menſuras ita ad molem corpoream applicat, ut & interim Ponderum, Viriúmq; motricium, rationem habeat: Unde utilia multa, & quidem admiranda, perficiuntur. *Mechanice. Architectonice.*

Tandem etiam & *Muſicam* Mathematicis diſciplinis accenſere ſolent; quæ Arithmeticam quandam in Sonis exercet; & proportione quadam peculiari Harmonicos conſentus effingit. *Muſica.*

Atq; hactenus Diſciplinas Mathematicas, tam Puras quàm Mixtas, breviter quidem, ſed quantum præſentis inſtituti ratio poſtulat, enumeravimus. Siquæ ſupereſſe videantur aliæ, poſſunt quidem illæ ad recenſitarum aliquas commodè referri.

CAP. II.

De Geometriâ, & Arithmeticâ ſpeciatim. Earum Definitiones, Objecta, Principia, & Affectiones; Eáſq; verè ſcientias eſſe.

POſt brevem Matheſeos Synopſin, in priori capite exhibitam; reſtat ut eas ſpeciatim ſeligam diſciplinas, quæ muneris noſtri conditio, ipſaq; *Statuta Saviliana*, Profeſſori ſuo Geometrico peculiariter deſtinarunt Adeoq;, mixtis pleriſq; ſepoſitis, de Mathematicis Puris, Arithmetica nempe & Geometria, quædam dicenda reſtant: quarũ utraq; quanquam ſub *Geometrici Profeſſoris* nomine, (cum mixtis aliquot cognatis,) mihi demandatur: Aſtronomia interim, aliiſq; quæ ipſi affines ſunt, Profeſſorum alteri, *Aſtronomico* dicto, (Collegæ meo meritiſſimo,) reſervatis.

Geometriam autem & *Arithmeticam* ſi definire velimus; poteſt quidem illud fieri vel per Objecta, ut in aliis Scientiis Speculativis; vel per Finem, ut in Artibus & Scientiis Practicis non rarò fit. Illud quidem prout contemplationes pure ſpeculativas continent; Hoc autem, prout ad praxin ordinantur. Arithmeticam enim & Geometriam *Practicam* agnoſcimus, non minùs quàm Speculativam; (quamvis hæc quidem dignitate multùm præcedat,) Ut enim datur Geometria Speculativa, eiq; ſubordinata Practica; ſic etiam Arithmetica Speculativa & Practica. *Geometriæ & Arithmeticæ Definitiones.*

Priori modo definitur *Geometria, Scientia Magnitudinis, quate-*

nus est mensurabilis; *Arithmetica* verò, *Scientia Numeri quatenus est numerabilis*. quam utramq; definitionem Scientiarum Objecta, non tantum Materialia, sed et Formalia, continere liquet.

Posteriori verò modo, *Geometriam* dico, *Scientiam bene mensurandi*; *Arithmeticam* autem, *Scientiam bene numerandi*.

An sint Scientiæ.

Quòd illas autem *Scientias* dixerim, non est cur quisquam miretur. Has enim ego, siquas alias, scientias appellandas esse nullus dubito: cùm ego nihil deesse sentiam, quod ad Scientias strictissimo sensu acceptas requiratur. Habent enim Subjecta, Principia, & Affectiones, eaſq; de subjectis, demonstrationibus maxime scientificis, demonstratas.

Subjecta quod attinet Affectionum, seu, quod perinde est, Objecta scientiarum, circa quæ versantur; quæ illa sint jam ostendimus.

Objectum Geometriæ.

Est nempe Objectum Geometriæ, Magnitudo, quatenus est mensurabilis. *Magnitudo* scilicet Objectum Materiale indigitat; *Mensurabilitas* ipsius rationem Formalem denotat, qua Magnitudinis tractatio Mathematica ab eâ differt, quæ in Logica, Physica, aut Metaphysica, occurrit.

Per *Magnitudinem* intelligo, Lineas, Superficies, & Corpora, Mathematice accepta, hoc est, abstracte a Materia; quorum varias affectiones & Proprietates Geometria demonstrat.

Mensurabilitatem vero latissimo quidem sensu acceptam vellem, ut, quicquid ad eorum singulas affectiones & habitudines investigandas & intelligendas attinet, comprehendat.

Objectum Arithmeticæ.

Objectum Arithmetices, *Numerum*, constituo, sive quantitatem discretam, & quidem *quatenus Numerabilem*; quam Numerabilitatem eadem latitudine acceptam vellem, qua Mensurabilitatem Magnitudinis.

Principia Magnitudinis & Numeri.

Principia quod attinet: *Punctum* quidem magnitudinis, *Unitas* autem numeri, principium vulgo perhibetur. Nam ex fluxu Puncti Linea, ex fluxu Lineæ Superficiem, Superficiei vero Corpus oriri traditur: nec quidem inepte. Item ex Unitatibus fieri Numeros, satis liquet; cum numerus vulgo definiatur, unitatum multitudo.

Non minus recte tamen, me judice, diceretur; si Magnitudinis principium, diceremus, (prout hic loci *principii* vox videtur intelligenda) ipsam Extensionem, seu partium extra partes positionem: mensurabilitatem nempe ab extensione originem ducere

ducere, res ipsa clamat: Numeri vero principium duceremus, ab illa rerum modificatione, qua quid Unum esse aut multa, vel etiam qua quid Idem esse aut diversum dicitur; prout enim ab Identitate (si ita loqui liceat) oritur unitas, ita & a rerum Diversitate, Numerum oriri, seu pluralitatem, satis patet.

Sed & ipsa Unitas, non incommode, Numerorum catalogo accenseri possit; quamvis vulgo haud ita reputetur. Adeoq; ut Quantitas continua, seu magnitudo, totum illud continet, quo affirmative respondetur quæstioni *Quantum* quid sit, seu *quã Magnum*: ita numerus de illo omni dicatur, quo quæstioni *Quot sunt*, affirmative respondetur. Certum est, Arithmeticam eodem prorsus modo & unitatem & cæteros numeros tractare: & quidem apud Grammaticos, *numerus singularis* sine solœcismo dicitur. Sed hac de re deinceps plura dicenda erunt.

Siquis autem hæc, quæ dixi, magnitudinis & numeri Principia, non tam in Mathesi, quam in Metaphysica, tractari suggerat: Neutiquam ego inficias eo. Neq; enim illud omnino Scientiis insolitum est, aut esse debet, ut principia habeant aliunde præmonstrata, vel etiam ipsum subjecti definitionem; modò ipsæ de subjectis affectiones demonstrent.

Affectiones autem varias, tum in Geometria tum in Arithmetica, de magnitudinibus & numeris demonstrari, adeò notum est ut dictu non sit opus: idq; demonstrandi methodo tam certa quidem & evidenti; ut vix alia opus sit Logica, quam connata & naturaliter insitâ, qua sequelæ necessitas intelligatur. *Affectiones.*

Non tamen interim ignarus sum, a Logicis nonnullis (qui tamen, an Mathesin satis intellexerint, nescio,) defectus quosdam etiam Mathematicis Demonstrationibus obtendi, quo minus ad Aristotelicæ demonstrationis, quam *Potissimam* dicunt, dignitatem accedant. Operæ pretium igitur existimo de Mathematicis Demonstrationibus nonnulla subjungere, ut eadem opera disciplinas illas, Arithmeticam putà & Geometriam, scientias esse probem, & ἀποδείξεων naturam simul explicem.

CAP.

CAP. III.

De Demonstrationibus Mathematicis. Unde Mathematicæ vere scientias esse confirmatur.

Demonstratio quid.

DEmonstratio, sive συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς, ille reputatur *Syllogismus, qui affectiones proprias de subjecto per proprias causas demonstrat.* vel, ut fusius apud Aristotelē traditur, *l. 1. post. An. c. 2.* Ἀπόδειξίς ἐστι συλλογισμὸς ἐπιστημονικὸς, οὗ ἀληθῶν, καὶ πρώτων καὶ ἀμέσων, καὶ γνωριμωτέρων, καὶ προτέρων, καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος. Quæ tamen definitio non omni demonstrationi convenire putanda est; sed illi quæ est τοῦ διότι, quæ etiam κυρίως Demonstratio dicitur. Ad Demonstrationem enim τοῦ ὅτι, sufficit argumentum ab effectis ductum. Quod & satis innuit Aristoteles, cum alium *sciendi* modum indigitat, de quo se postea dicturum promittit.

Demonstrationes mathematicæ.

Demonstrationes autem Mathematicas quod attinet; nemo est quem scio, qui de earum vel certitudine vel evidentia, modo recte instituantur, dubitavit; nec qui ullas omnino alias vel certiores vel magis manifestas esse contendit.

In Potissimæ.

Quæritur tamen a nonnullis, An ad illius, quā *Potissimā* dicunt, & ab Aristotele definitā contendunt, Demonstrationis dignitatē assurgant. Et duo potissimū objiciunt, quò minùs id concedatur. Ut videre est apud Smiglecium in Logica sua *Dis. 14. Q. 14.*

An entia mathematica sint tantùm Imaginaria.

Primum est, quòd entia Mathematica, quatenus a Mathematicis considerantur, non omnino existant in rerum natura. Non enim uspiam, inquiunt, reperiuntur Lineæ vel superficies a corporibus abstractæ; nec quidem corpora sphærica, cubica, aliáve regularia; aut trigona, tetragona, circulí, aliæve figuræ planæ, ad amussim Mathematicam exacta: adeoq; vel omnino non esse, vel esse tantum imaginaria, contendunt; ideoq; de illis scientiam esse non posse, cum subjectis tantum imaginariis non possint reales affectiones inesse, nedum de illis demonstrari.

Sed leve omninohoc est, & facile dissipatur. Quod enimde actuali existentia dicitur, omnino πάρεργον est: cum existentia sit tantū singulariū, scientia verò universaliū; & ad hoc, ut aliquid sit objectum scientiæ, sive existat sive non existat perinde est, modò ejusmodi sit, ut (in individuo) existere possit: ut de Rosâ in hyeme dici solet. Quod enim hujusmodi est, potius ens in potentia dicendū est, quam vel non ens, vel ens imaginariū, sive ens rationis.

Lineas

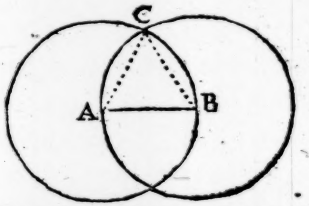
Lineas autem & superficies a corporibus separatas, aut ipsa quidem Mathematica corpora citra materiam Physicam, non existere, (adeo etiam nec existere posse,) omnino verum est. Cùm autem Matheseos objectum ideo imaginarium tantùm esse contendunt: Non levis est hic error. Mathematici namq; lineam vel superficiem vel corpus Mathematicum citra corpus Physicum existere, non magis vel supponunt vel affirmant quam supponit Physicus vel Animal existere quod nec homo sit nec brutum, vel etiam Hominem in genere uspiam reperiri qui non sit vel Plato vel Socrates vel alius aliquis singularis. Non enim negat Mathematicus suas lineas, superficies, & figuras, corpori Physico inesse; sed has tantum perpendit & contemplatur, corpore interim Physico non considerato. Aliud enim est abstrahere, aliud negare: Mathematicus suas quidem magnitudines abstrahit a corpore Physico, non tamen de illo negat: Nec magis asserit Mathematicus quantitatem existere sine corpore Physico; quã Physicus, substantiã corpoream existere sine quantitate: uterq; tamen alteram ab altera abstractam contemplatur. Existunt igitur, saltem existere possunt, non tantum imaginarie sed realiter, entia Mathematica; non quidem per se, sed in corpore Physico; licèt abstracte considerentur. Atq; hæc sufficiant ad illud quod primum objicitur diluendum.

Secundum illud quod oggerunt, majoris quidem momenti est ad rem præsentem, modò verum esset: Nempe quòd demonstrationes Mathematicæ non cõtineant in se veras causas essendi, & consequenter, neq; illam præcipuam necessitatem quæ ex vera & propria causa desumitur.

Instat Smiglecius, (in disputatione citata) inter alia, in prima demonstratione Euclidis; ubi, inquit, *demonstratur triangulum esse æquilaterum, ex eo quod sit constructum inter duos circulos, habeatq; omnia sua latera a centro ab circumferentiam.*

Ut autem melius intelligatur argumentum, Euclidis demonstrationem aliquanto fusius explicabimus. Proponitur ille hoc problema solvendum, *super datam rectam finitam* (puta A B,) *triangulum æquilaterũ constituere.* Quod ut fiat jubet ut *centro* A, *intervallo* A B, *describatur circulus* B C; *item centro* B, *intervallo* B A, *describatur circulus* A C; *& a puncto* C, *in quo circuli se mutuo secant, ducantur ad puncta* A B, *rectæ* C A, C B. His peractis, demonstrat Euclides *constructum triangulum* A B C *esse æquilaterum*; quia nempe *tres rectæ* C A, A B, B C, *sunt inter se æquales.* (Quæ certe est

demonſtratio a vera & proxima cauſa: Nam niſi æqualitas laterum ſit vera immediata cauſa cur figura conſtructa eſt æquilatera, quænam ea vera cauſa ſit non poſſum ego vel conjectu-



ra aſſequi.) Æqualitas autem laterum CA, AB, BC, demonſtratur, eo quod CA, AB, *ſunt radii circuli* B C, *ideoq; æquales*; *item* BA, BC, *radii circuli* AC *ideoq; æquales*: *cum igitur tam* CA *quam* CB *æquatur rectæ* A B, *ſunt tres rectæ* C A, AB, BC, *inter ſe æquales*. Eſtq; hæc demonſtratio Euclidea.

Verum in hac demonſtratione, inquit Smiglecius, "Nemo "non videt, non aſſignari veram cauſam eſſendi; non enim "triangulum idcirco eſt æquilaterum quia eſt inter duos circu-"los conſtructum; nam etiamſi non eſſet inter duos circulos "conſtructum adhuc eſſet æquilaterum: Unde talis cauſa eſt accidentalis tali proprietati.

Cui ego multa regero.

1° Dico, quod, utut illud verum eſſet quod affirmatur, nempe demonſtrationes Mathematicas non per veram & proximã cauſam procedere; ſunt tamen ſatis ſcientificæ, ſi vel per cauſã remotiorem vel per effectũ, vel per aliud aliquod medium ab alio argumentandi loco deductum procedant, modò certò concludant rem ita eſſe prout affirmatur, atq; aliter eſſe non poſſe. Sufficit enim ad hoc, ut demonſtratio ſit ſcientifica, *ſi procedat per medium neceſſarium ex natura rei*: ut & ipſi quidem, qui hoc objiciunt, non negant, & *Smiglecius* etiam directè affirmat, *Diſp.* 15. *qu.* 1. *& alibi*. Quare nec ipſe, nec quos ſcio, alii, negabunt, Diſciplinas purè Mathematicas ſcientias eſſe, utut perfectiſſimum illis demonſtrandi modum non concedant.

2° Notandum eſt, quod ipſi, qui negant has demonſtrationes perfectas eſſe, in ratione demonſtrationis (ut loquuntur) *Potiſſimæ*, dubitant, an uſpiam aliàs occurrat in aliis ſcientiis ejuſmodi

ejuſmodi Potiſſima demonſtratio: ut apud *Smiglecium* videre eſt, quæſtione priùs citatâ.

3° Euclidis demonſtratio, non igitur concludit Triangulum ABC æquilaterum eſſe, eo quod *inter duos circulos conſtructum ſit*, (ut *Smiglecio* videtur;) ſed quod *latera* CA, AB, BC, *ſint inter ſe æqualia* ut ex progreſſu demonſtrationis patet. Illud autem, de duobus circulis in conſtructione adhibitis, ſubſervit tantum æqualitati laterum demonſtrandæ.

4° Notandum eſt Euclidem loco citato, non tam veritatem Theorematis, quam conſtructionem problematis, demonſtrare. Non enim ſimpliciter Probaturus erat, *Triangulum* ABC *eſſe æquilaterum*; ſed *Triangulum, eo, quo imperatum erat, modo conſtructum, eſſe æquilaterum*; ſeu Hypotheticam hanc propoſitionem, *ſi Triangulum ſic conſtruatur, erit æquilaterum*, veram eſſe. Jam vero, quanquam aliunde fortaſſe conſtare poſſit veritas conſequentis, nempe *Triangulum* ABC *eſſe æquilaterum*; veritas tamen conſequentiæ (*nempe illud ex conſtructione ſequi*;) non aliunde probatur, neq; ex alia cauſa magis immediata dependit, quam ex ipſa conſtructione: nempe quia cõſtructor ſic procedendo acceperat æquales circulorum radios. Ex vera igitur propria & immediatâ cauſâ demonſtravit Euclides *conſtructionem problematis*. quamvis igitur, *Triangulum illud æquilaterum eſſe*, demonſtrare videtur per cauſam vel remotâ vel accidentalem; At certe *conſtructionem illam problemati ſatisfacere*, (quod erat Euclidi demonſtrandum) per veram, proximam, & immediatam cauſam demonſtratur.

5° Etiam addendum eſt, in nulla quidem ſcientia expectandum eſſe, ut omnes ibidem demonſtrationes æquali perfectionis gradu procedant. Abundè ſufficit, ſi demonſtrationes aliquæ ſint per veras & proximas cauſas, ideoq; τῷ διότι. quanquã demonſtrationibus illis τῷ διότι, paſſim immiſceantur aliæ τῷ ὅτι. Ut in ſcientiis omnibus abundè liquet.

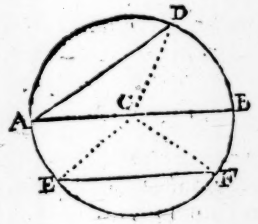
6° Igitur concedo, ſi non demonſtrationem propoſitam, at ſaltem alias non paucas, in matheſi paſſim occurrentes, procedere, non tam a cauſis proximis & immediatis, quam ab allis locis Topicis; adeoq; demonſtrationes eſſe τῷ ὅτι, non διότι.

7° Nego tamen, in omnibus demonſtrationibus Mathematicis illud obtinere. Multas enim a veris & proximis cauſis procedere, adeoq; demonſtrationes eſſe τῷ διότι, contendo. Ideoq; *Smiglecii* enumeratio demonſtrationum, quas eſſe τῷ

ὅτι contendit, utut vera esset, non tamen est sufficiens enumeratio, cum occurrant aliæ non paucæ, quas esse τοῦ διότι liquet.

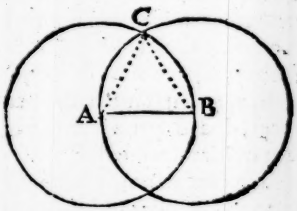
8° Igitur ut rem totam dilucidius expediam, tres præsertim demonstrationum Mathematicarum sive modos, sive gradus, sive species statuo.

Prima quidem est illa demonstratio, quæ per *deductionem ad absurdum*, seu impossibile, procedit; ἐπαγωγὴ dicta: quæ, rem ita esse, demonstrat, eo quod sit impossibile, ut secus sit. Ut siquis demonstraturus, *Rectarum circulo inscriptarum, longissimam illam esse quæ per centrum transit*; illud ita esse asserat, quoniam impossibile est aliam quamvis, per centrum non transeuntem, vel longiorem esse, vel quidem æqualem. Supponatur enim, si fieri possit, recta A D ἀδιάμετρος, per centrum non transiens, diametro A B, per centrum C transeunti, æqualis, vel etiam ipsa longior: & ducatur, a centro C, recta C D. Dico rectam C D æqualem esse rectæ C B, quoniam utraq; est recta a centro ad circumferentiam ejusdem circuli; ideóq; A C D, (ex duabus rectis A C, C D composita,) erit æqualis diametro A C B, (quoniam si æqualibus æqualia addantur, tota erunt æqualia;) si igitur A D sit æqualis ipsi A B, erit etiam æqualis ipsis A C, C D, simul sumptis, (nam quæ eidem vel æqualibus æquantur, etiam inter se æquantur;) si A D longior sit ipsa A B, erit & longior, quam A C, C D, simul sumptis, (quibus ipsa A B æqualis est;) At horum utrumq; absurdum est & impossibile. Cum enim A D sit recta, quæ inter data puncta brevissima est, & quidem unica; impossibile est ut vel longior sit, vel etiam æqualis, ipsis A C, C D, simul sumptis, quæ non nisi per circuitum quendam a puncto A ad punctum D procedunt. Non est igitur recta A D, vel æqualis vel major quam est A B. Sed & eadem omnino demonstratio procederet, si ubivis aliàs recta non per centrum ducta inscribatur, puta E F: si enim E F sit major vel æqualis ipsi A B, erit proinde major vel æqualis E C, C F, simul sumptis; quoniam E C radius



dius æquatur radio A C, & C F radius æquatur radio C B; ergo tota A C, C B, (hoc eſt, A B,) æquatur toti E C, C F: At impoſſibile eſt ut recta E F vel æquet vel ſuperet rectas E C, C F ſimul ſumptas, (cum recta ſit breviſſima inter data puncta,) ergo etiam impoſſibile eſt ut vel æquet vel ſuperet rectam A B (ipſis E C, C F, ſimul ſumptis æqualem.) Cum igitur impoſſibile ſit ut A D, vel E F, vel alia quævis recta non per centrum, æquet aut ſuperet rectam A B (vel aliam quamlibet per centrum ductam:) ſequitur, Rectarum circulo inſcriptarum, quæ per centrum tranſit eſſe longiſſimam. Quod erat demonſtrandum. Demonſtratur autem, ut patet, deductione ad impoſſibile.

Secunda demonſtrandi ratio, eſt, *Oſtenſiva τῦ ὅτι.* Ut, ſi *recta*



A C demonſtretur *æqualis eſſe rectæ* B C; quoniam utraq; demonſtrata fuerat æqualis ipſi A B: quæ autem eidem ſunt æqualia, ſunt & æqualia inter ſe. Eſtq; hæc demonſtratio quidem oſtenſiva, ſed tantum *τῦ ὅτι*, non autem *τῦ διότι*. Communis enim utriuſq; æquatio eidem tertiæ, indicat quidem earum æqualitatem inter ſe, non autem illius cauſa eſt. Eſſent enim ipſæ A C, B C, ſibi invicem æquales, etiamſi ipſa A B non fuiſſet ducta.

Tertia vero demonſtrandi ratio, quæ & omnium perfectiſſima, eſt *Oſtenſiva τῦ διότι.* Quæ demonſtrat & *quod* ſit, & *quare* ſit. Ejuſmodi eſt demonſtratio, ſiquis *Radios omnes ejuſdem circuli æquales eſſe* inde demonſtret, quod definiatur circulus (ſaltem definiri poſſit) *Figura plana, unicâ lineâ curvâ contenta, quæ a medio comprehenſi ſpatii æqualiter ubiq; diſtat.* Si enim circuli eſſentia poſtulet, ut ipſius peripheria æqualiter a centro diſtet; immediate ſequitur, tanquam a cauſa vera & proxima, radios omnes, quibus illa diſtantia menſuratur, etiam æquales

esse. Estq; demonstratio hæc Ostensiva τῦ ὅτι, a causa proxima & immediata desumpta

Si vero objiciat Smiglecius, causam hanc non veram & proximam essendi causam esse, sed accidentalem tantum, quia radii illi, puta, CA, CB, CD, CE, CF, &c. essent lineæ æquales, etiamsi circulus ille neutiquam duceretur. Respondeo; Verum esse, quod essent quidem Rectæ æquales, etiamsi nulla figura fuisset ducta; non tamen essent æquales Radii: ut enim radii sint, necesse est ut ab alicujus figuræ centro ad perimetrū ducantur: Ut autē radii illi, & omnes ejusdem figuræ alii invicem æquales sint, requiritur ut perimeter istius figuræ æqualiter a centro distet. Estq; hæc, æqualis undiquaq; distantia circūferentiæ a centro, vera quidē, necessaria, proxima, & immediata causa hujus affectionis, nempe, ipsius radios omnes æquales esse. Sunt igitur demonstrationes Mathematicæ, quanquam non omnes, aliquæ saltem, non modò scientificæ, sed & τῦ ὅτι.

Siquis deniq; objiciat, me tres demonstrationis species fecisse, cùm vulgò duæ tantū statuantur; nempe τῦ ὅτι & τῦ διότι. Poterit ille si placet, duarū priorū utramq; demonstrationem τῦ ὅτι, dicere; illam quidem per deductionm ad impossibile, hanc vero ostensivam; tertiam deniq; demonstrationem τῦ διότι. Non enim libet de verbis contendere, modo de rebus constet.

Atq; hæc sufficiat de Demonstrationibus Mathematicis dixisse; ut & propositæ definitiones vindicentur, & ipsa demonstrandi methodus indigitetur. Restat deinceps ut ipsam Arithmeticam aggrediar.

CAP. IV.

Unitatis & Numeri definitiones. Quo sensu Unum negatur esse numerus. Tam Unum quam Nullum, vario sensu, Principium Numeri. Unum est Numerus minimus. Nullum non est numerus. Numeri fracti, non sunt veri numeri.

Arithmeticæ derivatio & Definitio.

ARithmetica, ἀπὸ τῦ ἀριθμῦ dicta, ab ipso objecto nomen sortita est. Est enim, *Scientia numeri, quatenus est numerabilis*, vel *scientia bene numerandi*, ut supra declaratum est.

Numeri vero principium *unitas* dicitur.

Unitas autem est, *secundum quam unumquodq; Unum dicitur: Numerus autem*

autem ex unitatibus composita multitudo. Sic enim Euclides, *lib.7. de.* 1, 2. Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ὃ ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται. Ἀριθμὸς δέ, τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. *Unitatis & Numeri definitiones.*

Ex his autem Unitatis & Numeri definitionibus, pleriq; arbitrantur unitatem numerorũ catalogo non accensendã, adeoq; numerum minimum Binarium esse; quanquam illud quidem Euclidem uspiam dixisse non memini. *An Unitas sit Numerus.*

Miror tamen eousq; hanc sententiam invaluisse, cum non minus Unitas, quam Binarius numerus, aut quivis alius, respondeat quæstioni *Quot sunt.*

Hac autem de re, erat mihi quidem in animo, litem neutiquam movere; cum illa controversia Logica potius seu Metaphysica, quam Mathematica, videri possit; saltem obiter monuisse, non modo *Unum* sed & *Nullum*, apud Arithmeticos eodem omnino modo ac reliquos numeros tractari, adeoq; apud illos (quicquid de Metaphysicis dicendum sit) vel pro Numeris, vel quasi numeris reputari. Operæ tamen pretium fortassis erit paucis ostendere, cur unitatem putem vere numerum esse, aliisq; numeris annumerandam.

Nec huic forsan advertabitur Euclidis aliorumq; sententia probe intellecta. Cum enim nonnulli Unitatem, propriè loquendo, non modò Numerum esse negent, sed & numeri partẽ; adeoq; *numeri principium impars* esse dicant, ut est Magnitudinis *Punctum*, & Temporis *Momentum*: Intelligendi fortasse sunt de Monade seu unitate, non ut numerum singularem designat, sed ut est communis quasi numerorum omnium Denominatio, sive denominator. Sic enim numerus Quaternarius est, qui quatuor unitates numerat, Ternarius qui tres, Binarius qui duas & Singularis pariter qui unam quidem Unitatem designat. Secus enim non video quo modo vere dici posset, unitatem non esse numeri alicujus partem: cum certum sit, *Unum* non minus esse *Duorum* dimidium, quam *Duo* medietatem esse τῶν *Quatuor*. Dum igitur *Quatuor* dico tantundem valere ac *quatuor unitates*; vox illa *unitates* nec numerus est, nec pars numeri, sed vel numeri denominatio seu denominator, vel ipsum numeratum. Vox autem *Quatuor* est earum unitatum numerus. Ita cum *Unum* tantundem valere dico ac *Unam unitatem* μίαν μονάδα. Vox illa *Unitas* est numeri denominatio, seu numerator; vox autem *Una* numerus est, seu unitatum multitudo *Quo sensu unitas negatur esse numerus.*

titudo, (*multitudinis* nomine laxius accepto, ut post dicetur,) dicit enim *Quot* vel *quam multæ* unitates adesse dicuntur, nimirum unicam.

Aliud autem est negare *Unitatem*, τὴν μονάδα, aliud vero negare τὸ ἓν *Unum*, numerum esse: Eodem enim sensu & ἓν ἀριθμὸς numerus esse negari possit, quamvis ἀριθμὸς numerus esse non negetur: Siquis enim *duas decadas* numeret, erit *Decas* numeri denominatio, *Duo* vero decadum numerus.

Nullitas, principium numeri; eo sensu quo punctum, magnitudinis.

Sed revera, si accurate loqui velimus, non tam unitas quam *Nullitas* (si ita loqui liceat) seu *Nullum*, (non tam μονὰς seu ἑνότης quam ἀδενότης, ἀδένεια, seu τὸ μηδέν,) idem respectu numerorum obtinet, quod Punctum respectu magnitudinis, & Momentum respectu temporis. Ut ex operationibus Arithmeticis cum constructione Geometrica comparatis liquido constare possit penitius intuenti. Unitas vero instar certæ cujusdam lineæ, seu alius magnitudinis, ad arbitrium positæ, ad quam aliarum homogenearum fit comparatio.

Mihi saltem hoc videtur dicendum. Magnitudo respondet quæstioni Πόσον ἐστι. Numerus vero, quæstioni Πόσα ἐστι. Unde tam Numerus quam magnitudo ποσότης non incommode dici potest. Latina vero *Quantitatis* appellatio non tam cōmode videtur (quoad nominis notationem) utriq; applicabilis, cum sola continua Quantitas dicit *Quantum* quid sit; Discreta vero, non *Quantum* quid, sed *Quot* sunt; ac si *Quotitas* potius dicenda est quam quantitas: (sed de nomine non est ut litigemus, dummodo de re constet. Ut autem magnitudo, puta Linea, inchoatur a puncto, quod omnino magnitudinis expers est, & quidem (positive) nihil est, sive nullius magnitudinis: ipsa vero Linea tanta est quanto est ipso sive Puncto sive nihilo major: ita & Numerus, non ab unitate sed revera a nullitate, inchoatus, tantus est, quanto est ipso Nullo major. Et ut *Punctum* puncto additum, sive semel sive centies id fiat, non efficit quantū; nec etiā Linea, vel quivis alio magnitudo, adjectione Puncti, etiā centies repetita, omnino major fit, aut ejus ablatione minor: ita & *Nullum*, sive τὸ μηδέν, μηδένι additum non faciet ἕν, nec numerus adjectione τῷ μηδένι augetur quidquam, aut ipsius ablatione, minuitur.

At interrogabitur forsan, Num velim ego a Veterum pariter

&

& Recentiorum omnium ſententia diſcedere, qui uno ore Unita tm vocant Principium Numeri?

Reſpondeo, 1° Nihil abſurdi eſſe majorum inventis addere; præſertim in Mathematicis. Nec hoc illorũ laudibus quicquam detrahit, nam & illi prioribus addiderunt.

2° Non mihi tamen volupe eſt ab aliis diſcedere, niſi ubi rei neceſſitas & manifeſta ratio ſuadent. Nec enim placet eorum temeraria audacia, qui cum ſe vel tantillum ſcire ſentiunt, aliorum omnium peritiam vel flocci faciunt, vel ſupercilioſe contemnunt: atq; illud potius ſatagunt, ut aliorum, ſive veris ſive fictis, σφάλμασιν inſultent, quam ut eorum vel ſenſa ſatis intelligant, vel probe compertis aſſentianttur. Eſt enim illud vel juvenilis nonnunquam levitatis, cum cognitione plerumq; non niſi mediocri conjunctæ, vel ſupercilioſi aliquando faſtûs indicium; potius quam ſubacti & maturi ingenii argumentum. Nec raro a rebus perperam *intellectis*, potius quam a veris illorum quos culpant erroribus, *hujuſmodi* inſultus ortum ducunt: & ea ipſa quæ culpant, ſi intelligerent, non culparent. Et quidem eorum pars longe major qui veterum ſenſa rejiciunt & flocci faciunt, ipſorum loco vel eadem ipſa quæ culpant, mutata tantum phraſiologia, ſubſtituunt, vel ſaltem non meliora; & in eos non raro errores neſcii incidunt, eoſq; pro novis inventis reputant, quos veteres, ſcientes, declinarunt.

3° Quod ad rem præſentem attinet, aſſero, & veterum ſententiam probe intellectam, & quæ nos aſſerimus, ſatis conſtare poſſe. Ipſa enim *Principii* vox duplici ſaltem acceptatione occurrit: prout nempe ſignificat *Primum quod ſit*, vel *Ultimum quod non*. Ut ſiquis *Motum* ordiri dixerit vel ab *ultimo momento quietis*, vel a *primo momento motus*. Sic ſi hæredis jus in rem hæreditariam *ab ipſo patris interitu*, vel a ſupremo paternæ vitæ momento, dicatur; eſt hoc, principium *Ultimum quod non*: ſupremum enim vitæ paternæ momentum ultimum eſt eorum quibus hæres ſuccedaneus jus non habuit. Si vero dicamus, Hæredis jus inchoari a *primo momento ſucceſſionis*; etiam ita vere dicitur; ſed eſt hoc principium *Primum quod ſit*. (Atq; huc facit diſceptatio illa de termino vitæ ac mortis apud Gellium *l. 6. c. 13.* & apud Auguſt. *de civit. Dei. l. 13. c. 9, 10, 11.*) Pariter de principio

Hujus ſententiæ, cum ſententiis veterũ conciliatio.

numeri dicendum est. si *Primum quod sic* quæratur; *Unitas* assignanda est, ut qui est numerus omnino primus & minimus: Si vero *ultimum quod non*; assignandum est τὸ μηδὲν, sive *Nullum*, ut quæ est numerorum omnium negatio. At de Quantitate continua, seu Magnitudine, si quæratur *Ultimum quod non*; *Punctum* assignamus, quod omnis quidem magnitudinis expers est, cui tamen si vel tantillum accedat, emergit quantum: sin quæratur *Primum quod sic*; illud omnino non est assignabile; non datur enim minimũ quantum, cum omne quantum, qua quantum, sit in infinitum divisibile. Atq; hinc ortum est quod Veteres, principium Numeri designaturi, *Unitatem* posuerint, nempe *Primum quod sic:* Magnitudinis verò principium, *Punctum* dixerint, nempe *ultimum quod non*; quoniam in magnitudine, *Primum quod sic* non est assignabile. Non autem eodem sensu dicitur Unitas pricipium Numeri, quo Punctum principium Magnitudinis; hoc enim sensu, non τὸ *Unum*, sed τὸ *Nullum*, erit numeri principium, nempe *Ultimum quod non.*

Nollem autem ut quisquam me de lanâ caprinâ contendere existimet, dum numeri Principium curiosius inquiro: Insignis enim est hujusce rei utilitas, præsertim in Analytices sive Algebræ speculationibus; quo melius operationis Arithmeticæ cum Geometricis constructionibus congruentia percipiatur: Atq; hinc obscuritas non parva est exorta, quod vera numerorum & magnitudinum comparatio vel non satis fuerit a multis intellecta, vel minus saltem diligenter considerata. Atq; hoc animadverterunt, credo, Dominus Des Cartes, ejusq; ingeniosissimus interpres Dominus a Schoten; illi enim, dum effectiones Geometricas Arithmeticis operationibus adaptant, unitatem non instar Puncti habent, sed ut lineam quandam ad placitum assumptam, reliquosq; deinceps numeros aliis designant lineis, quæ ad lineam assumptam eandem habeant rationem quam expositi numeri ad unitatem. Est autem omnino impossibile, si Unitas instar Puncti habeatur, ut ea quæ par est congruentia inter Arithmeticas & Geometricas operationes conservetur.

Quod unitas sit Numerus.

Ego igitur affirmare non dubito, Principium numeri (eo nempe sensu quo Punctum dicitur Principium Magnitudinis) esse τὸ μηδὲν, sive *Nullum*: *Unitatem* vero, seu potius *Unum* non tam esse principium numeri (sensu quo dictum est) quam primum numerum; est enim vere numerus.

Neq;

Neq; me omnino movet, quod Euclides *Numerum* definiverit τὸ ἐκ μονάδων πλῆθος, *multitudinem unitatum*: Nam τὸ πλῆθος ibidem non strictè sumendum est, prout *Multum* opponitur τῷ *Pauco*, vel τῷ *uni*; sed ut designationem τοῦ *Quot sunt* indigitat. Si enim quæratur, *Quantum est*? respondendum erit de magnitudine; si verò, *Quot sunt*? respondendum erit de multitudine: fieri tamen omnino potest, ut *Unum* respondeatur, quando de multitudine quæritur: *v. g.* si de unici filii parente, quæratur *Quot* filios (seu *quam multos*) habeat? respondendum est *unicum*. Quo sensu verò τὸ *unum* respondet quæstioni *quam multa*: eodem & *unitas*, *multitudo* dici poterit. Si quis vero *multitudinem*, vel τὸ πλῆθος ἀκύρως de unitate dici contendat: Concedo quidem, sed & ἀκύρως de *duobus* dicitur, quæ non multa quidem, sed *Pauca* sunt. Erat autem hæc ἀκυρολογία hîc loci necessaria, quoniam vox κυριωτέρα nec apud Græcos (quantum scio) nec apud Latinos occurrat ulla. Atq; hanc τοῦ πλήθους significationem ideo potius amplectendam existimo, quod Euclides nusquam (quod sciam) unitatem numerum esse neget; sed contrarium potius videatur sentire, dum ipsam unitatem eodem plane modo quo reliquos tractat numeros.

Unum igitur numerum esse affirmo: Est autem numerus omnium *minimus* (& hoc quidem sensu, numeri principium rectè dicitur, quia *primum quod fit*, seu numerus primus:) minimum enim est quod affirmative respondet quæstioni *quam multa*; ideoq; minima multitudo. Unum *est Numerus minimus.*

Verum quidem est quòd & *Nullum* respondeat aliquando quæstioni *Quot* sunt; Ut si quæratur, *Quot* sint Cælorum solidi Orbes? respondebitur non inepte *Nullus*. At non propterea quod τὸ *Nullum* respondeat quæstioni *Quam multa*, ideo & *multitudo* erit; quoniam respondet Negativè. Idem enim est *Nullus* ac *ne ullus*; sic ut *Nemo* idem ac *ne homo*. Est autem *Ullus* vox diminitiva a voce *Unus*: Ut enim dicitur *Puer*, *puerulus*, & (contracte) *puellus*, (extrito enim per Syncopen *v*, fit *puerlus* & ob Euphoniam, *puellus*;) & *Pulcher*, *Pulcherulus*, *Pulchellus* (pro *pulcher'lus*) *Tener*, *Tenerulus*, *Tenellus*: sic *Bonus*, *bonulus*, *bellus*; *Unus*, *unulus*, *ullus*: sic *Vinum*, *Villum*, apud Terrent. *Adel*: Idem igitur est Latinorum *Nullum*, (hoc est, *ne unum*, vel ne *unulum*;) ac Græcorum οὐδὲν & μηδὲν, hoc est, οὐδὲ ἕν, μηδὲ ἕν. & Anglorum *None*, hoc est *not one*, vel *no one*. Non igitur *Nullum*, Nullum *non est numerus.*

sed *Vnum* est numerus primus; cum *Nullum* respondeat Negative: tollit enim subjectum quæstionis; nec tam ostendit, *Quot sunt unitates*, quam *unitatem non esse*: ut, qui dicit, *Nullos* esse orbes, negat orbes esse; orbis enim si quis sit, saltem unus erit.

Numeri fracti, non sunt Numeri proprie dicti.

Siquis autem objiciat, intermedia multa dari inter Unum & Nullum; puta Unciam, Sextantem, Quadrantem, Trientem, Semissem; itē Bessem, Dodrantem; ut & Quincuncem, Septuncem, Decuncem, Undecuncem (sive deuncem) aliásq; ejusmodi partes integri. Ut, si quæratur (instante hora nona) quot horæ post octavam transierint; respondebitur forte, nec unam, nec nullam, sed semihoram præteriisse. Concedo quidem sic responderi posse: Concedo etiam numeros quos *Fractos* vocant, sive *Fractiones*, esse quidem *Vni* & *Nulli* quasi intermedios. Sed addo, quod jam transitur εἰς ἄλλο γένος. respondetur enim non de *Quot*, sed de *Quanto*: Non enim dicitur, *Quot horæ* præterierint; sed, *Quantum horæ*, seu quanta pars horæ; non πόσαι ὧραι, sed πόσον τ' ὥρας, seu ποσμόριον. Pertinet igitur hæc responsio, proprie loquendo, non tam ad quantitatem Discretam, seu numerum, quam ad Continuam; prout hora supponitur esse quid continuum in partes divisibile; quamvis quidem harum partium ad totum ratio numeris exprimatur. quanquam enim non recte dicatur μηδὲν τῆς ὥρας, *nihil horæ*, recte tamen dicitur μηδεμίαν ὥραν, *nullam horam*, transiisse, ne unam quidem. Idem dicendum est de Fractionibus omnibus; verbi gratia, si ($\frac{1}{4}$) tres horæ quadrantes præteriisse, dicatur; intelligitur, tantum horæ præteriisse, quantum est numerus Ternarius (fractionis numerator) ad (ejusdem Denominatorem) quaternarium; seu (quod idem est) supponitur hora (ut quid continuum) in quatuor partes Geometrice secta, harum vero tres tantùm assumtas esse, quæ quidem Arithmetice numerantur. Indicat igitur Fractionis *Denominator* Geometricam integri in membra partitionem, *Numerator* verò talium membrorum indicatorum numerum seu Multitudinem Arithmeticam: adeóq; numerus Fractus non tam Numerus est, quam numerorum ad invicem Ratio. Est igitur *Vnum* Numerus minimus, non autem vel Nullum, vel Numeri Fracti.

CAP.

CAP. V.

Numerorum Procreatio. Numerus Maximus non datur. Numerorum Nomenclatura; & ordinata dispositio, in continuâ proportione decuplâ, apud omnes gentes recepta. Dispositio hæc Gentium distributione antiquior. Unde orta.

CUm Numerorum natura hæc sit, ut unitatum multitudinem designet, seu (quod idem est) ut dicant *Quoties* apponatur Unitas, seu *Quot* Unitates significentur: pro variâ Unitatum multitudine, varias oriri numerorum species, necesse est. quælibet enim Unitatis accessio, numerorum speciem variat.

Si igitur, ubi prius Nulla erat, apponatur Unitas, fit numerus *singularis*: si adhuc addatur Unitas alia, emergit numerus *Binarius*: accedat alia, & exsurgit *Ternarius*: hic autem Unitate auctus fit *Quaternarius*: quem etiam *Quinarius* unitate superat: & hunc *Senarius*: atq; ita deinceps de *Septenario*, *Octonario*, *Novenario*, *Denario*, *Undenario*, *Duodenario*, aliisq; sequentibus dicendum est. Estq; hæc vera numerorum Originatio, seu Procreatio. *Numerorum procreatio.*

1.
2..
3...
4....
5.....
6......
7.......
8........
9.........
10..........
11...........
12............
&c.

Quoniam verò Unitatum accessio in infinitum extendi possit; (nec enim numerus ullus adeo magnus est, quin illi possit Unitas, vel una vel plures, adjungi:) est igitur impossibile, ut *numerus Maximus* assignetur, nedum omnes numeri species. Ideóq; quamvis numeros dari *actu infinitos*, vel etiam *infinitum numerum*, (hoc est, qui terminos non habeat, sed omnes superet limites,) fit impossibile: sunt tamen numeri possibiles Infiniti; hoc est, nullus est omnino terminus numeris assignabilis, quò cum accedit numerus, ulterius augeri non possit. Quamvis igitur numerus *Minimus* assignetur Unitas, non tamen est assignabilis *Maximus numerus non est assignabilis.*

numerus *Maximus*, ut nec Magnitudo vel Maxima, vel quidem Minima.

Cùm tot verò fuerint Numeri ſpecies: infiniti planè laboris videri poſsit, illarum ſingulis diſtincta nomina vel invenire, vel ediſcere, vel memoriâ retinere, & in uſum depromere. Quis enim mortalium tot excogitare valeat vocabula, quod ſingulis arenulis (nequid altius dicam) nomina ſuppeditarent? Quod ſiquis tamen fecerit; etiamnum centies millies labor idem iterandus erit, nec dum quot opus eſt aſſequetur.

Numerorum ordinata diſpoſitio & nomenclatura.

Ne igitur infinitus evadat labor, pro qualibet Unitatis acceſsione nova vocabula cudendi, quibus emergentes numeri appellentur: Excogitavit prudens Antiquorum ſagacitas, vel Divina potiùs monſtravit indulgentia, Methodum (nunquam mirandam ſatis) quâ infinitam hanc numerorum varietatem finitis vocabulis, & quidem paucis, deſignare poſsint; numeros ſcilicet, methodicæ diſpoſitionis ope, per Gradus & Periodos diſtribuendo: adeo ut paucis omnino Vocabulis totam numerorum molem, etiam multa millia excedentem, ſatis diſtinguere valeamus.

Apud Latinos

Decem prioribus minimiſq; ſuum cuiq; nomen indiderunt, adeóq; *Unum, Duo, Tria, Quatuor, Quinq, Sex, Septem, Octo, Novem, Decem*, numerabant.

Deinceps verò non tam Unitates numerabant quam Decadas; viz. *Decadem Unam, Decades Duas, Tres, Quatuor, Quinq, Sex, Septem, Octo, Novem, Decem*; vel (ut contractius loquuntur) *Decem, Viginti, Triginta, Quadraginta, Quinquaginta, Sexaginta, Septuaginta, Octoginta, Nonaginta, Centum*: Idem enim valent *Viginti* ac *Decades Duæ*; *Triginta* idem ac *Decades Tres*; & ſic deinceps. *Centum* verò idem valet ac *Decades Decem*, ſive *Una Centuria*. De horum autem Vocabulorum ratione pòſt dicetur.

Poſtquam autem ad *Centum* perventum eſt, non tam Unitates, aut etiam Decades, quam *Centurias* numerabant, viz. *Centuriam Unam, Centurias Duas, Tres, Quatuor, Quinque, Sex, Septem, Octo, Novem, Decem*; vel, contractè, *Centum, Ducenta, Trecenta, Quadringenta, Quingenta, Sexcenta, Septingenta, Octingenta, Nongenta, Mille*: Idem eſt enim *Ducenta* dicere, ac *Duas Centurias*, *Trecenta* idem ac *Tres Centurias*, &c. idem vero *Mille* ac *Decem Centurias*.

Quum verò ad *Mille* devenitur, ipſa Millia numerantur; nempe *Mille, Bis Mille, Ter Mille*, &c. vel *Mille, Duo Millia, Tria Millia*

Millia, & sic deinceps ad *Decem Millia*, *Centum Millia*, *Millena millia*, *Decies millena millia*, *Centies millena millia*, *Millies millena millia*, *Decies millies millena millia*, & sic deinceps in infinitum.

Si verò inter majores numeros, præter justa Millia, supersint Centuriæ, aut, præter Centurias, etiam aliquot Decades; aut tandem, præter Decades, Unitates aliquot; illæ etiam sunt apponendæ. Ut si proponatur numerus (2345) *Bis mille trecenta quadraginta quinque*; est numerus ille duobus millibus major, tribus verò millibus minor; ideoq; excessus supra *Duo Millia*, adjungendus est, nempe *Trecenta*; nec ita tantùm, sed & *Quadraginta*; & deniq; *Quinque*.

Apud Græcos.

Sic apud Græcos; post numeratos decem priores numeros, Ἕν, Δύο, Τέα, Τέσσερα, Πέντε, Ἕξ, Ἑπτὰ, Ὀκτὼ, Ἐννέα, Δέκα. numerantur deinde Decades, Εἴκοσι, Τειάκοντα, Τεσσεράκοντα, Πεντήκοντα, Ἑξήκοντα, Ἑβδομήκοντα, Ὀγδήκοντα, Ἐννεήκοντα, Ἑκατον, ubi diversi Monadum numeri, terminationibus tantùm variati, tot Decades significant; prout apud Latinos *Triginta*, *quadraginta*, &c. in quibus terminatio *ginta* idem valet quod Græcorum κοντα, mutato nempe κ in g (literam ejusdem organi) quod tamen redit nonnunquam in derivatis, nam promiscue dicimus *Vigesimus* & *Vicesimus*, item *Trigesimus* & *Triceſimus*. Deinde Διακόσια, Τειακόσια, Τεσσερακόσια, Πεντακόσια, Ἑξακόσια, Ἑπτακόσια, Ὀκτακόσια, Ἐννακόσια, *ducenta*, *trecenta*, *quadringenta*, *quingenta*, *ſexcenta*, *ſeptingenta*, *octingenta*, *non genta*. Ubi Græca vocabula Διακόσια, Τειακόσια, &c. a Monadum numeris, δύο, τέα, &c. seu δὶς, τρὶς, &c. cum voce Ἑκατον compositis derivantur: ut Latinorum *Ducenta*, *Trecenta*, &c. a vocibus *duo*, *tria*, &c. cum voce *Centum* compositis. Quæ sequuntur verò Chiliadum nomina χίλια, Δισχίλια, Τεισχίλια, &c. respondent Latinorum numeris *Mille*, *Bis Mille*, *Ter Mille*, &c. donec deventum est ad Μύρια, δισμύρια, &c. *Decem Millia*, *Viginti Millia*, & sic deinceps.

Apud Hebræos

Apud Hebræos etiam non dispar ratio est. Nam post Monadum numeros אחד שנים שלש ארבע חמש שש שבע שמנה תשע עשר *Unum*, *duo*, *tria*, *quatuor*, *quinque*, *ſex*, *ſeptem*, *octo*, *novem*, *decem*; sequuntur, עשרים שלשים ארבעים חמשים ששים שבעים שמנים תשעים מאה *Viginti*, *triginta*, *quadraginta*, *quinquaginta*, *ſexaginta*, *ſeptuaginta*, *octoginta*, *nonaginta*, *Centum*: deinde מאתים *ducenta*, שלשה מאות *trecenta*, ארבעה מאות *quadringinta*, &c. usq;

usq; ad אלף *mille*, אלפים *bis mille* שלשה אלפים *ter mille*, & sic deinceps ad רבבה *decem millia*, & quæ sequuntur.

Numeri autem intermedii, tam apud Græcos & Hebræos, quam Latinos, ex aliorum compositione nomina mutuantur, ut אחד עשרה שנים עשרה שלשה עשרה ἕνδεκα, δώδεκα, τρισκαίδεκα, &c. *Undecim, duodecim, tredecim, quatuordecim, &c.* sic εἴκοσι ἕν, εἴκοσι δύο, εἴκοσι τρία, &c. *Viginti unum, viginti duo, viginti tria*, &c. sic διακόσια τεσσαράκοντα πέντε, *ducenta triginta quatuor*; δισχίλια τετρακόσια πεντηκοντα πέντε, *bis mille trecenta quadraginta quinque*; aliaq; numerorum nomina composita. Atq; eodem omnino modo etiam in aliis linguis usu est.

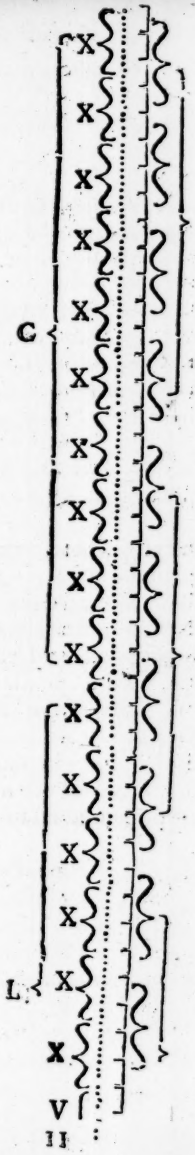
Sufficiunt igitur pauciſſima vocabula exprimendis Numeris quasi infinitis. Hæ enim duodecim voces, *Unum, duo, tria, quatuor, quinque, sex, septem, octo, novem, decem, centum, mille*, cum earum conjugatis, sufficiunt numeris omnibus exprimendis.

Ut autem hæc numerorum ordinatio facilius percipiatur; ponatur series Punctorum quantum libet longa; singulæ verò punctorum decades seorsim notentur, totidem uncinis distinctæ, quarum quælibet X notetur: Decem vero hujusmodi decades conjunctæ constituunt Centuriam, quam indicat litera C; & (si eousq; extenderetur series) decem centuriæ colligatæ constituerent Mille. Multo autem facilius esset singula Millia, vel etiam singulas centurias, aut Decades numerare, quam singulas unitates: faciliusq; multo mente concipitur ejusmodi multitudo, ita in Decades et Centurias distributa, quam dum totidem puncta indiscriminatim & confuse apponuntur. Nec multo secus se res habet in Tacticis, ubi militum ordinata distributio consideratur: Nam distributis militibus in varias Legiones, Cohortes, Quaterniones, aliasq; ejusmodi partes, partiumq; particulas & membra; facile est iis omnibus ab Imperatore mandata tradi: sin promiscua turba seu multitudine ἀτάκτως confundantur; impossible est ut omnes imperia vel persentiscant vel exsequantur. Atq; hactenus de numerorum constitutione & Ordinatione, prout vulgo apud omnes usurpantur.

Duo autem hic in genere monenda existimo; & duo itidem inde observanda.

Quamvis alia quævis proportio adhiberi posset.

Monitorum primum hoc est; Quod quamvis (ut patet) Numeri vulgo proportione decupla distribuantur; ita nempe ut decem Unitates in una Decade colligantur, decem item Decades



des in una centuria, ut & centuriæ decem in una Chiliade, & sic deinceps; Potuisset tamen alia quævis proportio adhiberi; puta quadrupla, quintupla, sextupla, aut quævis alia. Ita series punctorum modo proposita, quæ ex uno latere distribuitur juxta proportionem decuplam, in decades, & centurias, seu decadum decades; adeoq; continet unam centuriam, & sex insuper Decades, septemq; Unitates: eadem ex alio latere proportione quadrupla distribuitur, in Quaterniones, eorumq; quadrupla, & ipsa itidem quadruplata; adeoq; continet duos Quaterniones quaternionũ quadruplicatorũ, & insuper duos Quaterniones quadruplicatos, cum uno etiam Quaternione simplici, tribusq; unitatibus.

Et revera, alia nonnunquam proportio aliquibus in rebus usurpatur. Sic enim in fractionibus (ut vocantur) Astronomicis, sive Sexagenariis; 60 minuta quarta constituunt unũ minutum tertiũ; 60 minuta tertia unũ secundũ; 60 secunda unũ minutũ primũ; & totidẽ minuta prima, unũ gradũ, proportione continua sexagecupla. Sic, apud Hebræos: annus quisq; septimus erat Sabbaticus; Sabbaticorũ vero quisq; septimus erat Jubilæus: adeoq; anni septẽ constituunt unã annorum Hebdomadem, & septem hebdomades unam periodum Jubilaicam, sunt enim septies septem (seu septem hebdomades) quadraginta novem. Dicetur forsan, quod Jubilæus, non quadragesimus nonus, sed quinquagesimus annus erat. Fateor quidem annum quingesimum Jubilæo destinatum, sed inclusive, Jubilæo

nempe utrinq; posito in computum admisso: eo scilicet modo quo ludi Olympici quolibet anno quinto dicuntur celebrari (nempe inclusive) cum tamen Olympias sit revera spatium quatuor annorum, ut notum est.

Hoc autem maxime perspicuum est in operationibus Algebraicis; ubi Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, aliæq; (ut loquuntur) deinceps potestates, juxta quamlibet proportionē proponuntur. Est autem ille progressus potestatum non nisi graduum in certa ratione progressus. Ut in ratione decupla, erit Decas, *Radix*; centuria, *Quadratum*; Mille, *Cubus*; Decies mille *Quadrati-quadratum*, & sic deinceps. In sexagecupla proportione, si minutum Quartum ut *Unitas* ponatur, erit minutum tertium *Radix*, minutum secundum *Quadratum*, minutum primum *Cubus*, Gradus vero *Quadrati-quadratum*; & sic deinceps. In proportione septupla si Unitas Annum designet, erit *Septennium* (seu annorum Hebdomas) *Radix*, Periodus Jubilaica *Quadratum*, &c. Atq; idem accidit in qualibet proportione assumpta. Qua de re plura post dicenda erunt.

Decupla tamen omnes utsi sunt

Alterum eorum quæ monenda duxi, hoc est; Quod quamvis Numeros licuerit qualibet proportione disposuisse; tamen, quod mirum dictu est, in eadem proportione Decupla omnes ubiq; terrarum gentes mire conspirant. Nescio enim an ulla unquam natio reperta fuerit, quæ numeros proportione Decupla non disposuit. Sic enim Hebræi, Græci, Latini, hodierni Indi, Barbari omnes, etiam ipsi Americani. Licet enim aliis aliquando proportionibus, aliquibus in rebus usi fuerint, (prout in ponderum Scrupulis, Granis, Unciis, Libris; item in nummorum Denariis, Solidis, Libris, &c.) Numerorum tamen universalis dispositio proportione decupla semper, quod sciam, & ubiq; obtinuit.

Hæc Numerorum dispositio, ipsarum Gentium distributione antiquior.

Hinc duo mihi videntur serio observanda, ut quæ manifesto inde consequuntur; quæ nemo, credo, qui rem paulo intimius pensitaverit, omnino dubitare poterit. 1° Gentes omnes ab eadē origine ortas esse, & quasi ex eodem trunco in varios ramos divisas. 2° Hanc numerorum peritiam & dispositionem illâ Gentiū distributione antiquiorem esse. Impossibile enim omnino videtur, & plane incredibile, ut omnes omnino ubiq; terrarum Gentes vel fortuito quidem, vel etiā ex pacto, in eandē proportionem incidissent, nisi ab eodem fonte communi quadam traditione

ditione derivaſſent. Secus enim cur eandem potius numerorum diſpoſitionem, quam eandem numerorum, ponderum, aut menſurarum, rationem obtinerent; nemo facile dixerit: in his autem quam inſignis ubiq; & fere infinita ſit varietas nemo neſcit.

Qua vero de cauſa proportionem Decuplam in diſponendis numeris elegerint veteres (primi nempe numerorum diſpoſitores,) potius quam aliam quamvis, cum potuiſſent ad libitum quamlibet aliam adhibuiſſe; non niſi conjecturâ valemus aſſequi, tanquam in re omni memoria antiquiori. Si autem conjecturæ locus ſit, nulla mihi potior occurrit ratio, quam quod propter Digitorum numerum illud fecerint. Sicut enim Menſurandi rationem ab ipſo corpore humano deſumptam eſſe conſtet (inde nempe deſumptæ ſunt menſuræ plurimæ, ut Digitus, Pollex, Palmus, Spithama, Pes, Cubitus, Ulna, Paſſus, Orgyia, &c.) inde & Numerandi pariter rationem deſumptam eſſe, pluſquam eſt probabile. Ideoq; cum ſingulis digitis totidem Unitates numeraſſent, neceſſe eſt, ut, poſt integram decadem, denuo ab Unitate incipiant, progrediendo ad ſecundæ decadis terminum; & ſic deinceps; poſt quamlibet finitam decadem, denuo ad unitatem redeundo. *Unde deſumpta.*

Atq; hactenus Numerorum Conſtitutionem, ex Unitatibus; & eorum in proportione decupla Diſpoſitionem, per Decadas, Centurias, & Millia, tradidimus. Sequitur ut eorundem Nominum, ſaltem apud Latinos, Etymologiam, & eorum Notationem ſive Scriptionem explicemus, adeóq; tam Appellandi quam Deſcribendi rationem.

CAP. VI.

Latina Numerorum Nomina à Græcis derivantur. Alia quam plurimæ Etymologiæ paſſim immiſceatur.

NUmerorum Nomina quod attinet, eorúmq; Etymologiam; non eſt ut in omnibus linguis illud proſequar. *Numerorum Nomina.*

Nomina numerorum apud Hebræos, ſunt, ni fallor, (vel omnia, vel pleraq; ſaltem,) purè Primitiva, & ad placitum *Hebræa.*

impoſita; adeo ut in illorum originem inquirere ſupervacaneum ſit.

Græca. Atq; idem ferè de Græcis dicendum eſt: vel enim ea lingua purè Primitiva eſt, nec aliunde derivata, (præter vocabula nonnulla ab Hebræis & Arabibus mutuata,) vel ſaltem, ſi fuerint olim linguæ unde deſcenderat, illæ nunc penitus ignorantur; adeo ut ubi ad Græcam originem deventum ſit, non licebit ulterius progredi. Affirmat quidem *Plato* in *Cratilo* Græcos a Barbaris vocabula multa accepiſſe: at quænam illa fuerint, ut & a quibus mutuata, non nobis erit adeo facile inveſtigatu.

Latina. Latina verò numerorum Nomina omnia, a Græcis fuiſſe deſumpta, ego omnino exiſtimo; quanquam eorum aliquot ab eorum origine adeo videantur remota, ut ægrius agnoſcantur. Nos a facilioribus exorſi reliqua ſuo ordine attingemus.

Octo. *Octo* dicitur a Græcorum ὀκτώ. Hinc vero *octavus* (ὄγδοος) *octies, octonus, octonarius*, &c.

Duo. Ambo. *Duo* a Græcorum δύο dicitur; ſicut & *Ambo*, ab ἄμφω dicitur. (Inde vero noſtrum *two*, ſicut a *Tribus, ſex, ſeptem, octo*, noſtra *Three, ſix, ſeven, eight*; & a *Noveni, Deni*, noſtra *nine, ten*; Niſi potiùs antiquos Teutones, unde nos illa accepimus, hæc omnia immediate a Græcis, dicamus accepiſſe: at *Four* & *Five*, tam a Græcis quàm Latinis remotiùs abſunt.)

Bis. Latinum *Bis* a Græcorum Δὶς derivatur, converſo δ in B; ſicut *Bellum, Bellatores* dicimus, quod olim *Duellum, duellatores* ſcribebant: (forte tamen a Græco πόλεμος dictum eſt *bellum*.) ſic *Duonus, duellus* dicebant priſci, pro quibus nos *Bonus*, *bellus*: ſic *Bes, beſſis*, olim *Des, deßis*. videndi Varro & Scaliger ad Varr: & Feſt. atq; Merul. ad Ennium.

Bini, binarius, bifarius. A *Bis* vero *Bini* dicitur, & *Binarius*, & *Biſarius*, quaſi *Bi-varius*: vel forſan *Bifarius, Trifarius*, &c. quaſi διφάσιος, τειφάσιος: mutato σ in r, ut in χθές, χθεσὶ, *heri*; χυμὸς *humor*, πέσσον *porrum*.

Viginti. Sed & *Viginti* (quaſi *Biginti*, vel *Biſginti*) terminatione a Græcorum κοντα deſumptâ. Quæ enim Latini *Triginta, Quadraginta*, &c dicunt, Græci τειάκοντα, τεσσαράκοντα, &c. efferunt.

Sed & ipſum εἴκοσι Græcè, quaſi Ἴκοσι dictum puto; ipſamq; terminationem κοσι (in εἴκοσι) tantundem valere ac κοντα in ſequentibus. Nam quòd terminatio ſit iſtic ι, hic α, non major eſt diſcrepantia, quàm cùm Latine dicamus *Viginti*, at *Triginta*. quod illic autem reperiatur σ, hic τ, omnino hoc exiguum eſt, cum

cum hæ literæ sint facillimè commutabiles, (ut ab ἀνύτω, fit Futurum, ἀνύσω, item ὀρύττω & ὀρύσσω promiscuè dicuntur, aliáq; ejusmodi infinita; & quidem εἴκοσι Doricè εἴκατι dicitur; sic *Aquam* Germani *Wasser* dicunt, Angli & Belgæ *Water*, aliáq; sunt innumera.) *N* verò, in terminatione κοντα, non Radicale est, sed Epentheticum, ideóq; in Derivatis excidit; eodem enim prorsus modo ab εἴκοσι formatur εἴκοστὸς, ac a τριάκοντα τριακοστός. Sic a Latinorum *Triginta* formatur *Trigesimus*; amisso *n*, & *t* in *s* converso, ut ῥητίνη *resina*, πτύω, Æol. σπύω *spuo*, πτερνίζω *sperno*, & Angl. *spurn. meto messis*. Ut igitur pro *nt* in *Triginta*, substituitur sola litera *s* in *Trigesimus*; sic pro ντ in terminatione κοντα, substituitur simplex σ in terminatione κοσι. Sic a λέοντι, τιθέντι, &c. formantur λέ σι, τιθεῖσι, &c. Sic pro εἰσὶ, τύπτουσι, &c. dicunt Dores ἐντὶ, τύπτοντι, &c.

Leviculum autem est illud, quod Latinorum terminatio *ginta* per *g* scribitur, Græcorum verò κοντα per κ, earum enim literarum facillima est commutatio, cùm sint ejusdem organi; Imo ab iisdem vocibus *Viginti*, *Triginta*, promiscue dicimus *Vigesimus*, *Trigesimus*, & *Vicesimus*, *Tricesimus*, (ut supra dictum est,) item *Viceni*, *Triceni*. Sic Græcè Γαῖος dicitur qui Latino *Caius*; & contra, a Græcis κυβερνάω, κύκνος, fiunt Latina *guberno*, *cygnus*, aliáq; ejusmodi non pauca passim occurrunt. Neq; omnino mirum est literas *C* & *G* promiscuè usurpari; quod quidem facile fieri potest, cùm literarum *C* & *G*, recte pronunciatarum, (nempe ut Græcorum κ & γ) sonus admodum affinis est. Quamvis enim literæ istæ *C* & *G* alios habent nunc dierum sonos ante vocales *E* & *I*, quàm ante *A*, *O*, *V*; illud tamen antiquitùs obtinuisse neutiquam est credibile. Nulla enim ratio videtur cur *Accipio*, *Accentus*, &c. pro *Adcipio*, *Adcentus*, &c. scriberentur; nisi ut sonus literæ D transeat in sonum sequentis consonæ, (ut cùm *corripio*, *collimo*, *commuto*, *arripio*, *assumo*, *allicio*, *appono*, *attendo*, *affundo*, &c. efferuntur pro *conripio*, *conlimo*, &c.) ideóq; si *C* ut *S* sonaretur, potius *Ascipio*, *Ascentus*, &c. scribendum esset, ut in *Assciscо*, *Asscendo*, &c. Atq; idem dicendum de litera *G*, propter voces *Agger*, *Aggestum*, *Suggero*, *Suggestum*, &c. nam certe *Adger*, *Adgestum*, &c. mollius sonarent si, *G* debeat eo sono proferri, quo nos nunc dierum efferimus literã *G* ante *E* & *I*, vel *Azger*, *Azgestum*, &c. si Gallorum more efferenda sit. Nam mollior (qui dicitur) sonus literæ *G*, magnã habet apud nos affinitatẽ cũ

ſono literæ *D*, & literæ Z apud Gallos, imo ſonũ hunc in ſe continet. Nam verbi gratiâ, vox *Jupiter*, quam Germani ſonant *Yupiter*, Angli *Dyupiter*, Galli *Zyupiter* pronunciant.

Ut autem a *Bis* fiat *Viginti* (mutatâ literâ *B* in *V*,) non mirum eſt, cum *V* conſona, prout nunc dierum efferri ſolet, non aliter a *B* differat, quam *F* vel *Ph* a *P*, ſeu φ a π, hoc eſt, ut litera aſpirata a ſuâ tenui. Nam ſi literas P, B, pronunciaturis ſpiritus interceptus permittatur erumpere, formabitur illic F, hic V; * (prout nempe F & V nunc efferimus.) Imo eadem litera Græca βῆτα, ab aliis *Beta*, ab aliis (ſatis quidem barbare) *Vita* dicitur; hinc ſ & *v* in MSS. Græcis ſæpiſſime ſine confunduntur: & Hiſpani fere promiſcue, tam ſcribunt quam efferunt *b* & *v*: earumq; literarum affinitas maxima nemini non innoteſcit. Hinc a Græcorum βούλομαι fit Latinum *volo*; ab Hebræorum דוד fit Græcum Δαβὶδ, unde iterum Latinorum *David* & *Davides*, Anglorum *David*, Cambrorum *Dafid* & *Dewy*: A Latinorum *liber* & *libra* fit Gallorum *livre*; a *faber*, *febris*, &c. fiunt Gallorum *feve*, *fevre*, &c. Item a Latinorum *libero*, *cooperio*, *habeo*, *recipio*, &c. fiunt Anglorum *deliver*, *cover*, *have*, *receive*, &c. aliáq; innumera paſſim obſervanda ſunt; ut non mirum ſit *B* in *V* commutari. Monet tamen ex Salmaſio Gatakerus (quod nec mihi diſplicet) deduci poſſe *Viginti* a Dorico εἴκατι, pro εἴκοσι: præfixo Æolico Digamma, ut in Ἰτέα *Vitex*, ἴτος *vitus*, rotæ canthus, &c. unde Heſychio Γιτέα, ἰτέα: Γέαρ, ἔαρ (ver:) Γία, ἄνθη (violæ utiq;) κ in g permutato ut in κώβιος *gobius*, κύκνος cygnus: n inſerto, ut in τόκα *tunc*, νίφω *ningo*, λείπω *linquo*.

* *Vid. Tractatum* de Loquela, *quam meæ* Grammaticæ linguæ Anglicanæ *præfixi*.

Ut autem a *Bis* fit *Viginti*, ſic a *Tribus*, *Quatuor*, &c. vel *Ter*, *Quater*, &c. fiunt *Triginta*, *Quadraginta*, &c. terminatione ubiq; a Græcorum κοντα deductâ. Pariter apud Anglos, *Twenty*, *Thirty*, (ſeu, ut loquuntur *Scoti Threety*) *Forty*, &c. a *Twaine*, *Three*, *Four*, &c. deſcendunt, additâ terminatione *ty* a voce *Ten*, ut videtur, deſumpta. Sed progrediendum eſt.

Triginta &c.

Tres. *Tres* idem eſt Latine ac τρεῖς Græce: Atq; hinc *ter*, *ternio*, *ternus*, *ternarius*, *tertius*. &c.

Decem. A Græcorum Δέκα Latinorum *Decem* deſumptum eſſe nemo dubitat, terminatione α in *em* mutatâ. A *Decem* vero formantur *Decimus*, *Decies*, *Deni*, (quaſi *Deceni*,) *Denarius*. &c.

Sex. *Septem.* Sic ab Ἕξ, Ἕπτα, formantur *Sex*, *Septem*; ſpiritu aſpero in *s* converſo. Quod facile fieri poſſe, ab aliis derivatis abunde liquet

quet. Dicimus enim ab ὖς *ſus*, ab ὑπὸ *ſub*, ab ὑπὲρ *ſuper*, & *ſupra*, (at in *up* & *upper*, inde fortaſſe deductis, *s* iterum excidit,) ſic ab ἕρπω *ſerpo*, ab ἑρμῆς (vel εἰρμὸς); *ſermo* ſic ab εἴρω (dico) *ſero*, *ſerui*, eo ſenſu quo dicitur *ſerere ſermones*, & *vario ſermone ſerebant*. Virgil. h. e. *loquebantur*: atq; hinc *diſſero diſſerui*: Et ab εἴρω (necto) fit *ſero* (hoc eſt *jungo*) unde *ſertum*, *deſero*, *conſero*: (At *ſero*, *ſevi*, hoc eſt, *ſemino*, a σπείρω dicitur.) ſic ἄλλος *ſalio*, ἓ *ſe*, ἑὸς *ſuus*, ὅλος *ſolus*, ἥλιος *ſol*, ἅλς *ſal*, unde & σάλος *ſalum*; ſic ὕλη *ſylva*; ab ἅμα vel ὁμῦ fit *ſimul*; ſic ὅμοιος *ſimilis*, (ubi terminatio *lis* ſervilis eſt, ut in *facilis*, *humilis*, &c.) ab ἵζω, ἵζω, ἵστημι, *ſedeo*, *ſiſto*; ab ἕπω *ſequor*; ſic ab ὕπατος *ſummus*, (mutato τος in *mus*, hoc eſt, terminatione ſuperlativi Græci in terminationem ſuperlativi Latini; & *p* in *m*, euphoniæ gratia, nempe pro *ſupmus*, *ſummus*, ut ab ὕπνος *ſomnus* & *ſopor*,) ſic ab ἥμισυ *ſemis*, & pro ἡμι in compoſitis Græcis fit *ſemi* in compoſitis Latinis, ut ἡμικύκλιον *ſemicirculus*: Sed & pro ſpiritu leni nonnunquam ſubſtituitur *s*; ut ab εἰμὶ *ſum*, (quod ab εἰμὶ deſcendere aliis perſonis magis liquet, cum enim ab ἔις, ἔϛι, ἐσὶ, dicimus *es*, *eſt*, *eſtis*, cur non ab εἰμὶ, ἐσμὲν, εἰσὶ, vel Dor. ἐμμὶ, ἔιμες, ἐντὶ, *ſum*, *ſumus*, *ſunt*.) ſic ἐὰν ἢ, ἐὰν *ſin*, (hoc eſt, *ſi vero* ἐαν δὲ, at *ſin* pro *ſi non*, ex *ſi* & *ne* componitur.) Et ante conſonas non raro præfigitur ſ; ut a γράφω *ſcribo*, a γλάφω, γλύφω, *ſcalpo*, *ſculpo*, (tanquam a γάλφω & γύλφω, metatheſi literæ λ, ut cum pro κράτος & κράτηρ dicimus κάρηϛ & κάρτηρ) quanquam & ipſa γράφω, γλάφω, γλύφω, ab Hebræo כרה *exarare*, deſumpta videntur, mutato (in poſterioribus) ר in ל: cui affine eſt כתב *ſcribere*. Sed de his ſatis. A *ſex* autem & *ſeptem* fiunt *ſexies*, *ſextus* (quaſi ab ἕξ) *ſenus* (quaſi *ſexenus*) *ſenio*, *ſenarius*, &c. Item *ſepties*, *ſeptimus* (ut ἕβδομος) *ſeptenus*, *ſeptenarius*, &c.

A Græcorum Ἕις, ἓν, ἑνὸς, fit Latinorum *Unus*; mutato ε in *u*; quod ipſum non raro fit. (Atq; hinc *Unicus*, & *ullus*, quaſi *unulus*, & *nullus*, quaſi *ne ullus*, ut ſupra dictum eſt.) Sic ἑὸς, *ſuus*; σὸς, τεὸς, *tuus*; σκόπελος, *ſcopulus*; νεφέλη, *nebula*; a φλέγω fiunt φλὲξ, φλογὸς, & *fulgeo*; ab ἀμέλγω, ἀμελγὴ, & *mulgeo*, ab ἀμέργω, ἀμοργὴ, *amurca*; a μείλιχος vel μειλίσσω, *mulceo*; a μέλι, *mel* & *muſſum*; ασφενδόνη, *funda*.

Aut potius dici poſſit *Unus* quaſi contracte pro *Venus* vel *Wenus* aut *Venus*; Nempe pro ſpiritu aſpero vocis ἓν, ſubſtituta conſona *V*; quæ olim (non raro ſaltem, ſi non ſemper) mollius

efferebatur

efferebatur ut noſtrum *W*; (quanquam Priſciani tempore duriorem ſonum adepta fuerat, quem & nunc dierum apud pleroſq; retinet;) quod ex derivatis non paucis liquet; eſt enim apud nos *Vinum*, wine; *Via*, a way; *Veni*, went; *Volo*, *vellem*, will, would; *volvo*, wallow; *ventus*, wind; *vellus*, wooll; *veſpa*, a Waſp; &c. Sive autem dicat quis voces noſtrates illas a Latinis, vel potius tam noſtras quam Latinas ab antiqua lingua Teutonica deſumptas, (quæ quidem cum Latina poterit de antiquitate contendere,) perinde omnino eſt; utcunq; enim, affines illos fuiſſe ſonos non eſt dubium. Sic pro *Valens*, *Valerius*, ſcribebant Græci ϝαλὴς, ϝαλέριος, & a Græco ϝαὶ fit Latinum *Væ*, & Anglicum *Wo*, vel (prout dicebant veteres, & etiamnum dicunt Boreales) *wea*.

Ut autem pro ſpiritu aſpero præponatur *V*, hoc eſt, ut pro *Henos*, dicatur *Venus*, *Venus*, ſeu *Wenus*, facile concedi poteſt; ſic enim ab ἑστία dicitur *Veſta*, ab ἕσπερος *Veſper*; imo etiam pro ſpiritu leni; dicitur enim ab ἕδω (quod ipſum a יד) *video*; ab ἐδὼς, *veſtis*; ab ἔδω, *eſca* & *veſcor*; ab οἶνος, *vinum*; ab ἔντερον, *venter*; ab ἴς, *vis*, (niſi forſan a βία,) ab ἔαρ vel ἦρ, *ver*; ab ἴον, *viola*: Sed & non raro interſeritur *V*; dicitur enim ab ὄϊον, *ovum*; ab ὄϊς, *ovis*; a βοῦς βοὸς, *bos*, *bovis*; a ναῦς νεὸς, *navis*; a παῦλον, *paulum*, *parum*, *parvum*; ab αἰὼν ævum, (unde etiam noſtrum *aye*, & *age*, nam y & g ſunt apud nos literæ admodum affines, & ſæpiſſime commutabiles;) ſic a νέω, *novi*; ab ὄγδοος, *octavus*; a νέος, *novus*; & ab ἐννέα, *novem*: ſic Ἰέρνα, *Hiverna*, *Hibernia*, *Ireland*.

Ideo autem *Unum*, tanquam ex *Venum* contractum judico, (potius quàm immediate ab ἑνὸς, mutato *e* in *u*, quia prima ſyllaba longa eſt, quæ, ſi immediate fieret ex ε, potius eſſet brevis. Forſan dici poterit *Unum* ex ὂ ἓν (per craſin) contractum fieri.

Hinc autem et *Bonum* dici facilè conjicio, quaſi ὂ ἓν, *quod unum eſt*. Platonici enim omnes formalem rationem *Boni* in *Unitate* collocant, unde factum eſt quòd *Unum* & *Bonum converti* dicimus. Nam ſi ex ὂ ἓν *Hoënum*, vel *Venum* dicatur, &, præfixo *F* Æolico, *Foënum*; digamma illud facile in B migrabit, ut fiat *Boënum*, unde & *Boënè*, et (extritis inde *e*, hinc *o*) *Bonum* et *Bene*, unde et *bellus* pro *bonulus*, vel *benulus* vel *boenulus*. Atq; hinc forſan evenit; quòd, *bonum* et *benè* quamvis ſint conjugata, in altero *o*, in altero verò *e* maneat. Sic *forem* et *fore* dicimus, pro *fuerem* et *fuere*,

ab

ab antiquo *fuo*, *fui*, quod a Græco φύω descendit. Ex *F* autem fieri posse *B*, vel inde liquet, quod *Bubulcus* et *Bubsequa* dicitur, pro Bovisequa, a Græco βοῦς βοὸς, Æolice βοϜος.

Ne quem verò terreat in *Bonum* & *Bene*, syllaba prima brevis, quam exspectarent potiùs longam futuram si ab ὁ ἕν contracta dicatur: Sciendum est regulam illam, *syllabas contractione factas longas esse*, non ubiq; valere; quod, ne longiùs abeam, in ipsis *forem*, & *fore*, ex *fuerem* & *fuere* ab antiquo *fuo* contractione factis, est extra dubium; sic in *sit* pro *siet*, & multis aliis.

Quod quidem quò rectiùs intelligatur, notandum est, contractionem duplici modo fieri; nempe vel θλίψει, vel κράσει. Hoc quidem, quando duarum syllabarum vocales in unam sive vocalem sive diphthongum coeunt, & quidem vel mutatæ vel immutatæ, (nisi malis illam κράσιν, hanc συναίρεσιν appellare) ut (apud Græcos) τείχεϊ τείχει, τείχεος, τείχυς, τείχεα τείχη, &c. Et syllaba sic contracta semper evadit longa. Illud autem, quando, nullâ vocalium coalitione factâ, altera planè expulsa, reliqua intacta manet, ut in ἐμαυτοῦ, σαυτοῦ, &c. sic in σφῶε, σφὲ, σφῶιν σφίν· & multis aliis; vel etiam ubi diphthongi vocalis altera expellitur manente reliqua, ut in Doricis τύπτες, τύπτε, τύπτεν, &c. pro τύπτεις, τύπτει, τύπτειν, & multis aliis. Et quoties hoc evenit, vocalis ea quæ superest eandem quam priùs habuit retinet quantitatem, nempe si priùs longa fuerit, longa manet, sin brevis fuerit, manet adhuc brevis, nec propter contractionem producitur. Sic apud Homerum

Iliad. ω. v. 88. Ὄρσο Θέτι· καλέει ζεὺς --
Odyss: η. v. 342. Ὄρσο κέων ὦ ξεῖνε ——
} pro Ὄρσεο

Et Il. ε. v. 109. Ὄρσεο πέπον Καπανηϊάδη. ----

Aliquando autem vix aliud superest indicium an κράσει an θλίψει fiat contractio, quam ex quantitate vocalis quæ superest, ut βόαε, βόα; ubi duæ vocales breves αε in unam longam α coalescunt; adeoq; si α etiam prius ante contractionem fuisset longa, perinde fere esset sive per κράσιν sive per θλίψιν contractionem fieri diceremus, saltem nisi aliorum verborum analogia eorum alterum potius suaderet.

Quod autem Græcis familiare est, illud & Latinis non raro usu venit: præsertim in verbis tertiæ & quartæ conjugationis in *io* terminatis, ut *cupio*, *fugio*, *audio*, *nescio*, *&c.* Cum enim ad formam tertiæ conjugationis (*Lego*, *legis*, *legit*, *legimus*, *legitis*,

legunt, legebam, legam, lege, legito, legerem, legere, &c.) dicendum esset verbi gratia, *cupio, cupiis, cupiit, cupiimus, cupiitis, cupiunt, cupiebam, cupiam, cupie, cupiito, cupierē, cupiere, cupiendi, cupiens, &c.* dicimus tamen contractius *cupis, cupit, cupimus, cupitis, cupe, cupito, cuperem, cupere, &c.* nempe per συλλῆψιν prioris vocalis, reliquâ suam quantitatem retinente; at *cupio, cupiunt, cupiebam, cupiam, cupiendi, cupiens,* &c. omnino incontracte: & similiter in iis omnibus quæ, etiam post contractionem, reputantur adhuc tertiæ conjugationis. In reliquis autem quæ ad quartam conjugationem referuntur, (quanquam & ea omnia sint revera non nisi verba tertiæ conjugationis contracta,) per κρᾶσιν plerumq; fit contractio nempe *audîs, audîmus, audîtis, audî, audîto, audîrem, audîre, &c.* duabus nempe vocalibus brevibus *ii*, vel *ie* per κρᾶσιν in unam longam *î* coalescentibus; at *audit* (ultima brevi) per συλλῆψιν prioris *i*, reliquâ suam quantitatem brevem retinente; item *audio, audiunt, audiebam, audiam, audiendi, audiens, &c.* incontracte: et similiter in aliis verbis conjugationis quartæ. Verum et hic suam libertatem exercent Poetæ. Nam verbi gratia, *Nescis* apud Ovidium habet ultimam brevem, quasi συλλῆψιν passum non κρᾶσιν; et contra *Nescit* apud Juvenalem habet ultimam longam, quasi per κρᾶσιν fiat contractio, non per συλλῆψιν. Atq; idem accidit in *abit, obit, perit, redit, it, nescit, petit, &c.* quæ apud poetas ultimam habent longam; imo & *abiit, periit, rediit, subiit*, pro *abivit, perivit, redivit, subivit*, ultimam habent longam, nempe *v* consona prius in *u* vocalem transeunte (quod aliquando fit, ut *evoluisse* pro *evolvisse* apud Ovidium & *Sylua* pro *Sylvæ* apud Horatium, &c. uti notavit Cl. Gatakerus in tractatu suo de Bivocalibus,) & deinde facta crasi duarum vocalium *ui* in *i* longam. (Exempla si quis petat, ne longus sim, apud Smetium quærat; in suo quævis ordine.)

His adjungere licet *potitur* apud *Virgilium*, & *Ovidium* (probatos authores) penultima correpta, quasi συλλῆψιν non κρᾶσιν (uti in similibus fieri solet) passum.

Ovid. *Mors videt hanc, visamq; cupit, potiturq; cupita.*

Virg. *Vi* potitur; *quid non mortalia pectora cogis.*

Sic *potiretur, potiturus, nequitur* &c. de quibus vide Smetium.

Secunda conjugatio Verborum, est forma contracta tertiæ.

Quod autē de conjugatione quarta dictum est, & de secunda fere intelligendum erit. Nam verba conjugationis secundæ vix aliter differunt a verbis tertiæ, quam quod in plerisq; temporibus

poribus (intellige quæ a præsenti formantur, non item quæ a præterito) perpetuam fere patiantur crasin, nempe vocalis *e* cum sequenti, in *e* longum, puta *doces*, *docebam*, &c. pro *doceis*, *doceebam*, &c. excepta tertia persona præsentis Indicativi, ubi pro *doceit* fit per θλίψιν *docet*, ultima brevi. Sed & hic suam libertatem exercent Poetæ, nam *vide* apud Persium & Catonem, & *cave* apud Horatium, ultimam habent brevem, (quod notant Lubinus & Farnabius, ad Persii Sat. 1. vers. 108.) sed & *vale* apud Ovidium, (& ejusmodi fortassis alibi occurrant alia,) quasi per θλίψιν fieret contractio: sed & *fervere*, penultima brevi legitur, quanquam a *ferveo*, quasi ex *ferveere* non κρᾶσει sed θλίψει fieret.

Pari modo, ubi pro *possiem*, *possies*, *possiet*, *possiemus*, *possietis*, *possient*, (ex *siem*, *sies*, *siet*, &c. prout olim scribebant, compositis) dicimus contractius *possim*, *possis*, &c. duo illa *possim*, *possint*, perinde est sive per thlipsin sive per crasin contracta dicas; at *possimus*, *possitis*, per crasin, propter vocalem longam; *possit* per thlipsin, propter ultimam brevem; contra vero *sit* ex *siet* contractum, quasi per crasin non per thlipsin, ultimam productam habet apud Lucretium.

Deterior sit ut forma muliercula ametur.

Possis indifferenter nunc per hanc nunc per illam; habet enim apud Horatium ultimam longam, apud Juvenalem ultimam brevem, quasi ille per crasin, hic per thlipsin contraxerat. Utriusq; exemplum apud Smetium extat (librum pædagogis satis notum) hoc autem eò potius moneo, quoniam audivi non ita pridem D. *Prideaux ium* μακαείτην (virum omnigena eruditione refertissimum) immeritò a quodam taxatum, quasi metri leges violasset, cum vocem *possis* ultima correpta in carmine usurpasset, quod tamen non nisi veterum exemplo fretus fecerat. Et quidem Grammaticalis illa regula, cui nixus ille hanc protulit censuram, nempe quod Ultimam longam habeant *secundæ personæ singulares verborum in* is, *quorum secundæ plurales desinunt in* ĭtis *penultimâ producta*, non sine grano salis admittenda est, nec quidem Grãmatici omnes eam ita universaliter pronunciant, quod quibus vacat facile collatis Grammaticis reperiant. Verum quidem est, quod Syllabæ illæ longæ *esse possint*, & non raro *sint*, non autem vel necessario vel semper producendæ: cum veterum Poetarum

Possis, ultima ancipiti.

authoritâs (quæ hîc ſuprema lex eſt) ſæpiſſime in contrarium eat. Exempli gratia.

Ovid. Neſcî *an excedant etiam loca, venimus illuc.*
Juven. *Tam jejuna fames, cum* poſsîs *honeſtius illic.*
Perſ. ——— *nec te* quæſiveris *extra.*
Horat. *Integer eſt animi, ne* dixeris, *ergo abi parve,*
Juven. *Accipit Endromidem ſi* dixeris *æſtuo, ſudat.*
Virg. *Verum ubi ductores acie* revocaveris *ambos.*
Juven. *Græculus eſuriens ad cœlum* juſſeris *ibit.*

Et ſimiliter in aliis accidere, cui hæc non ſufficiunt exempla, invenire poterit ſi Smetium conſulat ad voces, *concluſeris, curtaveris, guſtaveris, juveris, oraveris, piaveris, poſſederis, ſpectaveris, ſpreveris, teſtaveris, verſeris, viceris, videris*, &c. Et quidem non modo in tempore Præterito modi ſubjunctivi, (ubi volunt Grammatici ſecundas perſonas plurales penultimam ancipitem habere,) ſed & in tempore futuro, (cujus ſecundæ plurales penultimam ſemper habent longam, uti iidem tradunt Grammatici,) ultima ſecundæ ſingularis ut plurimum corripitur (contra quam docet allegata regula) & non niſi raro admodum (extra poſitionem) producta legitur. Si quando autem dubium ſit an vox ejuſmodi ad tempus præteritum an ad futurum referenda ſit; at ſaltem ubi ſenſu imperativo uſurpatur, ad futurum certo certius referendum erit (non enim jubemus præterita ſed futura) atq; etiam ubi Hypothetice aliquid aſſeritur ſub conditione rei adhuc futuræ. Sed de his hactenus.

Summa huc redit, ſi ab ὁ ἓν vel Fοεν deducatur Latinum *Bonum* & *Bone*, & contractius (per thalipſin alterius vocalis) *Bonum* et *Bene*, erit nihilominus utrobiq; prima brevis.

Ab eodem autem themate Ἓν, formantur *ſemel*, *ſingulus*, & *ſimplus*, item *ſimplex* (quod non dicitur, ut vult *Scaliger*, quaſi *ſine plicâ*.) Nam eodem modo quo ab ἅμα vel ὁμῦ fit *ſimul*, (præfixo *s* pro ſpiritu aſpero, & adjuncto ſervili *l* finali:) ſic, ab ἓν, *ſemel*, *v* interim in *m* converſo, (niſi potius ab ἁμὸς dictum putemus, quod Jonicè pro ἓς uſurpatur.) At *ſemel* & *ſimplex* ejuſdem eſſe originis, nemo dubitabit; cum ſyllaba *plex* ſit manifeſto adventitia, ut in *duplex, triplex*, &c. ut et *plus* in *ſimplus, duplus, triplus*, &c. quibus reſpondent Græcorum ἁπλῦς, διπλῦς, &c. Non enim ἁπλῦς dicitur vel ab α στερητικῷ, vel ab α ὀπτατικῷ, ſed vel quaſi ἀμπλῦς, ab ἁμὸς *unus*, vel ab α μόνωσιν ſignificante, ſeu *ſingularitatem*, ut vult Euſtathius; ut in ἀμάζων, ἀδελφὸς, ἀγαθὸς,

Semel. *Simplex.* *Simplus.*

ἀγάστωρ, ἀγάλακτος, ἄκοιτις, ἄλοχος, ἀτάλαντος, ἀκόλουθος, &c. Atq; huc facit quæ habet Eustathius, dum exponit ἀγάστωρ, ὁμογάστριος: ἄλοχος (quæ et ἄκοιτις) ὁμόλεκτρος: Quid enim aliud est ὁμογάστριος, ὁμόλεκτρος, quam qui *communi* (hoc est, *uno eodemq;*) ventre feruntur, aut lecto concumbunt. Nam *communionis* notio, etiam *Unitatis* seu potius *Identitatis* notionem includit. Sic et ἅπαξ, ἅπας, et forte ἀμὸς, et hinc ἅμα, ὁμὸς, ὁμοῦ, ὅμοιος, ut et οὐδαμῶς, μηδαμῶς, quasi *nullies*. Terminatio verò πλους, vel est a πέλω, ut Eustathio videtur, vel est paragogica, ut vult Etymologicus. His autem *singulum* et *singularem* cognata esse patet: quæ ab ἑνικὸς dicta videntur, ut φρίκη *frigus*, πέφρικα *frigeo*, πύκτης *pugil*, κόμμι *gummi*, κυβερνάω *guberno*. Sed et *sincerus* etiam dicitur ab ἓν et κεράω seu κεράννυμι *misceo*; quod ipsum et ἀκέραιον significare putarem (non tam ab α στηρητικῷ quam ab α μόνωσιν significante;) ut id nempe significent quod ex planè Homogeneis conflatur, et non ex varia mixtura: nec quidem magis distant voces ἀκέραιος *sincerus*, quàm ἀριστερὸς *sinister*, (ubi ρ in *n*, ut in ἔρως *Venus*, ἑσπερία *Hispania*, sic ἔρρικος *Henricus*, quod nos *Henry*, et *Harry* dicimus.) *Sincerum* autem quasi *sine cærâ* dictum esse (quod Scaligero videtur) mihi neutiquam placet; partim quod ipsa præpositio *sine* in compositione nusquam occurrat, (sed ipsius forsan loco nonnunquam præpositio inseparabilis *se*, ut *securus* quasi *sine cura*, vel *seorsim a cura*;) partim etiam quod hæc omnia *simplex*, *simplus*, *singulus*, *singularis*, *semel*, *simul*, *similis*, *sincerus*, cognatæ tam significationis quàm originis esse nemo meritò dubitare possit, in omnibus nempe *Unitas* quædam seu *singularitas*, sive, quod tantundem valet, *communitas* quædam seu *Identitas*, indigitatur: At qui *sincerum* dictum putant quasi *sine cerâ*, et *simplex* quasi *sine plica*, non ipsi tamen dicerent, credo, *singulum* dici quasi *sine gulâ*, aut *simplum* quasi *sine pilo* vel *polo*, aut etiam vocibus *semel*, *simul*, *similis*, ejusmodi nugatorias derivationes affigerent. Sed progrediendum est ad ea quæ sequuntur.

Singulus.

Sincerus.

Ab ἐννέα dicitur *novem*, ut a νέος *novus*, (ut supra dictum est,) terminatione item mutata ab α in *em*, ut a δέκα *decem*; ε item seu syllaba ἐν a principio pereunte, quod etiam in aliis Derivatis (præsertim ubi ex una lingua in aliam transitur) non raro fit. Sic, ab *expendo* dicimus *spend*, et ab *extraneus* fit Gallicũ *estrange*, et nostrũ *strange*: ab *Hospitale*, fit Ital. *spedale*, et Anglicũ *spittle*, quod et *Hospital* et *Hostel* dicimus, nempe, Xenodochium: sic ab *Episcopus* dicimus *Bishop*: ita ἐρεύγω ructo, ἐρετμὸς remus, ἐρεύθος rubor, ἐρυθρὸν

Novem.

Ῥδὸν *rubrum*, ἐρωτῶ, *rogo*; sic ab ἀμέλγω, *mulgeo*, et noſtrum *milk*; ab ἁμαλὸς, μαλὸς, *mollis*; ab ὀτρύνω vel ὀτρύω, *trudo*; ab ἐμὸς *meus*, ab ἀσπάραγος, *aſparagus*, *ſparagus*; ab ἀστὴρ, *aſter* & *ſtella* (quaſi *aſterula*:) ab ἀμάω, ἄμητος, ἀμητὴρ, fiunt *meto*, *meſſis*, *meſſor*; pro ἀμαυρὸς *obſcurus*, ἀμαυρόω, *obſcuro*, *infuſco*, dicuntur per Aphæreſin μαυρὸς, μαυρόω, unde Latinorum *Maurus* & *Mauritania*; a γάλα γάλακτος (quaſi a γάλαξ) *lac lactis*; a צרין צרק, *dixi*, δίκαιος: a σφενδόνη, *funda*; ſic apud ipſos Græcos dicuntur promiſcuè γαῖα & αἶα, item ἐμοῦ, ἐμοῖ, ἐμὲ, & μοῦ, μοὶ, μὲ, item πᾶς, & ἅπας, ſic σάχυς & ἄσταχυς; γαῦρος, & ἀγαυὸς *ſuperbus*, & alia multa; ſic ὅς & ἕος, αὑτῆς & ἑαυτῆς, κεῖνος et ἐκεῖνος, μαλὸς et ἁμαλὸς, ſic γαστέρες ἀργαὶ (*Tit.* 1. 12.) pro γαστέρες μαργαὶ, hoc eſt γαστίμαργοι *gulones*: Atq; apud Ionas & Poetas augmenti & reduplicationis rejectionem ſæpiſſimè fieri nemo neſcit, ut cum πίπτω et βλήμενος dicunt pro ἔπτωκα et βεβλημένος. A *novem* autem fiunt *nonus*, quaſi *novenus*, item *nonies*, *noviés*, & *novenarius*, &c.

Centum. Ab ἑκατὸν fit *centum*: dempto a capite ε, (ut ἐννέα *novem*) & Epentheticè inſerto *n*.

Hujuſmodi autem Epentheſis literæ N, vel M, (prout ſequens conſona palatina fuerit aut labialis) eſt frequentiſſima. A κῆπος fit *campus*; a סָדִין *ſindon*; a לַפִּיד *lampas*, *lampadis*, & quidem λάμπω: & pro Hebræo Dages notiſſimum eſt Chaldæos & Syros ſæpiſſimè ſubſtituere literam *Nun*, (non modo ubi Dages eſt abſentis *Nun* vicarius, ſed & alibi.) Sic etiam ſive a תוֹף ſive a τύπτω fit τύμπανον *tympanum*: ſic a φάω, φαίνω, & φαντασία: a τάω, τείνω, & *tendo*; a πίλω, *tundo*; a σπείδω, σπένδω: ab ἄχος, ἄχνυμι, *ango*, & *angor*, *angoris*; quod Angli *ake* & *ach* dicunt: ab ἔχις *anguis*, (ubi & χ in g tranſit, ut ἔγχελυς *anguilla*, χαλβάνη *galbanum*, βληχὼν *pulegium*, Χαρχηδὼν *Cartago*, ὄνυξ, ὄνυχος, *unguis* & *ungula* &c.) a πετάω *pateo* & *pando*; a χέω, χύω, χύνω *fundo*, (ubi & χ in f convertitur, ſic a σύγχυσις *confuſio*, a σχοῖνος *funis* & *finis*; ſic in χολὴ *fel*, χλόη *flos*, Χλοὴ *Flora*: *Chloris eram quæ Flora vocor*, Ovid. *Faſt.* & χυμὸς *fumus*; niſi hoc ultimum potiùs a θυεῖν *adolere*, unde θύματα & θυήματα *ſuffimenta*, & θυμιᾶν *fumigare*, *ſuffire*, θ in f, ut in θεῖον *ſio*, *ſuffio*; θῆρες Æol. φῆρες *feræ*, θέρω *ferveo*, θερμὸς *formus*, θράω, θραύω *frio*.) ſic a σχίζω ἔσχαν *ſcindo* & *findo*; ſed & a σχίζω σκυδαλμὸς, ſicut & Angli, eodem ſignificatu, a *ſplit*, *ſplinter*: a σπεύδω *feſtino* fit σφενδόνη *funda*, teſte Euſtachio: a λείχω *lingo*; a λέπω *linequo*, ab ἔπω *inquio*, (ubi π in q tranſit, quod ſæpe fit, ut poſt dicetur)

dicetur) a ζεύγω *jungo*, (ubi ζ in j tranſit, ut Ζεὺς *Jovis*, *Jupiter* vel *Joupiter*, hoc eſt *Jovis pater*, Ζεὺς πατὴρ, ut dicimus *Marſpiter*, *Dieſpiter*, *Liber pater* &c. Sic Inſula *Zocotora*, ad Mare rubrum poſita, unde *Aloe Zocotrina* nomen ſortitur, a nautis vulgò dicitur *Jacatra*: item *Succus*, Italice *ſucco* et *ſugo*, Hiſpanice *Xugo*, Anglice *juyce*, quæ omnia a *ſugendo* dicta:) Illud autem *n* in *tundo*, *fundo*, *ſcindo*, *findo*, *pando*, *linquo*, *lingo*, *jungo*, et ſimilibus, adventitium eſſe, inde magis liquet quoniam in derivatis frequenter excidat; dicimus enim *tutudi*, *fudi*, *ſcidi*, *fidi*, *liqui*, &c. & a *pando*, *paſſum*, a *jungo jugum*, et a λείχω non modò *lingo* dicitur, ſed et *liquor*, *liquidus*, (unde *liquido* et *liquet*.) et Anglicum *lick*, quæ quidem omnia ab Hebr. לחך vel לקק deſcendunt: ſic a *Triginta*, *trigeſimus*, a τριάκοντα τριακοστός, ut ſupra dictum eſt.

Sic a σκάζω (*claudico*) σκάνδαλον: ſed et *ſcando*, et *ſcala*, et σκαληνὸς, quod ideo potiùs moneo, ut Geometricæ vocis σκαληνὸς originem obiter tradam. Formatur enim σκαληνὸς quaſi a σκαλὸς vel σκαλάω, aut ejuſmodi aliquâ voce (cui Latinorum *ſcala* videtur affinis) quam a σκάζω vel σκάω facile deſcendere poſſe nemo dubitabit, ejuſmodi enim terminationes præter radicis ſubſtantiam ſatis frequenter accedunt, ut in ipſo σκάνδαλον, ἀμαρτωλὸς, διδάσκαλος, διδασκαλία, διδασκαλικὸς, διδασκαλεῖον, &c. ſatis patet, ſic et ab ὀμὸς, ὀμαλὸς & ἀνώμαλος, & ab ἔχω ἔσχατος: A σκαλὸς verò, vel σκαλάω, vel ejuſmodi voce aliâ, facile fiet σκαληνὸν, ut a Μαγδαλὰ Μαγδαλήνη: ſic κάρα κάρηνον, item γαλήνη (Euſtachio teſte) a γελάω quod ipſum a γαίω (unde & γανάω *gaudeo*;) ut autem γαίω, γελάω, γαλήνη, ſic σκάζω, σκαλάω, σκαληνὸς dici poſſunt: pari modo & ἀπάργανον, ἀπαργανόω, ἀπαργάνωσις, ſive a ἀπαράω ſive ἀπαργάω: ſic & ab ἔργον vel ἐργάζω, dicuntur ἀργαλέος, ἐργαλεῖον, ὄργανον, Ἐργάνη: item a ϛαφὶς, ϛαφυλὴ & ϛαφυλῖνος: ſic a κάλω ſeu κάω (*uro*) fiunt κᾶλον (*lignum*) & κῖλον *jaculũ ligneũ*, item κήλων & κηλώνειον *tollenо*. Nec quicquam in contrarium ſuadet vocum ſignificatio: Conus enim ille *Scalenus* dicitur, qui erectus non eſt, ſed magis in alteram partem propendet, hoc eſt, *claudicat*; quid enim aliud eſt claudicare, quàm non erectus incedere, ſed ad latus alterutrum inclinatus? Arq; eodem plane ſenſu Triangulum illud *Scalenum* dicitur, quod æquicrurum non eſt, ſed, propter crurum inæqualitatem, in latus alterum inclinatum. Sic etiam ab eadem claudicationis ſive inclinationis notione, voces *ſcando* & *ſcala* non abludunt; in plano ſiquis incedit, non ille

ſcandere

ſcandere ſed *ambulare* dicitur; quod autem ad perpendiculum erigitur, eſt illud vix aut ne vix ſcanſile; adeóq; illudſolummodo ſcandimus, quod eſt inclinatum ſive acclive: ſiquando autem erectum illud ſit ad cujus ſummum aſcendere velimus, il ud *Scalæ* inclinatæ auxilio faciendum erit; ideóq; παρὰ τὸ σκάζειν *ſcala* dicitur, eadem ratione quâ παρὰ τὸ κλίνειν κλίμαξ. Sed de σκάζω, σκαληνὸς, & *ſcando* hactenus.

Ut autem *n* vel *m* adventitium non rarò inſeritur, ſic e contra *n* vel *m* radicale non rarò excidit, ut ubi Hebræorum *Nun* tranſit in Dages: & ab Hebræo *Nimrod* fiunt Græca Νέμβρωτος & Νεμβρὼδ (inſerto β ut in μέβλωκα, μεσήμβριον) &, apud Joſephum, Ναβρώδης, extrito μ radicali: ut literæ *n* vel *m* (ſaltem inſertæ) minor ratio in derivationibus habeatur.

A *Centum*, fiunt *Centies*, *centuria*, *centenus*, *centenarius*, *centurio*, &c.

Mille. Ut autem ab ἕκατον *centum*, ſic a χίλια fortaſſe *millia* dici poterit, mutato χ in *m*, ut cum a τρέχω in Aoriſto ſecundo fit ἔδραμον pro ἔτραχον, & inde δρόμος: quæ tamen ſi formari dicantur tanquam a δρέμω & non a τρέχω, ſaltem erunt δρέμω & τρέχω cognata. Sic quem vocant Græci Ἰάκωβον, Latini *Jacobum*, Hiſpani *Jago*, Galli *Jaques*, hunc Itali *Jacomo* appellant, & nos *James*. Deinde cum χ & φ, quamvis non ejuſdem organi, ſint tamen literæ invicem commutabiles, (ut ſupra oſtendimus, in σχῖνος *funis*, χύω (χύδην) *fundo*, σύγχυσις *confuſio*, σχίζω ἔσχιδον *findo*, &c.) ipſa π, φ, β, cum litera *m* (ejuſdem organi) commutari poſſe aliunde liquet; dicimus enim a δαπάνη *damnũ*, ab ὕπνος *ſomnus*, ſic ab ὕπατος (vel ὑπὲρ) *ſummus*; ſic *ſummitto*, *ſummoveo*, pro *ſubmitto*, *ſubmoveo*; item πολὺς *multus*, (niſi forſan a μάλα vel μάλιστα, α in *u*, ut in ταλῶ *tulo tuli*, κραιπάλη *crapula*, στραγγαλῶ *ſtrangulo*, ἀγκύλος *uncus* θρίαμβος *triumphus*; at ſaltem μάλα & πολὺ apud Græcos, ſunt cognatæ ſignificationis, quidni & originis; quàm apud Latinos *multum* & *plus*:) μολύνω *polluo* (niſi forſan a παλάσσω *contamino*, unde πηλὸς *cœnum*, *lutum*; vel potiùs a *porro*, ſive *prorſus* & *luo*, unde *lutum* & *lues*, & fortaſſe *abluo*, *deluo*, &c. ne dicam *diluvium*, *illuvies*, *colluvies*, potiùs quam a *lavo*, quod eſt alterius conjugationis:) ſic μέρος *pars*, vel utrumq; (forſan a פרס) & μοῖρα *Parca* (niſi potiùs, ut Gatakero videtur, a περατῶ unde πέπρωται) itaq; videntur olim *Partæ* dictæ quæ nunc *Parcæ*: inde Propert. *l.* 3. *el.* 4. ubi nunc *parca* legitur, veteres codices habere

bere perhibentur *parta*; *Optima mors Partâ quæ venit apta die*, i. τῇ πεπρωμένῃ Scalig. Harum autem tertia, quæ Græcis ἄτροπος, Latinis priscis est *Morta* dicta, a μοῖρα, sive εἵμαρται, unde & εἱμαρμένη. vid. Gell. *l.3. c.16.* *Mors* certè a μόρος, ut a πλῆθος *plebs*, a μένος *mens*:) sic ab ἁπαλὸς fiunt ἁμαλὸς, μαλὸς & *mollis*; a φαῦλος *malus*, (vel forsan a μαλὸς, *mollis ignavus*, ut κακὸς à χάζω *recedo*, *fugio*, & contra ab ἄρης ἀρετὴ unde & *ars* & *virtus*, nisi si istud a *viro*, quod a גבר sunt qui velint, malim ego ab ἄρης vel ἀρσὴν:) sic μετὰ Dor. πεδὰ, *apud* & *post*: sic a βουνὸς *mons*, (nisi quis dici malit *montem* a verbo *minere*, quod apud Lucretium reperitur, unde & *minæ* murorum; a *minendo* autem, sive *eminendo*, *mons montis*; sicut, a *pendendo*, *pons pontis*; a *prominendo*, *promontorium* quasi *prominuntorium*; atq; ab eodem verbo *mineo* ortum habent illa omnia *emineo*, *immineo*, *præmineo*, *prominco*, non autem a *maneo*; a *maneo* enim non *emineo*, sed *emanco* habetur, unde & *emansor* dicitur.) Sed & ipsum *m* aliquando simpliciter præfigitur, ut cum ab ἄρης ἄρητος fit *Mars*, *Martis*, (& forsan ab ἅλς, non modo *sal* & *salum* sed & *mare*,) sic ab ἄρσην *mas maris*: sed & *p*, in ὀρέγω *porrigo*; (nisi potius a *porro ago*, ut *porricio*, *porro jacio*, hoc est, *projicio*; vel, quod ego mallem, a *porro rego*, propter præteritum *porrexi*, ad formam *direxi*, *surrexi*, *correxi*, &c. non *porregi* ad formam *sategi*, *peregi*, *redegi*, *ambegi*; ipsum autem *rego*, non tam a *re ago* vel *res ago* dictum crediderim, quàm a Teutonico seu Saxonico antiquo *rice*, quod *dominium* sive *regnum* significat, quam vocem adhuc retinemus in *Bishop-rick*, hoc est, *Episcopatus*, sive αὐτολεξεὶ *Episcopi dominium*, inde autem *rego*, *rex*, *regnum*, *regio*, &c. voces enim *Latinas* non paucas a Teutonicis originem duxisse, ego nullus dubito:) sic ἄρω *paro*, ἄρτιος *par*, αἰδέω *pudeo*, ἥβη *pubes*, μόλυβος *plumbum*, אור πῦρ.

Vid nostram Grammat. Linguæ Anglicanæ.

Verùm ego *Mille* & *Millia*, potius a μύρια, quam χίλια, deducerem; (nisi potius vox sit ab utrisq; conflata; nam principium potius μύρια exhibet, & finis χίλια:) nam λ & ρ facile transmutantur. Sic perinde dicitur κρίβανος & κλίβανος: *parum* & *paulum*, utrumq; a παῦρος: sic φραγέλλιον *scribunt* Græci quod Latini *flagellum*: γράφω & γλάφω voces sunt affines utraq; a כרב, sic σκαλμὸς *scalmus*, a σκαίρω *salio*, Etymologo teste, sic *Willelmus* Græcè Ἰλερμὸς scribitur; ἑσπερία, *Hispania*, & *Hispalis*; sic *puer*, *puellus*; *tener*, *tenellus*; *pulcher*, *pulchellus*; *liber*, *libellus*; aliáq; multa. Sic a Græco λείριον fit Latinum *lilium*, & forsan ab εἶρος vel ἔριον, *vellus*,

(quanquam Varro & Plinius a *vellendo* volunt, unde vulsuram tonsura priorem probatum eunt: fortasse tamen a μάλλος *vellus*) Sic ab *Epistola*, *Apostolo*, *Capitulo*, dicunt Galli *Epistre*, *Apostre*, *Chapitre*. Hinc decantatus ille Alcibiadis Tranlismus, λ pro ρ pronunciantis; quo nomine ab Aristophane irridetur in *Vespis*, Εἶτ' Ἀλκιβιάδης εἶπε πρός με τραυλίσας, Ὁλᾶς; Θέωλος τὴν κεφαλὴν κόλακος ἔχει, cum dixisset, ὁρᾷς Θέωρος τὴν κεφαλὴν κόρακος ἔχει, adeoq; Theoro, pro capite *Corvino* (hoc est, nigro) *Adulatoris* caput tribuit; salsè quidem & pro more suo. Et quidem *R & L in omnibus linguis facilè invicem commutantur*, ut notat doctissimus Causabonus ad Persii. Sat. 5. vers. 22.

Numeros Ordinales quod attinet, illi a Cardinalibus derivantur omnes, præter primores duos.

Primus. *Primus* nempe, quasi *Proimus*, dicitur a Græco πρῶτος, mutata nempe terminatione superlativi Græci in terminationem Latini, hoc est, τος in *mus*. Vel etiam (quod eodem recidit) a Græco πρὸ, Poeticè πραὶ, fit Latinum *præ*, & inde *prior* & *primus*. Hoc enim dicere mallem, quàm *pridem*, *prior*, *primus*; cùm vox *pridem* videatur idem esse ac *prius demum*: vel saltem *præ* cum expletivo *demum* compositum; ut in *idem*, *ibidem*, *itidem*, *identidem*, *tantundem*, & similibus.

Secundus. *Secundus* autem a *sequor* dicitur, ut *oriundus* ab *orior*: Quod autem per *C* scribatur, & non per *qu*, hoc nihil est; tantundem enim valent: sic a *qui* dicitur *cujus*, *cui*, vel (apud Plautum) *quojus*, *quoi*; a *secus* (adverbio) *sequior*; a *secus* (præpositione) *sequester*; ab εἰκὸς, εἴκελος, *æquus* æqualis; & *persecutio*, *secutus*, &c. promiscuè scribuntur per *c* & *qu*; sic *cum* & *quum*, aliaq; multa.

Quatuor. Duo saltem restant Numerorum nomina, nempe *Quatuor* & *Quinque*; quæ, quamvis a Græcis nominibus longissimè recedant, inde tamen orta puto. *Quatuor* enim Græcè dicitur τέσσαρες, Atticè τέτταρες & τέτορες, Poetice seu potius Æolice πίσυρες (apud Homerum Il. π. & forsan alibi) item πίτυρες & τέτορες, (unde *Petorritum*, Flacco, a rotarum numero,) exinde Cambricum *pedwar*, Armoricum *peuar* (teste Bocharto) & forsan inde Anglicum *fower*, quod tamen Teutonicæ potius originis esse duco. At a πίσυρα, vel πέτταρα, vel πέτορα, ad *Quatuor*, non ita difficilis est transitus; mutato nempe π in *Qu* vel *C*. Ostendimus autem supra gutturales κ & χ cum ipsis labialibus π, β, φ, (aut quæ tantundem valent) aliquando commutari; sic a χοῖνος, fit

finis

finis & *funis*; a σχίζω, *findo*; a χύω, *fundo*; a χολὴ *fel* & *bilis*; & contra a λείπω, *linquo*; ab ἕπω, *sequor*; ab ἔπω, *inquam*: ab ἵππος, *equus*: a πειράω vel πορέω, *quæro*, (nisi sit ab Hebr. בקר, *quæro*, & a בקש *quæso*; dempto *b*, ut in βρέχω *rigo*, βρώσκω *rodo*) sic a πάττω, πάσσω, *quatio*, *quasso*, &c. Et revera paucissimæ occurrunt voces Latinæ, per *qu* scriptæ, quæ non apud Græcos vel per π vel per τ (rarius per κ vel χ) scriptæ reperiuntur. Ita enim a τόσα, πόσα, *tot*, *quot*; & πόσος *quotus*; sic & τόσον, πόσον, *tantum*, *quantum*, (inserto *n* Epenthetico;) sic a πότε *quando* (unde Anglicum *whan* seu *when*, vel, ut Scoti scribunt *quhan*:) sic πῦ *quò*; πῆ *qua*; item τοῖος, ποῖος, *talis*, *qualis*, in quibus terminatio *alis* est adventitia, ut & in *æqualis* ab *æquus*, (sicut εἰκελὸς ab εἰκὸς, & ὁμαλὸς *planus*, ab ὁμὸς *similis*, *par*, sic ἁμαρτωλὸς, διδάσκαλος, ὑψηλὸς, σκάνδαλον, &c.) & terminatio *ilis* in *similis*, ab ὅμοιος, quod ipsum ab ὁμὸς, quare et Græca terminatio *οιος* servilis esse apparet; sed & *Humilis* ab *humo*, (quod ipsum a χαμὰς unde & χθαμαλὸς *humilis*, ut ἄχος ἄχθος, μαλακὸς, μαλθακὸς.) *Facilis* a *facio*, *Habilis* ab *habeo*, unde & *Habitus*, ut ab ἔχω vel σχῶ, ἕξις & σχέσις, *Agilis* ab *ago*, aliáq; multa, terminationem servilem adsciscunt, prout supra *l* in *simul* & *semel* servile esse diximus. Sic & a τε *que*, a τις *quis*; sic ab ἐσθίω, *esca* & *vescor*; & contra *tolleno* (quasi *colleno*,) a κηλώνειον. Sic Æoles ὅκα & ἄλλοκα, pro ὅτε & ἄλλοτε, dicebant; sic apud Latinos *ocium*, *negotium*, *spatium*, *nuncium*, *vicium*, &c. promiscuè vel per *t*, vel per *c*, scribuntur; unde literarum *t* & *c* affinitas magna colligitur: quod idem patet apud Græcos in ὀρύττω, ὀρύξω, ὤρυχα, ὤρυγμαι, ὤρυκται, aliisq; verbis ejusdem formæ, ubi τ in ξ, χ, γ, κ, convertitur: Ita etiam promiscuè dicimus *uspiam* & *usquam*, *nuspiam*, & *nusquam*, *quispiam* & *quisquam*; unde etiam maxima affinitas literarum *p* & *qu* ulterius patet; adeò ut non mirum sit a τέτορα, vel πέτορα, dici *Quatuor*. A *Quatuor* verò fiunt *quartus* (ut τέταρτος) *quater*, *quaternio*, *quaternus*, *quaternarius*, &c.

Gatak.

Eadem item operâ ostenditur, & *Quinq́*, derivari posse a Πέντε, Æol. πέμπε, unde & πεμπάζω & πεμπτὸς: positis nempe pro πεν *quin*, & pro τε *que*. Atq; hinc *quintus* seu *quinctus* (πέμπτος) *quinquies*, *quinus*, *quinarius*, &c.

Quinque.

Atq; ita ostendimus Numerorum nomina Latina a Græcis desumpta esse; quanquam illud in nonnullis vix adeo probabile primo intuitu videri possit. Sicui vero hac re nimis prolixus fuisse videar, aut etiam a semitâ deviasse, cum hæc Gramma-

tica sint potius quam Mathematica: spero ab illo me veniam facile impetraturum, si saltem intelligat me numeros ex professo hîc loci non Mathematice tantum, sed & Philologice tradendos suscepisse; partim quidem quoniam nescio an quispiam antehac illud susceperit; partim etiam quoniam legitimi mei Auditores (quibus hæc primitus parabantur) non omnes eousq; in rebus Mathematicis versati fuerint, quin opus sit nonnunquam aliud aliquid salis instar seu condimenti interspergere, quò melius quæ arida secus aut ficea nimis videri possint facilius deglutiantur, neq; vel palatum offendant vel stomachum moveant. Quòd autem nonnunquam prolixior sim & in exemplis copiosior, ideo factum est, quia nonnunquam Derivata a suo fonte eousq; recedant, ut, nisi magnâ exemplorum copiâ illud evincatur, non esset adeò persuasu facile ullam omnino cognationem inveniri: quod de *Quatuor* & *Quinque* præsertim dictum intelligatur; quanquam & alia aliqua prima forsan fronte vix suam familiam satis indicarent. Neq; hoc quidem mirum, cùm illud omnino usu sit compertum, ut, ubi vox aliqua ex una in aliam linguam tralata est, derivationum leges multo sint laxiores quàm ubi intra eandem linguam manendum est. Atq; hoc in Latinis a Græcis deductis eò magis accidit, quoniam non tam ex puro fonte Græco seu dialecto vel Attica vel Ionica (quarum frequentior est usus) quàm ab Æolica adeoq; omnium impurissima dialecto ut plurimum ducta sint, quod agnoscunt omnes; vel saltem a Dorica, quæ & ipsa a Communi satis deflectit.

Contra verò, siquis minutioribus hisce (prout videri possint) delectatus, ampliorem messem optaret: consulat, si liber, Caninii Grammaticam Græcam (apud quem olim me hujusmodi non pauca legisse memini;) vel potius (ne multos nominem) Acutissimi simul & Venerandi Senis *Tho. Gatakeri* nostratis opus κειπκώτατον (qualia sunt ipsius omnia) quod adversus Sebastianum Pfochenium *de stylo novi Instrumenti* inscripsit; apud quem (in prioribus præsertim capitulis) multa hujusmodi reperiat magno acumine scripta: ubi quidem in multis nobiscum consentit, atq; inde alia in nostrum usum, si opus esset, exempla mutuari possent, nisi quòd ea perlegere non priùs mihi contigerit, quàm quæ supra habentur, scripta fuerint; quanquam & ex illis aliquot non difficeor a Clarissimo illo

illo viro, meiq; amantiſſimo, me primitus didiciſſe; Qui (magno literarum damno) anno jam proxime præterito (poſtquam hæc ſcripta erant) relicta terra cœlo potitus eſt.

Atq; hactenus de numerorum nominibus diximus. Sequitur Numerorum Notatio ſive Deſcribendi ratio, proximo in loco tradenda.

CAP. VII.

Numerorum Notatio, per omnes Alphabeti literas præſtita, Hebræis & Græcis communis.

NUmerorum Notatio, ſive Deſcribendi ratio, non omnibus una eſt. Quamvis enim omnes in hoc conſentiant, ut Numeros Characteriſmis quibuſdam, brevitatis gratiâ, deſcribant, quo etiam calculus facilior evadat: Gentes tamen variæ varios etiam ſcribendi modos adhibuerunt. *Notatio, ſeu Numerorum deſcriptio.*

Hebræi, aliiq; Orientales, in deſcribendis Numeris, Alphabeti Literas adhibuerunt: Prioribus nempe Alphabeti literis Unitatum numeros exprimebant, א ב ג ד ה ו ז ח ט ſequentibus deinceps, quot opus erat; numeros Decadum, י כ ל מ נ ס ע פ צ & tandem reliquis Centurias, ק ר ש ת Reliquos vero numemeros centenarios (quia non ſuperſunt plures Alphabeti literæ) deſignant literarum quinq; characteribus finalibus ך ם ן ף ץ aut etiam literis compoſitis תש. תר. תק. תת. תתק. *Apud Hebræos.*

Numeros autem juſtis Decadibus interjectos, conjunctis literis indicabant; numero nempe decadum ſubjungendo numerum adjunctarum unitatum; ut יא כב. At ubi numerum decimum quintum deſcribunt, pro יה, ſcribunt טו, (hoc eſt, pro decem & quinq;, ponunt novem & ſex,) ne ſcilicet Nomen Dei, iſtis literis expreſſum, videantur temerare. Et pari modo numeros juſtis Centuriis interjectos conjunctis literis deſcribunt, ut קיא ולג.

Millenarios verò numeros & qui ſequuntur, iiſdem quibus Unitates, aut etiam decadas, centuriáſve, literis deſignant; levi fortaſſe puncto, diſcriminis gratiâ, diſtinctis; א ב & ſiquæ ſuperſunt centuriæ, decades, aut unitates juſtis millibus interjectæ, ſubjunguntur earum characteres ut אתנה. *Apud Græcos.*

Græci eodem pariter modo quo Hebræi numeros deſignant;

prioribus enim Alphabeti literis Monades designant, sequentibus Decadas, & ultimis Centurias; Millia verò iisdem repetitis, leviculo puncto vel virgulâ distinctis: Et numeros interjectos literis conjunctis.

Sed & propter literarum defectum, tres characteres præter Alphabeti ordinem interserunt: inter monadas unum, alium inter decadas, & inter centurias reliquum.

C. ϛ. Ἐπίσημον C, vel ϛ, (qui character est vel ϛ sigma finalis, vel literarum στ,) numerum Senarium designat. Inseritur verò hoc ordine (potius quam monadum characteribus reliquis postponitur) loco Hebræorum ו; ut subsequentes literæ eandem potestatem obtineant quàm eis homologæ apud Hebræos: puta, ut ז & ζ, item ח & η, necnon ט & θ, י item & ι, (& sic de cæteris) eundem numerum indigitent; quod secùs non fieret, cùm Græci, loco Hebræorum *Vau*, nullam habeant literam, (saltem non pari sede positam,) Latini verò eodem ordine restituerunt suum *F*, (hoc est Æolum Digamma) quod ferè tantundem valet; imo omnino idem forsan sonabat olim, cum ipso ו *Vau* Hebræorum, & Latinorum *V* consonâ, prout nunc a plerisq; (saltem Anglis) harum utraq; pronunciatur: prout & digamma Æolicum F olim pronunciatum fuisse testatur Priscianus; in cujus locum non rarò substituitur apud Latinos consona *V*, ut quum ab ϝῖνον, ϝῖς, Æolicè Foῖνον, ϝFις, fiunt Latina *Vinum*; *Ovis*, aliaq; ejusmodi. Unde conjicere licet, duplicem olim fuisse sonum consonæ *V* apud Latinos: aliquando ille qui nunc dierum auditur in *qui*, *lingua*, *suadeo*, ubi idem sonat ac *w* in *wise*, *way*, *perswade*; aliquando idem cum Anglorum *V*, in *have*, *save*, *vaine*, *vice*, &c. Quare apud Græcos aliquando scribitur per β, ut in Βιργίλιος, Δαβὶδ, aliquando per υ, ut in ναλέριος, ναλὺς, quæ omnia Latine scribuntur per *V* consonam. Sed & etiamnum Cambro-Britanni (& olim, ni fallor, Anglosaxones) *f* eodem modo efferunt quo nos consonam *v*, nempe ut *b* aspiratum: sonum verò quo nos & alii plerique nunc efferimus *f* vel φ, illi per *ff* scribunt. Quod autem de Latinorum *V* consona dictum est, dici fortasse poterit de Hebræorum *Vau*, nempe ipsius olim sonum non fuisse in omnibus & apud omnes constantem; certum enim est (ex *Jud.* 12. 6.) non eundem fuisse apud omnes sonum literæ ו, & quare non & eadem esse posset in literâ *Vau* varietas non video: atq; nunc

dierum

dierum Arabes quidem & Persæ literam illam ut nostrum *w* pronunciant, & Turcæ ut nostrum *V*.

Character autem hic ϡ nongenta designat, quem σαντῖ vocant, quasi ex literis C (inverso) & π, nempe *sgma* (quam Dores σᾶν vocant) & *Pi*, conflatus, vel, si libet, ex *Antisigma* (sic enim Ɔ, sive sigma inversum, appellant) & *Pi*. Quanquam revera ipsius aliam potiùs fuisse originem existimat Scaliger; nempe ab Hebræorum seu Syrorum antiquo charactere literæ *Tzade*.

Pro Nonaginta verò ponitur ϟ ϙ vel *G*; unde figura Latinorum ϙ deducta est; antiquis Latinis ignota; qui Græcorum γ per *C* exprimebant, quam literam tertio igitur loco, ut Græcorum γ, ponebant. Dicebatur autem κόππα seu *Kophe*, tanquam ab Hebræorum & Syrorum *Koph*: sed & *Antirrho*, quasi *Rho* inversum. Ab hac figura dicebatur apud Aristophanem ἵππος κοππατίας: a præcèdente verò σαμφόρας sive σαμπόρας sive σαππόρας: (prout hoc aut illo charactere notatus erat.) De utroq; videatur Josephus Scaliger, in suis ad Eusebium Animadversionibus: quibus digressionem satis longam de antiquis Græcorum literis inseruit. ϟ ϙ.

Pro ϙ verò scribitur a nonnullis ϟ, aut etiam ϥ, vel deniq; ς (idem nempe character cum illo senarii numeri) sed perperam, incuria nempe librariorum. Item pro ϡ, eadem incuriâ, scribitur nonnunquam ϡ. Uterq; autem error (ponentium ς pro ϙ, & ϡ pro ϡ) non raro in libris impressis retinetur; quod propter typorum inopiam factum credo; cum enim veros typos non habebant, ipsis quam proxime similes substituerunt: Eodem nempe modo quo in libros tam Manuscriptos quam Impressos (sive propter Scribarum ignorationem Characterum Hebræorum, sive propter Typorum defectum) irrepsit error ille ponentium ϡϡ pro nomine יהוה: Quomodo etiam pro IHC XPC, vel ιης χρς, (quo pacto Græce contracte scribitur ἰησοῦς χριστὸς) substituerunt Latini ihc xpc vel ihs xps, quibus innuitur *Jesus Christus*. Sic apud Jurisconsultos, *Digestorum* libri, Græce πανδέκται dicti, hac nota vulgo citantur *ff*, quæ a Græco π deflexit.

Atq; hæc, de modo scribendi numeros Hebræis Græcisq; magis usitato, dicta sufficiant: Cujus specimen aliquod hic apponitur.

α	1	א		π	80	פ	
β	2	ב	ϛ G ϛ	ϟ	90	צ	
γ	3	ג		ϱ	100	ק	
δ	4	ד		σ	200	ר	
ε	5	ה		τ	300	ש	
C ϛ	6	ו		υ	400	ת	
ζ	7	ז		φ	500	ך	תק
η	8	ח		χ	600	ם	תר
θ	9	ט		ψ	700	ן	תש
ι	10	י		ω	800	ף	תת
κ	20	כ		ϡ	900	ץ	תתק
λ	30	ל		͵α	1000	א̇	
μ	40	מ		͵β	2000	ב̇	
ν	50	נ		͵γ	3000	ג̇	
ξ	60	ס		͵ι	10000	י̇	
ο	70	ע		͵κ	20000	כ̇	

ια	11	יא
ιβ	12	יב
ιε	15	טו
κγ	23	כג
νϛ	56	נו
οη	78	עח
σλα	231	רלא
͵αχνε	1655	א̇ם̇נה

Rarius autem tam Hebræi, quam Græci, literas Alphabeti continua ſerie adhibent, ad rerum vel Numerum vel ſaltem Ordinem deſignandum. Sic enim Homeri Ilias & Odyſſea in libros diſtinguuntur, Et eodem modo apud Hebræos Pſalmus CXIX in membra, aliíq; in Periodos, videntur diſtingui. Sed hæc indigitâſſe ſat eſt.

Supereſt alius Numeros ſcribendi modus, Græcis item uſitatus, Romanorum mori non abſimilis, per aliquot ſaltem, non omnes, Alphabeti literas; de quo proximè agendum eſt.

CAP.

CAP. VIII.

Numerorum Notatio, per aliquot ſaltem Alphabeti literas præſtita, Græcis & Latinis communis: Et, cur illæ potius quam aliæ, ad hunc uſum ſeliguntur.

PRæter illum quem ſuperiùs tradidimus Numeros ſcribendi modum, erat etiam alius a Græcis uſitatus; non per omnes quidem, ſed ſelectos quoſdam, Alphabeti characteres, peractus. Sex ſcilicet literis M. X. H. Δ. Π. I. numeros omnes deſignabant. M deſignat μύρια ſeu decies mille: X χίλια, ſeu Mille: H ἑκατον, Centum: Δ δέκα, Decem: Π. πέντε, Quinque: I verò ἓν, Unum. Quoties autem plures vel Unitates, vel Decades, Centuriæve, aut Millia apponenda ſunt, illud literis bis, têrve, quaterve iteratis, indigitatur. Quum verò ad quina deventum eſt, illud literâ Π innuitur; hæc enim litera, ſimpliciter poſita, quinque denotat; at, incluſo Δ, (hoc modo ⟦Δ⟧,) quinquaginta; incluſo H, Quingenta; incluſo X, quinquies mille, &c. Notatio alia Græcorum.

Eodem planè modo Latini ſeptem literis ſuos numeros deſcribunt. M. D. C. L. X. V. I. Litera M deſignat Mille: D, Quingenta: C, centum: L, Quinquaginta: X, Decem: V, Quinque: I, Unum. Numeros intermedios, aliquorum vel conjunctione, vel repetitione (ſicut & Græci) deſcribunt. Nonnunquam tamen Latini (ſed non item Græci) numerum minorem majori præponentes, illum ex minori auferendam notant; unde IV, IIX, IX, XIIX, XIX, XL, XC, ſignificant 4, 8, 9, 18, 19, 40, 90. Atq; idem nonnunquam in numerorum appellationibus faciunt; dicunt enim *undeviginti*, *duodeviginti*, pro *octodecim*, *novendecim*: quòd & de aliis ſimilibus intelligendum eſt. Hoc pacto, ſi numerus *Milleſimus ſexcenteſimus quadrageſimus nonus* deſcribendus eſſet; hoc Græci ſic peragerent ΧΗΗΔΔΔΠΙΙΙΙ: Latini verò hoc modo MDCXLIX vel etiam ſic ↀIↃIↃCXLIX. Notatio Latinorum.

Latini, pro M, numeri millenarii nota, nonnunquam ſic ſcribunt ↀIↃ, & deinde ↀIↃↃ pro decem millibus, & hujus dimidium IↃↃ pro quinq; millibus; item ↀↀIↃↃↃ pro centum millibus, ejuſq; dimidium IↃↃↃ pro quinquaginta millibus:

millibus: sic CCCCIↃↃↃ pro millenis millibus; & sic deinceps.

Totius hujus Notationis specimen, hic apponitur.

M	10000	ccIↃↃ	I	1	I	ↀ	50	L
X	1000	cIↃ.M	II	2	II	ↀ∆∆∆∆	90	XC
H	100	C	III	3	III	H	100	C
∆	10	X	IIII	4	IIII. IV	HHHH	400	CCCC
I		I	Π	5	V	Ⓗ	500	D. IↃ
Π	5	V	ΠI	6	VI	ⒽH	600	DC. Ic
ↀ	50	L	ΠIIII	9	IX	X	1000	M. cIↃ. ∞.
Ⓗ	500	D. IↃ	∆	10	X	XXXX	4000	MMMM
Ⓧ	5000	IↃↃ	∆I	11	XI	Ⓧ	5000	IↃↃ.
Ⓜ	50000	IↃↃↃ	∆Π	15	XV	ⓍX	6000	IↃↃ.
			∆ΠIIII	19	XIX	M	10000	ccIↃↃ
			∆∆	20	XX	Ⓜ	50000	IↃↃↃ
			∆∆∆	30	XXX		100000	cccIↃↃↃ
			∆∆∆∆	40	XL		1000000	ccccIↃↃↃↃ
							10000000	cccccIↃↃↃↃↃ

Literarum numeralium selectarum ratio.

Harum verò literarum numeralium valorem quamvis intelligant plurimi, earum tamen rationem pauci sunt qui animadvertunt; Latinarum præsertim. Imò qui ex professo illarum rationem reddere conantur nonnulli, potiùs nugas proferunt quàm veras rationes: Quas tamen ego exagitare non operæ pretium judico. Legat, qui velit, Julium Scaligerum, *de Causis Linguæ Latinæ*; Hermannum Hugonem, *de Ratione Scribendi*; Venerabilem Bedam, aliósq; : qui, quamvis rationes reddere conantur, cur hæ potiùs quam aliæ literæ numeris significandis adhibeantur, ut plurimum tamen mihi neutiquam satisfaciunt. Alii, quos non consului, fortassis meliores reddant. Ego interim, omissis aliis, eas quæ mihi maximè videntur probabiles breviter producam.

Apud Græcos.

Quod ad Græcas literas attinet, non est cur multum hæsitemus, cùm earum ratio satis in plerisq; pateat.

M. X. ∆. Π.

M μύρια, X χίλια, ∆ δέκα, & Π πέντε significant, quia vocum illarum literæ sunt initiales. Item, cur Π, inclusis literis ∆, H, X, M, harum valorem quintuplum exhibeat, satis liquet, cum ipsum Π numerum quinarium designet.

De

De solis literis H & I quæstio restat; quarum illa Centum, hæc Unum indicat: cùm nec vox ἕκατον, nec εἷς, ab illis incipiat, sed ab E utraq;.

De priori dicendum est, characterem illum H (prout Centenarium numerum notat) non tam esse figuram literæ *Eta*, quàm spiritûs asperi. Nam antiquiores Græci, antequam vocales longæ η & ω Alphabeto accesserant, Spiritum Asperum eo charactere designabant, quo jam Latini utuntur: Spiritum autem Tenuem omnino omittebant, ut & Latini etiamnũ faciunt. Estq; revera ipsa vox *Eta* ab Hebræorum *Cheth* desumpta, & eundem in Alphabeto ordinem retinet, ut & Latinorum *H*: (saltem si Loco Hebræorum *Vau* substituatur vel ἐπίσημον C, vel Æolicum Digamma, & Latinorum *F*.) Postea verò eadem litera bisecta H I figuras utriq; Spiritui suppeditabat; pars nempe prior Spiritum Asperum, posterior Tenuem, designabat. Tandem verò illæ, quas nunc habemus, Spirituum notæ, ut expeditiores, obtinebant. ''. Antiqui igitur, non ἕκατον, sed Ηεκατον scribebant; unde character ille initialis desumptus est, H, numeri Centenarii nota. H. H.

Quod ad reliquam, quæ superest, figuram I attinet; adhibita fuit illa, vel quod tam Spiritus Asper, quam prima litera vocis εἷς, ipsi communes essent cum voce ἕκατον, ideóq; proximam quæ sequitur literam I assumpserunt, quâ significent vocem εἷς, adeóq; numerum primum seu Unitatem: vel, quod ipsa vox εἷς antiquitùs per nudum I scriberetur, ante inventam diphthongum ει, quæ forsan seriùs, quàm numeris Characteres primitùs aptabantur, inventa erat. Vel etiam quod ἴος, ἴα, ἴον, dicantur pro εἷς, μία, ἕν: vel deniq;, quia simplicissima illa & minutissima litera, (μονόγραμμος nempe, & unicâ lineolâ constans,) facillimè omnium pingeretur; qua ratione, etiam nunc dierum, qui omnino rudes sunt & ἀγράμματοι, adeo ut nequidem literas intelligant, numeros tamen utcunq; describunt, totidem forsan in pariete lineolis cretâ vel rubrica ductis quot vellent innuere unitates. Nec quidem hoc apud Græcos & Latinos tantùm, reliquosq; populos Occidentales obtinet; sed & in libello quodam Chinensi idem se abservasse dicit Gatakerus; paginas nempe quatuor primores ita designatas; primam lineola unica I, secundam duabus II, tertiam tribus III, quartam quatuor IIII; sequentes vero aliis characteribus I.

distinctas. Atq; hæc de Græcorum characteribus sufficiant.

Apud Latinos. De Latinorum autem literis non adeo facilis est ratio. Præter duas enim *M* & *C*, quarum illa *Mille*, hæc *Centum* inchoat, aliarum origo altiùs petenda est.

M. Literam igitur *M* dicimus ad numerum *Mi*llenarium indicandum adhibitam, quia ejusdem litera est initialis. Sed addimus, ipsius figuram aliam aliquando fuisse, & etiamnum esse, quàm quæ vulgo adhibetur. In libris quippe Anglicis, Belgicis, Germanicis, aliisq; pinguiori typorum forma impressis, occurrit passim istius literæ hic Character ℳ; rotundiori nempe forma quam in typis Italicis, Gallicis, Hispanicis, fieri solet: Antiquiores vero Anglo saxones hac forma scribebant ᗰ; & quidem in Libris Manuscriptis cujuscunq; gentis reperitur passim Latinorum litera *M* majuscula rotundiori forma exarata. Hujusce vero literæ (rotundiori, ut dictum est, forma scriptæ) semissis posterior, literæ *D* similimus est; quam ideo adhibuerunt ad numerum quingenarium indicandum, nempe Millenarii dimidium. Sed & hanc & illam, non antiqui modò, sed & Recentiores nonnunquam in membra dividunt: nempe, pro ᗰ & D, scribunt ↀ & ɔ; priorem verò nonnunquam & hoc modo ∞; ut in libris non paucis apud Belgas præsertim (sed & alibi) impressis videre est.

ↀ. ɔ. ∞.

C. Literam verò *C*, centenarii numeri notam, antiqui Romani sic scribebant ↂ, (quadrata scilicet formâ,) ut ex antiquis marmorum & nummorum inscriptionibus constare dicitur. (Quos imitantur quodammodo typi Germanici Anglicíq; pinguiores. 𝕃,) Hujus quadratæ literæ semissis inferior ipsam literam L. 𝕃. efficit; quæ igitur ad exprimendum numerum Quinquagenarium adhibetur, nempe Centenarii dimidium.

𝕃. L. 𝕃.

Ad numerum Denarium exprimendū adhibuerunt, non literâ *D* initialem; (quoniam erat ea quingenarii numeri nota, ut supra dictum est,) sed literam *X*, quæ conflatur ex duplicata litera V seu Λ; utroq; enim modo Quinarii numeri nota antiquitùs scripta fuit.

X. V. Λ.

Erat autem *K* litera, Quinarii numeri nota; vel forte quia

∴ ex quinq; punctis conflari videtur ∴; Vel quia ipsius figura inversa Λ (quæ etiam non rarò, apud Antiquos, numerum quinarium denotat) ad figuram Græcorum literæ Π (quinarii,

apud

apud illos, numeri notam) proximè accedat; (quippe nulla Latinorum litera ipsis est similior:) Vel etiam quia vox *Quinq;* antiquitus per *CV* scripta fuerit, (antequam litera Q ad Latinorum Alphabetum accesserat;) quarum prima *C*, cùm sit centenarii numeri nota, non potuit adhiberi, ideóq; sequentem *V* assumserunt. Ipsam verò literam Q, recentius quàm reliquæ literæ, ad Alphabetum accessisse, non esse dubitandum existimo; ut nempe illud significet quod conjunctæ literæ *CV*; (sicut & *&*, *x*, idem sonant ac *et*, *cs*:) adeóq; ipsa litera *V*, quæ nunc pro more literæ Q subjungitur, omnino redundat, cùm ipsius sonus in ipsa Q litera includatur; (prout contendit Reverendus Senex *Thomas Gatakerus* Anglus, in tractatu quem edidit de Diphthongis, sive *Bivocalibus*:) secùs enim litera Q omnino esset superflua. Nam ut *qua* constituit ultimam syllabam in voce *lingua*, & *sua* primam syllabam vocis *suadeo*, sic & *cua* idem sonat ac *qua* in voce *qualis*: vel igitur redundat *u*, cùm Q tantundem valeat ac *Cu*; vel ipsa litera Q omnino est superflua, & perperam alphabeto inserta, utpote quæ non alia est quam litera *C*. Et revera quidem, non modo sonus literæ Q, sed & ipsius character, conflatus videtur ex *CV*, nam ϙ & Q solo situ differunt. ϙ Q.

Eodem prorsus modo ponebant veteres literam *K* pro *CA*, adeóq; promiscue *Klendas* & *Calendas*, item *Krtago* & *Cartago*: quanquam nunc dierum, tam *A* perperam subjiciatur literæ K, quam *V* literæ Q; adeóq; tam *K* quam Q, prout nunc usurpantur, prorsus redundent, nec aliud quicquam sonent quam *C*; non nego tamen hunc scribendi modum jam olim obtinuisse, neq; tanti forsan res est ut nunc mutatum iri strenuè urgeamus. At saltem eodem, si non majori, jure dicendum esset, *Post Q non scribitur V*, & *Post K non scribitur A*, atq; dictum est, *Post X non scribitur S* (nempe quia *s* includitur in litera *x*, quæ ex *cs* conflatur:) nam pariter absurdum est literam *A* literæ *K* inclusam, aut *V* inclusam literæ Q, repetere ipsive K vel Q subjungere; ac ipsam literam *S* literæ *X* inclusam eidem denuò repetitam subjungere. Sed neq; hæc regula universaliter obtinere debet, acsi post *X* nunquam scribenda esset litera *S*; quamvis enim illud secus obtineat, tamen quoties præter ipsum *S* literæ *X* inclusum, aliud sequatur *S* juxta vocis analogiam ipsi subjungendum, nihil impedit quo minùs adjungetur, prout in modernis typis accuratioribus fieri

consuevit. Ideóq; meliùs *exscribo*, *exsurgo*, *exsisto*, *exsto*, *exsulto*, &c. per *s* scribuntur, quàm *excribo*, *exurgo*, &c. sine *s*. Quamvis enim *s* in *x* includatur; nihil tamen absurdi sequitur si geminum *s* adesse dixero; alterum nempe præpositionis *ex*, alterum vocis sequentis: Sed & eadem de causa *assto*, *asscribo*, *asscendo*, *asstipulor*, &c. per geminum *s*, scribenda sunt, (alterum nempe loco absentis *d*, alterum vocis sequentis,) non minùs quàm *assumo*, *assurgo*, *assimilo*, &c. quæ ab omnibus per geminum *s* scribi solent. Nisi malit quis utrobiq; literam *d* retinere, *adsto*, *adsumo*, &c. Sic & *exsul*, *exsilium*, per *s* scribenda sunt, quæ ejusdē sunt originis ac *præsul consul*, *consilium*, ejusdē (credo) cum *exsulto*, *exsilio*, a voce *salio*. Sic & *exsemplum* a voce *similis*; dicimus enim Anglicè tam *ensample* quā *exsample* & *samplar*, unde liquet literam *s* radicalem esse, & non tantum ad præpositionem *ex* pertinere: *p* verò Epentheticè inseritur, ut in vocibus *exemptus*, *redemptus*, *contemptus*, &c. & *β* in Græcis *μέμβλεται*, *μέμβλωκα*, pro *μεμέλεται*, *μεμόληκα*, sic & *μεσήμβριον meridies*, quasi *μεσήμριον*, contractè pro *μεσημέριον*, ut & in Anglicis (vel etiam Gallicis) *Assemble*, *dissemble*, *resemble*, *semblance*, a Latinis *simul*, *simulor*, *similis*, sic ab *humilis*, *tremulus*, fiunt *humble*, *tremble*; sic *chamber*, *tender*, *cinder*, a Gallicis *chambre*, *tendre*, *cendre*, cum tamen Latinè dicamus *cameram*, *tenerum*, *cinerem*; sic a *Cimmerius* fit *Cimbricus*; sic ab *ἀνέρος*, per Syncopen *ἀνρος*, Emphonicè *ἀνδρός*. Nam revera literæ *m* & *n* cum sequentibus aliquot consonis (præsertim *l* & *r*,) vix cohærent nisi post illam interveniat *b* vel *p*, post hanc *d* aut *t*. Sed hæc obiter.

I. Restat alia *I*, cujus rationem reddituri sumus. Eâ nempe, ut Græci, sic Romani Unitatem indigitant; atq; hoc faciunt Romani vel quòd Græci sic prius fecerint; vel, quia litera hæc minima quidem est & simplicissima, ut & supra de Græcorum *ι* diximus.

Vel deniq;, fieri potest, ut pro *Unitate* simplici, sive primi loci, posuerint lineolam simplicem I: pro unitate secundi loci, hoc est *Decade*, duas transversas, seu literam X, (hujusq; semissem V pro numero quinario;) pro unitate tertii loci, hoc est, *Centuria*, tres conjunctas, seu literam Ε, (hujusq; semissem L, pro quinquaginta:) & deniq;, pro unitate quarti loci, seu *Mille*, quatuor conjunctas lineas, nempe literam M vel ϻ, hujusq; semissem D pro quingentis.

Atq;

Atq; hactenus de Numerorum Notatione per literas Alphabeticas dictum est: superest, ut eorundem notionem per *Ziphras* (ut vocantur) *Saracenicas*, explicemus.

CAP. IX.

Numerorum Notatio per Ziphras Saracenicas, sive Vulgares Figuras Numerales. Ciphra quid; ejúsq; variæ significationes. Occultæ scribendi modi. Siglæ & Notæ, quomodo differant apud Romanos, Notæ Arithmeticæ a quibus inventæ.

PRæter eos quos superius tradidimus Numeros describendi modos, per Alphabeti Literas; alius adhuc maximi momenti superest tradendus: Adhibitis nempe vulgaribus figuris Numeralibus, 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. quas *Ziphras Saracenicas* nonnulli dicunt; de quibus nunc agendum est.

Vox *Ziphra* (vel *zifera*, vel *siphra*, vel *ciphra*, variis enim modis scribitur) est planè Arabica. Sed non uno semper eodémq; sensu usurpatur. Descendere videtur vel ab Hebræorum סְפַר *sephar*, (uti Schindlero placet, in ipsius Dictionario Pentaglotto,) quod & *numerare* significat & *describere* sive *notare*: Et quidem si a priori significatu descendere putetur, significaret propriè *notas numerarias*, quo sensu novem illas figuras numerarias *Siphras Saracenicas* appellamus; si autem a posteriori, quaslibet etiam alias *Notas* vel *Characteres* rei alicujus aut vocis, vel etiam literæ indices, quo sensu *furtivas literarum notas*, ad occulte scribendum inventas, *Ziferas* appellat Baptista Porta, ut & alii. Vel, si ea derivatio minus placeat, deduci potest (et, credo, rectius) ab Arabico צפר *Zaphara*, quod *vacuum esse* vel *inane* significat, uti docet D. Golius in Lexico suo Arabico: adeoq; de *nihili* sive *nullitatis* notâ præcipuè intelligenda erit. *Ciphra* quid? Unde dicitur.

Vox illa ab Arabibus ad nos delata, pro certa cujusdam Numeri *Nota*, seu charactere certi alicujus Numeri indice, passim occurrit; quo sensu decem illæ, nunc vulgo receptæ, figuræ Arithmeticæ vocantur *Ziphræ* seu *Ciphræ*. Nonnunquam tamen, & quidem frequentius, non de illis omnibus, sed de illarum unica, vox illa dicitur; Nempe de Circello, *Nullitatis* seu *Nullius* nota: (unde & metaphorice, de re seu persona inutili, οὐδενὸς ἀξίας dicitur, *instar ciphræ*, tanquam *nullius numeri*:) Atq; hoc quidem

quidem ſenſu ſæpius & apud alios, & apud nos deinceps occurret.

Occulte ſcribendi ratio.

Nonnunquam autem vox illa latius patet, ut non tantum decem illas, quæ in Arithmetica uſurpantur, ſed ſimpliciter quaſlibet vel literarum vel etiam vocum aut rerum Notas, vel brevitatis vel etiam occultationis cauſa adhibitas. Atque hoc ſenſu *Iohannes Baptiſta Porta*, Neapolitanus, librum *De Zipheris, ſive furtivis literarum Notis*, conſcripſit: Trithemius item *de Steganographia* libellum conſcripſit, abſtruſum ſatis; quem inter alios, Guſtavus Silenus explicandum ſuſcepit. Item Blaiſius Vigenerius (Gallice) & alii de ejuſmodi Zipheris libros ediderunt. Sed & novæ indies methodi per *Zipheras* ſcribendi excogitantur, & in rebus majoris momenti, ab iis præſertim qui Principibus ſunt a ſecretis, uſui aptantur: ſaltem quoties aliquid occulte ſcribendum eſt, quod nollet ſcriptor etiam intuentibus innoteſcere. Hinc voces illæ *Ciphrandi* & *Deciphrandi* ortum habent; eſt enim *ciphrare*, aliquid ciphris commitere, ſeu occulte ſcribere; *Deciphrare* vero eſt ciphras explicare vel quid ſub ciphris occultetur interpretari.

Atq; hæc quidem occulte ſcribendi ratio flagrante nuper apud nos Bello Inteſtino admodum erat familiaris; adeo ut vix quiſquam eſſet alicujus notæ vir, qui non, in rebus majoris momenti communicandis, hujuſmodi ciphras adhibere ſolebat, ſcriptaſq; ad ſuos epiſtolas hujuſmodi involucris obtegere; ut, ſi in hoſtium manus perveniant, non intelligantur.

Et hujuſmodi quidem ſcripta non pauca, in itinere ſuo intercepta, nobis explicanda tradebantur; diverſis quidem occultandi methodis involuta, adeoq; alia aliis explicatu difficiliora; & quidem nonnulla tam inſuperabili difficultate obvoluta videbantur, ut fere de illorum explicatione deſperaverim, nec niſi poſt diuturnam inquiſitionem incredibili labore tandem ſuperaverim. Quorum non pauca ſpecimina in publica Bibliothecâ Bodleiana Oxoniæ conſervanda tradidi, ubi & conſpicienda manent.

Duplex erat hujuſmodi apud Romanos ſcribendi ratio; quarum veſtigia ſaltem ad nos pervenerunt: Altera per *Notas* (ut loquuntur) altera per *ſiglas*: Quarum utraq; partim expeditionis, partim occultationis cauſa erat adhibita.

Romanorum *Siglæ*.

Per *Siglas* ſcribere dicebantur, cùm ſingulis fere literis totidem

dem voces designabant. Sic Romanorum Nomina & Prænomina non raro pingebantur. Sic *M. T. Cicero*, pro *Marco Tullio Cicerone*, ponitur. Ita per C, *Caium*; per D, *Decium*; per P, *Publium*; per Q, *Quintum*; per Cn, *Cneum*; per A, *Aulum*, intelligebant: (unde lis illa, inter Criticos, de illius nomine qui *Noctes Atticas* scripsit; quem alii *Agellium*, alii *Aulum Gellium*, dicendū putant.) sic S. P. Q. R. *Senatum Populumq; Romanum* significabat: (quod Beda noster Romæ agens, uti refert Erasmus, sciscitanti hospiti cuidam, qui saxis inscriptum crebrius offendisset, quid vellet; Respondit, *Stultus Populus Quærit Romam.*) S.P.D. *Salutem plurimam dicit*: A. U. C. *Anno urbis conditæ*: M. S. *Memoriæ sacrum.* aliaq; multa.

His sunt consimiles Hebræorum Abbreviaturæ, quas *Rashe Teboth* dicunt: dum varia nonnunquam vocabula initialibus tantum literis designant. Sic אשר לברכה זכרו : אלו״ *cujus memoria benedictioni*, seu *benedicta sit*: quam formulam adjicere solent quum Rabbinos quosdam mortuos nominant; prout nos *Beatæ Memoriæ*. Aliaq; hujusmodi innumera videnda sunt apud Buxtorfium in libello quem scripsit *De Hebræorum Abbreviaturis*. Sic & Rabbinorum Nomina vulgo scribunt: ut

רמבם (Rambam) *Rabbi Moshe ben Majemon*, seu *Maimonides*.

רמבן (Ramban) *Rabbi Moses ben Nachman*, seu *Nachmanides*.

רדק (Radak) *Rabbi David Kimchi*.

רשי (Rashi) *R. Solomon Jarchi*.

רלבג (Ralbag) *R. Levi B. Gershom*. &c.

Siglarum mentio est apud Justinian. *in Pandect* σημείοις ἅπερ σίγλας καλοῦσι. Et σημείων ejusmodi meminit etiam *Plut.* in *Cat. min.* *Siglas* vero dicebant Romani quasi *singulas*, quia singulis literis totidem voces significabant; vel etiam quasi *sigilla*, idq; vel propter secretum scribendi modum, vel potiùs quòd sint *signula* seu parva *signa*; hæc enim est prima ac propria sigilli notio unde & *sigillaria*. Quod autem litera *n* excidit in *sigla*, quæ habetur in *singula*, illud parum est; præsertim cum sit literæ g proxima: Dicimus enim *singuli*, *sigillatim*; *Lingua*, *ligula*; *signum*, *sigillum*, (unde Anglicum *Seal*, sicut a *Regula*, *Rule*,) sic *Tignum*, *tigillum*, quæ forsan a *tango*, quia res

contiguas copulant; vel, ut Scaligero placet, *Tignum* a *tegendo*, ut *lignum* a *legendo*, nam tignis & tegulis tectum constat. Sic a *jungo*, (Anglice *joyn*) fit *jugum*, Anglice a *Yoke*; (Græce ζεύγω, ζευγνύω, ζεῦγος,) unde forsan *jugulum*, non modo quia Jugum (cervicem pariter ac) jugulum cingat, sed potius quia humerus uterque ad jugulum coeunt & conjunguntur; qua ratione etiam juguli ossa κλεῖδες & κλεῖδες Græce, Latinè *Claviculæ*, appellantur, quia utrumq; humerum connectunt; sub his autē claviculis est celeberrima illa Arteriæ magnæ, cor ipsū nuperrimè egressæ, distributio; unde a communi trunco quasi per varios ramos sanguis arterioſus in varias corporis partes derivatur: Hic & venæ minores a plerisq; corporis partibus in communem venæ cavæ truncū conjūguntur. Hinc est quod sæpissime Homerus, lethaliter vulneratos, *sub claviculis transfixos* dicit: est autem illi *sub claviculis figere* perinde ac Latinis *jugulare*, hoc est, jugulum petere; quod ideo pro lethali vulnere ponitur, non modo propter violatam Trachæam sive Asperam arteriam, sed potissimum quia eadem opera tam Aortæ sive Arteriæ Magnæ quam Venæ cavæ truncus facile dissecantur; adeóq; brevissimo compendio (quod & laniis notum est) universum corpus tam venoso quam arterioso sanguine citissime evacuatur. Sed hæc obiter de *jungo* & *jugo*, ubi excidit *n* non minus quam cum a *Angulis*, *figlis* dicimus. Sed & a *jungo conjugem* & *conjugium*; & a *jugo*, *jugales*, sic enim boum paria dicimus qui sub eodem jugo conjuncti seu coniugati. Sic a πηγνύω vel πήγνυμι tam *figo* dicitur, quam *pango pegi* (quod significat *jungo*) atque hinc *compingo*, *compactus*, *compages*, &c. Sed de Siglis hactenus.

Romanorum Notæ.

Præter siglas vero, etiam *Notas* habuerunt Romani; Quarum hæc est differentia; *figlæ* sunt abbreviaturæ per ipsas Alphabeti literas factæ; *Notæ* vero, abbreviaturæ per characteres aliunde adductos. Hinc *Notarii* apud Romanos dicti, qui brevibus *notis* aliorum sermones exceptos scribebant, ut apud nos Stenographi. Hujusmodi Notæ apud veteres satis erant frequentes: & exstat adhuc libellus *de Notis Senecæ*, & *Tironis liberti Ciceronis*, inter quas tamen nonnullas seriùs adjectas esse res ipsa loquitur, nec quisquam qui ipsas perpendit dubitare poterit.

Cum igitur, pro Numeris, ponuntur literæ Alphabeticæ, ut M pro *Mille*, C pro *Centum* &c.; est hæc scriptio per *Siglas*: cum verò alii characteres apponuntur, quales sunt ciphræ Saracenicæ

nicæ, est scriptio per *Notas*; prout notæ a siglis distingui solent. Quas vero olim *notas* dicebant, nunc dierum potius *Ziphræ* dicuntur; quæ vel ad expeditionem vel ad occultationem scriptorum adhibentur.

Atq; hactenus de *Ziphrarum* nomine diximus: *Saracenicas* verò vel *Arabicas* dicimus; quia ab Arabibus ad nos devenerunt, ante annos plus minus quadringentos huc adductæ. An autem Arabes, seu Saraceni, has ipsi invenerint, an ab antiquis Phænicibus (quod non videtur probabile, cum Arabes doctrinam suam ut plurimum a Græcis hauserint, non a Phænicibus traditam continuaverint) aut potius ab Indis (quod dicendum videtur) aut quibusvis aliis acceperint, ab illis potius quam a nobis determinabitur. Cum autem nos illas ab Arabibus accepisse sit extra dubium, unde illas habuerint Arabes ex eorum potissimum scriptis inquirendum est. Cumq; illi earum inventionem Indis tribuant, non est cur nos eâ de re dubitemus. Eorum autem doctissimus Scholiastes *Alsépadi* (uti a Cl. *Pocockio* nostro, istarum linguarum cognitione nulli secundo, accepi) in commentariis suis ad elegantissimi Poetæ *Tograï* poema *Lamiato'l Ajam* dictum, notat *Indos de tribus suis inventis gloriari, ludo Scacchii, Figuris numericis, & libro* Golaila Wadamna *dicto*, (qui liber in Arabicam, Græcam, & alias linguas conversus, Fabulis Æsopicis, ad istius imitationem factis, ansam dedit:) nec ipse interim huic Indorum gloriæ quicquam derogatum it. Atq; huic congruit illud quod testatur *Maximus Planudes* in suæ Arithmetices initio (prout in duobus Codd MSS. exstat in Bibliotheca Bodliana) cui Titulus Μαξίμου τοῦ Πλανούδη λογιστικὴ Ἰνδικὴ, (vel Ψηφοφορία κατ' Ἰνδοὺς) ἡ λεγομένη μεγάλη: Quem librũ ab his verbis orditur, Οἱ τῶν ἀστρονόμων φιλοσοφώτεροι, ἐπεὶ ὁ μὲν ἄριθμος ἔχει τὸ ἄπειρον, τοῦ (δὲ) ἀπείρου γινῶσις οὐκ ἔστιν, ἐφεῦρον σχήματά τινα καὶ μέθοδον δι' αὐτῶν, ὡς ἂν τὰ τῶν ἐν χρήσει ἀριθμῶν εὐσυνοπτότερον κατανοῆται καὶ ἀκριβέστερον. εἰσὶ δὲ σχήματα ἐννέα μόνα, ἃ καὶ εἰσὶ ταῦτα ι μ μ ϛ ϛ ϙ ψ ν λ ϙ. Τιθέασι δὲ ἕτερόν τι σχῆμα, ὃ καλοῦσι τζίφραν, κατ' Ἰνδοὺς σημαῖνον οὐδέν· καὶ τὰ ἐννέα δὲ σχήματα καὶ αὐτὰ Ἰνδικά ἐστιν· ὁ δὲ τζίφρα γράφεται οὕτως ο. τούτων τῶν ἐννέα σχημάτων ἕκαστον κατ' αὐτὸν μόνον κείμενον, εἰτοῦν κατὰ τὴν πρώτην χώραν οὐδὲ τῆς δεξιᾶς χειρὸς ἡμῶν ἀρχομένων, τὸ μὲν ι σημαίνει ἕν, τόδε μ δύο,

Ziphræ Saracenicæ,

τόδε ϣ τρία, τόδε ϛ τέσσαρα, τόδε ϐ πέντε, τόδε ϥ ἕξ, τόδε ν ἕπτα, τόδε ʌ ὀκτώ, τόδε ϙ ἐννέα. κ̣τ̣ ἢ τὴν δευτέραν χώραν τὸ μὲν ι δέκα, τὸ ϙ εἴκοσι, τὸ ϡ τριάκοντα, κ̣ὶ ἑξῆς. Ubi hæc duo confirmat Planudes, nempe figuras illas ab Indis originem habuisse, atq; etiam *Ziphram* apud Indos (fortasse rectius dixisset Arabes) significare οὐδέν, seu *nihil*; adeoq; a צפר *zaphara* potiùs quam ספר *saphar* deductam; quod & confirmat ipsius scriptura, si enim a ספר descendisset σίφρα potius quam τζίφρα scriberetur. Nos autem eas ab Arabibus accepisse, præter communem omnium consensum, ulterius adhuc testatur, consensus ille qui inter Arabum characteres quibus hodie utuntur, (quiq; ab illis Planudis non multum absunt,) cum iis qui numeris designandis apud nos inserviunt. Levis enim est in plerisq; characteribus discrepantia, nisi quod qui apud Arabes sive proni sive supini jacent, apud nos eriguntur: ut ex apposita comparatione videre est

o					ϐ				
·	ι	ϙ	ϣ	ϛ	o	ϥ	ν	ʌ	ϙ
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Notat autem Erpenius (apud quem hi Characteres exstant) o circellum ab eorum aliquibus pro nullitatis nota haberi (ut apud nos) qui igitur distinctam habent quinarii notam; apud alios verò circellum illum quinarii numeri indicem, qui interim puncto crassiusculo nullitatem designant. Quod & Arabum libri Manu-scripti testantur. Et quidem in MSS. tam Græcis quam Latinis (paulo vetustioribus) figuræ numerariæ minus adhuc ab Arabum figuris differunt, quam quibus hodie utimur. Quî autem ab Arabum figuris sensim deflexerint, donec ad eas quibus jam utimur figuras pervenerint, qui Codices Manuscriptos Græcos Latinosq; succedentibus seculis exaratos pervolverit, facile perspiciet, quod nos præ characterum inopia typis exprimere haud valemus.

Atq; hactenus de ipsis Ciphris seu figuris Arithmeticis: sequitur ut ipsarum usum ostendam.

C. A. P.

CAP. X.

Figurarum Numeralium Valores; primarius & ſecundarius. Locus. Periodus. Ciphræ uſus. Fractiones Decimales. Gradus Aſcendentes & Deſcendentes, in proportione decupla.

SUnt illæ (quas diximus) figuræ Arithmeticæ vulgares, omnino decem: quarum valores jam explicandi ſunt. Prima o *Nullum* valet, ſive Numeri negationem, & vulgo *ciphra* dicitur: Reliquæ novem totidem numeros ſignificant (& *figuræ ſignificativæ* dici ſolent:) nempe 1 *Unum.* 2 *Duo.* 3 *Tria.* 4 *Quatuor.* 5 *Quinque.* 6 *Sex.* 7 *Septem.* 8 *Octo.* 9 *Novem.* Suntq; hi illarum *valores Primarii*, quos nempe per ſe ſignificant. Habent enim & valores *Secundarios*, quos non per ſe, ſed ratione ſedis ſeu loci ubi reperiuntur, induunt: Sicut enim aliud eſt *duos boves* dicere, aliud *duos homines*; ita & aliud eſt *duas unitates* dicere, aliud *duas decades*, ſive *duas centurias*; nam quamvis in his omnibus *numerus numerans* idem ſit, (nempe *binarius*,) non tamen idem *numerus numeratus*. Hic autem characterum valor ſecundarius ſubinde mutatur, pro ratione *Sedis* ſeu *Loci* ubi reperiuntur. *Figurarum valor primarius.*

Cum igitur horum characterum plures in continua ſerie collocantur; locus ille qui ad dextram eſt, *primus* dicitur; qui illi proximus eſt ſiniſtram verſus, *ſecundus* dicitur; & ſic deinceps reliqui quotquot ſunt loci numerandi ſunt. Ut poſitis his figuris 1654, eſt 4 in loco primo, 5 in loco ſecundo, 6 in tertio, & 1 in quarto. Ubi obiter notandum eſt me locum dextrum (in charta vel abaco) illum dicere, qui legentis dextræ opponitur, & eâdem ratione ſiniſtrum qui ſiniſtræ: quod ideo facio, quoniam vulgatus loquendi uſus apud pleroſq; ſcriptores hic eſſe ſolet, neq; ſoleo quidem a recepto loquendi more niſi coactus diſcedere, ne, dum accuratius loqui velim, minùs intelligar. Non ignoro tamen, quod ſi accuratiùs loqui velimus, ea pars chartæ ſeu libri dextra dicenda eſſet, quæ inſpicientis ſiniſtræ opponitur, ſiniſtra verò quæ dextræ; ſupponitur enim liber inſpectus oppoſita facie nos intueri, non terga dare: Atq; hinc eſt, quòd Fæciales, dum Gentilitia Scuta, quibus familiarum Inſignia inſcribuntur, expo- *Figurarum Sedes, ſeu locus, quid.*

nunt, eam ſemper Scuti partem Dextram appellant, quæ inſpicientis ſiniſtræ opponitur; quia nempe inſpiciens rem inſpectam adverſa fronte ſupponitur intueri. Verum cum apud alios alius ut plurimum mos loquendi obtinuerit, cum vulgo loquendum eſſe duxi; adeoq; (ut alii, ſic ego) eam inſpectæ chartæ dextram appello partem, quæ inſpicientis dextræ objicitur; ideoq; figuram loco primo poſitam, ad dextram poni dico; quæ verò in ſecundo loco, illam dico quæ proxima adeſt ſiniſtram verſus; & ſic deinceps.

Figurarum valor ſecundarius.

In primo quæ occurrit loco figura, tot Unitates numerat quot ipſius valor indicat: quæ in ſecundo, tot Decades: quæ in tertio, tot Centurias: quæ in quarto, tot Millia; quæ in quinto, tot Decades Millium: in ſexto, tot millium Centurias: in ſeptimo, toties millena millia, ſeu tot Milliones, (prout nunc dici ſolet:) in octavo, tot millionum Decades: in nono, tot Millionum Centurias: in decimo, tot Millionum Millia, ſeu millies millena millia: & ſic deinceps, pro ſingulis locis, continua proportione decupla valorem ſemper augendo: prout ipſam numerorum diſpoſitionem ſive ordinationem, in decupla proportione procedere, ſupra dictum eſt: Et hac ratione numerus his characteribus exhibitus 1656, eſt *Mille ſexcenta quinquaginta & ſex*, ſeu *unum Mille, ſex Centuriæ, quinq; decades, & ſex inſuper unitates.* Atq; hunc figurarum valorem *ſecundarium* appello; quia nempe ex ſede ſeu loco ubi reperitur conſurgit.

Periodus quid.

Sed & ipſa etiam Loca, quo melius intelligantur, præſertim ubi plura occurrunt, in *Periodos* diſtingui ſolent: Ita nempe ut tria priora loca minima primam periodum conſtituant; tria proxima, ſecundam; & ſic deinceps, ſingulis periodis tria loca aſſignando. Has autem periodos, (ubi ſaltem plures occurrunt, ut in grandioribus numeris,) pleriq; vel punctulis ſuprapoſitis, vel alia ad libitum diſtinctione, diſtinguere ſolent, quò promptius numerus efferatur.

Periodus autem prima *Unitates* denotat; ſecunda denotat *Millia*; tertia verò *millena millia*; & ſic deinceps. Ut enim locus locum ſuperat proportione decupla, ſic Periodus Periodum proportione Millecupla. Erit igitur numerus iſte

. : .

246801357 9, ſic efferendus; *bis mille & quadringenta ſexaginta octo*

octo *Millionez*, (seu *Millena millia*) *tredecim Millia, quingenta septuaginta novem.* Et eodem prorsus modo de Numeris aliis omnibus judicandum est; tam ubi numerus datus, est suis characteribus describendus; quàm ubi characteres propositi, sunt suis nominibus explicandi: Eadem enim utrobiq; est ratio.

Ubi notandum est, circellum illum o, (*Ciphram* vulgo dictam, quam esse *nullitatis* notam supra diximus,) quamvis per se nihil significet ubicunq; ponatur, (perinde enim est sive nullas unitates, sive nullas Decadas, sive nullas Centurias, nullave Millia dicamus; nihil enim utcunq; ponimus:) Non redundat aut nulli inservit usui, sed necessario adhibetur ut locum saltem sua præsentia compleat; unde figuræ omnes in locis superioribus positæ justum suum valorem obtineant, verbi gratia; si, in numero proximè appositio, 2468013579, deesset circellus sexto (a dextra) loco positus, adjuncta figura 8 numeri octonarii, non septimo, sed sexto esset loco; adeoq; non octies millena millia, sed solum octingenta millia, significaret; atq; idem de reliquis judicandum esset; nempe figuram 6 non octavo (ut nunc) sed septimo esset loco, & 4 octavo, 2 nono; adeoq; earum valores decuplo minores essent. Sic 1 *Unum* significat, (quia primo loco;) 10 *Unam decadem*, (quia 1 est loco secundo, & quamvis adjuncta ciphra o per se nihil significet, hoc tamen præstat ut figura 1 sit jam loco secundo, quæ secus esset primo:) 100 *Unam Centuriam*. &c. Si vero locis supremis ponantur ciphræ, nulli prorsus sunt usui, nullius saltem necessitatis, sed redundant prorsus; tantundem enim significant 0001, 001, 01, & 1. Fieri quidem nonnunquam potest ut Elegantiæ gratia, vel quo numerorum supputandorum collatio commodior fiat, siquando summæ variæ sint in unam contrahendæ (ut in exsemplo appositio,)

Ciphra, seu Nullitatis nota.

libræ.	solidi.	denarii.
13	12	10
24	08	06
05	04	01

aut alia ejusmodi leviori causa accidentali, ejusmodi redundantes ciphræ scribuntur; sed tantundem significant acsi prorsus abessent. Atque hinc est, quod, licet in hac numerorum notatione, per notas has numerales, hujusce circelli sive ciphræ

phræ uſus ſit neceſſarius, quia valores notarum pro ratione loci ubi reperiuntur augeri poſſunt aut minui: Ubi tamen per Literas Alphabeticas numeri ſcribuntur, quarum valor conſtans eſt & immutabilis, (prout apud Latinos, Græcos, Hebræos, alioſq; antiquitus fieri diximus,) hujuſmodi notæ nullus omnino eſt uſus, unde & nullam excogitarunt: Nam, verbi gratia, MD, *Mille & quingenta* ſignificant, ſive alii ſequuntur numeri, ſive non.

Atq; hactenus harum Figurarum Numeralium ordinarium ſeu vulgarem Notationem, ſeu (ut loquuntur alii) Numerationem explicavi, prout nempe uſu frequentiori ſolent occurrere: ita nempe ut Locus ad dextram ultimus, vel (ſi libet) primus, qui & omnium infimus eſt, ſemper habeatur pro unitatum Loco.

Fractiones Decimales. Recentiores verò, qui de *Fractionibus Decimalibus* agunt, (ultra quam Priores ſolebant Arithmetici,) non modo quotlibet ſupra Unitatum locum aſcendentia ſiniſtrorſum ſupponunt Loca; ſed & etiam infra Unitatum locum locâ quotlibet Deſcendentia dextrorſum imaginantur, quibus *Fractiones* (ut loquuntur) *Decimales* ſcribantur.

Ut hoc autem melius percipiatur; ſciendum eſt quemlibet locum ad ſiniſtram progrediendo antecedentis ad dextram decuplum valere, ut ſupra declaratum eſt; contra verò, quemlibet dextrorſum procedendo valere antecedentis ſubdecuplum. Quoniam nempe decem Unitates conſtituunt unam Decadem, & decem Decades unam Centuriam, decem vero Centuriæ unum Mille, &c. (ſiniſtrorſum procedendo:) igitur vice versâ (dextrorſum procedendo) unum Mille continet decem Centurias, & una Centuria decem Decadas, una verò Decas decem Unitates: Atq; hic vulgo ſiſtitur neq; ulterius dextrorſum proceditur, quoniam Unitatum locus ſupponitur infimus ſivè ad dextram ultimus. Si verò libeat plures adhuc dextrorſum locos aſſignare infra Unitatum locum cenſendos: eodem quo priùs modo procedendum erit, nempe quælibet Unitas continebit decem ejuſmodi partes ſeu quantitates (proximo dextrorſum loco numerandas) quarum decem conſtituant Unitatem, hoc eſt, quælibet Unitas continebit decem partes decimas; &, eâdem ratione, quælibet pars decima continebit decem partes centeſimas; & quælibet centeſima

decim

decem milleſimas; & ſic deinceps: Ideoque quælibet figura loco infra unitates primo poſita deſignabit tot partes decimas; quælibet ſecundo totidem centeſimas; & quælibet tertio infra unitates loco, tot partes milleſimas deſignabit; & ſic deinceps quouſq; libet.

Exemplum eſto hic numerus 3579|753; (ubi præter integrorum numerum 3579, adjunguntur partes decimales |753.) Figura 9, unitatum loco poſita, ſimpliciter *novem* (ſeu *novem Unitates*) deſignat: figura 7, quæ ad ſiniſtram eſt, *ſeptuaginta* (hoc eſt, *ſeptem decades*,) deſignat; at quæ ad dextram ſeptem δεκατημόρια (ſeu, *partes decimas*) innuit: Item 5 ad ſiniſtram *quingenta* (ſeu *quinque centurias*) ſignificat: at 5 ad dextram *quinque partes centeſimas* (quinq; ἑκατοστημόρια) ſignificat: ſic & 3 ad ſiniſtram, *tria millia* denotat; at 3 ad dextram, *tria χιλιαστημόρια*, ſeu *tres partes milleſimas*. Adeoq; totus ille numerus 3579|753 denotat *ter mille quingenta ſeptuaginta & novem* integra, & inſuper (7 partes decimas, 5 centeſimas, & 3 milleſimas, ſeu) 753 *partes milleſimas*: (nam 50 *partes milleſimæ* tantundem valent ac 5 *partes centeſimæ*; & 700 *partes milleſimæ* tantundem ac 7 *partes decimæ*; adeoq; conjunctim 753 *partes milleſimæ*, tantundem ac 7 *decimæ*, 5 *centeſimæ*, & 3 *milleſimæ*.) Figuræ autem illæ |753 poſt unitatum locum appoſitæ, (quæ *partes* ſeu *Fractiones Decimales* exprimunt) ſunt ab integris, interpoſito punctulo vel *ſeparatrice linea*, diſterminandæ; ut innoteſcat Unitatum locus, & conſequenter reliqui tam ſupra quam infra locum Unitatum, unde tam ſingularum notarum quam totius Numeri valor æſtimandus eſt.

Gradus Aſcendentes & Deſcendentes.

His ita explicatis; mihi quidem omnino commodum videtur, ſingula numerorum loca ſic diſtinguere, ut, poſito Unitatum loco indifferenter ſive ad aſcenſum ſive ad deſcenſum, (ut qui eſt quaſi utriuſq; communis terminus) loci reliqui (prout gradatim vel augentur vel diminuuntur) *Gradus* dicantur vel *Aſcendentes* vel *Deſcendentes*. Ita, in numero propoſito 3579|753, præter figuram 9 unitatum loco collocatam, accedunt gradus *Aſcendentes* (primus, ſecundus, tertius, ſiniſtrorſum computandos, & totidem *Deſcendentes* Dextrorſum. Adeoq; ſi graduum Aſcendentium indices ponantur 1,2,3,&c; erunt è contra deſcendentium indices — 1, — 2, — 3, &c. vel 1, 2, 3, &c. Atq; hoc ſignificatu graduum Aſcendentium &

Descendentium deinceps facturus sum mentionem. 3. 2. 1. 0. 1. 2. 3.
3 5 7 1 9 1 7 5 3

Atq; hæc de Figuris Arithmeticis, juxta continuam proportionem decuplam dixisse sufficiat.

CAP. XI.

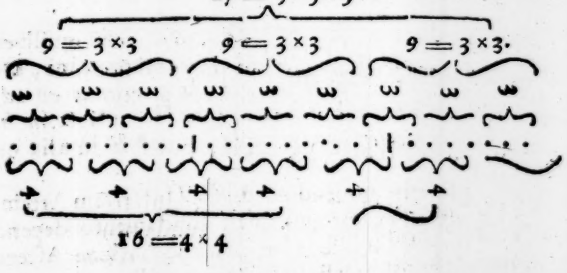
Gradus Assendentes & Descendentes in quacunq; proportione. Algebræ fundamentum. Potestates Algebricæ cum Geometricis dimensionibus comparantur. Earum appellationes & characteres. Potestates illæ per Gradus Arithmeticos, quàm per Geometricas dimensiones, aptius explicantur. Algebrica notatio ulterius traditur. Algebræ veterum & Recentiorum differentia. Utriusq; usus exemplo ostenditur.

Graduum Assendentium & Descendentium consideratio eadem est in alia qualibet proportione, quæ in Decupla.

NUmeros vulgo in proportione decuplâ ubiq; gentium dispositos esse, superiùs diximus; atq; huic distributioni aptatas esse vulgares notas sive figuras Arithmeticas, earumq; locos seu gradus tam assendentes quam descendentes. Sed & monuimus, quamvis aliam proportionem in disponendis Numeris assumi potuisse, aut etiamnum (ubi opus est) posse. At quæcunq; demum adhibeatur proportio, modo ea continua sit, eadem omnino erit Graduum tam Assendentium quàm Descendentium consideratio atq; in proportione Decuplâ.

Exempli gratiâ. Si apponantur Unitates *viginti septem*: constituunt illæ (ut patet) in proportione decuplâ, *duas Decades cum septem residuis Unitatibus*; ideoq; in gradu primo assendente (qui decadum locus est) ponenda est figura 2 (propter *duas* decades,) & (ob residuas *septem Unitates*) in unitatum loco figura 7: ut 27 exprimant *viginti septem*, sive *duas Decades cum septem insuper Unitatibus*. Si vero eidem unitatum multitudo in continua proportione quadrupla disponatur; emerget *Quaternionum quaternio* unus, & Duo insuper simplices *Quaterniones*, cum Tribus residuis *Unitatibus*: ponenda igitur (quoad hanc proportionem) in gradu secundo assendente figura 1, (quâ quaternionum quaternio *unus* designetur;) & in gradu assendente primo nota 2, (propter *duos* quaterniones simplices:) & deniq; (propter *tres* residuas unitates) in unitatum loco figura

gura 3: adeoq; 1, 2, 3, exhibent *unum quaternionem quadruplum, duosq; simplices quaterniones, cum tribus insuper unitatibus*, seu,



quod tantundem est, *viginti septem*. Si deniq; proportione triplâ disponantur: emerget præcisè *ternionum triplicatorum ternio* unus: ponenda igitur est, loco tertio ascendente, figura 1; & in reliquis ciphra seu 0, quia nullus supereſt innuendus vel ternionum ternio, vel ternio simplex, vel etiam unitas, horum igitur loci ciphris erunt supplendi; ut tandem 1, 0, 0, 0. (juxta continuam proportionem triplam) exhibeat præcisè *unum ternionum triplicatorum ternionem*, quod tantundem est atq; *viginti septem* Et pari modo de alia quâvis proportione dicendum esset. Hoc est,

In proportione { decupla, 2,7. / quadrupla, 1,2,3 / tripla, 1,0,0,0. } tantundem valent.

Pariter dicendum est de gradibus Descendentibus. Nam in proportione quadrupla, erit gradus descendens primus, *Quadrantum* locus; secundus verò, *quadrantum quadrantes* continebit, &c. In proportione triplâ, erit gradus descendens primus, *trientum* locus: secundus vero, *trientum trientes* continebit; tertius, *trientum trientes trisectos*; Et sic deinceps in infinitum descendendo, sicut ex aliâ parte in infinitum proceditur ascendendo. Hujusce rei exsemplum satis insigne passim occurrit in fractionibus (ut loquuntur) Astronomicis; ubi Integra supponuntur dividi in partes sexagesimas & sexagesimarum sexagesimas &c. hoc est,

minuta prima, ſecunda, tertia, &c. ad dextram deſcendendo; & contra ad ſiniſtram aſcendendo colliguntur in Aggregata Sexagecupla, & Sexagecuplorum ſexagecupla, &c. quæ vocantur *Sexagena prima, ſecunda, tertia, &c.* hoc modo.

'''' ''' '' ' 0 , ,, ,,, ,,,,

49, 36, 25, 15, 1. 15, 25, 36, 49. ubi quilibet locus valet ſexagecuplum loci ſibi ad dextram proximi, & contra ſexageſimam partem illius qui ſibi proximus eſt ad ſiniſtram. Quod autem vulgò fit in ratione Decupla, & in fractionibus Aſtronomicis in Sexagecupla, poteſt & in alia quavis ratione fieri.

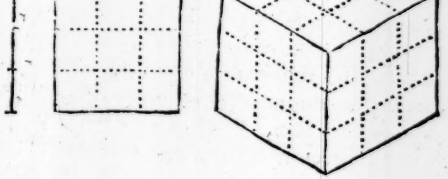
Hinc Algebræ fundamentum.

His ita explicatis; monendum duco, Univerſam Artem *Algebræ* ſive *Analytices* ex hoc uno quaſi fundamento dependere. Atq; ſi hæc, quæ de Gradibus (in quacunq; ratione Aſcendentibus & Deſcendentibus) diximus, ſatis intelligantur; magnam exinde affulgere lucem ad *Poteſtates* (uti vocantur) *Algebricas* intelligendas, & ritè tractandas. Nam revera, quod nobis nunc eſt *gradus* (ſive Aſſcendens, ſive Deſcendens,) *primus, ſecundus, tertius,* &c. illud eſt Algebriſtis *Latus, Quadratum, Cubus,* &c. vel *Poteſtas prima, ſecunda, tertia,* &c. cum hoc tamen diſcrimine: Quod illi per plurium dimenſionum Geometricarum ſuppoſitionem conantur explicare, nos inter Arithmeticæ fines continemus: vel etiam, ſi in materia Geometrica velimus illud oſtendere, poſſumus illud per Quantitates Homogeneas (nempe vel per ſolas lineas, vel per ſolas ſuperficies, vel per ſola corpora) præſtare, quod alii per Heterogoneas (nempe per lineas, & ſuperficies, ſimul cum ſolidis, aliiſq; etiam plurium adhuc dimenſionum imaginariis quantitatibus comparatas) præſtare ſatagunt. Hoc autem cum olim vel ignorabant, vel non ſatis attendebant, vel forte diſſimulabant, adeoq; occultabant Algebriſtæ Veteres: coacti fuere multa ſpecialiter de Lineis, de Planis, & de Solidis, tradere & demonſtrare, quæ rectiùs (& quidem facilius) de numeris (vel, ſi libet, de Rationibus) generaliter eſſent & tradenda & demonſtranda; quæ deinde, ubi opus eſſet, (ſive in re Geometrica, ſive in quavis alia) ſpecialiter eſſent accommodanda, non minus quàm reliqua Arithmetica tota. Cur autem illi ad quantitates Geometricas (potiùs quam Arithmeticas) & quidem Heterogeneas (potius quam Homogeneas) cor fugerit; nullam ego rationem

video

video magis probabilem, quam quod Arithmeticorum *Unum* (non verò, ut oportuit, *Nullum*) cum *Puncto* Geometrico comparabant; adeóq; non animadvertebant quo pacto possent Arithmeticè illud exhibere quod in Geometricis observaverant: aut etiam fortasse, quoniam Elementa Geometrica pro totius Matheseos basi reputabant, putabant etiam Arithmetica omnia eò redigenda esse, neq; de horum veritate meliùs constare posse quàm si inde comprobentur; cum tamen revera res Arithmeticæ altioris sint & magis abstractæ naturæ, quàm Geometricæ; & v.g. non, quia *linea bipedalis bipedali addita facit quadripedalem*, ideo *duo & duo faciunt quatuor*; sed potius, quia hoc, ergo illud. Totum autem hoc quicquid est negotii meliùs percipietur postquam Notationem sive Numerationem Algebricam (ut loquuntur) seu Cossicam, ejusq; originem, explicavero: Quod jam facturus sum.

Observarunt illi (qui numeros Cossicos ordinarunt) ex principiis Geometricis, quod si *Linea* aliqua ad libitum assumpta (puta, trium pedum longa;) ducatur in se, (hoc est, si tantum extendatur, sive moveatur directè in latum, quantum est in longum extensa,) fiet *Quadratum*, cujus *Latus* erit linea assumpta: si vero Quadratum hoc ducatur in suum Latus *Potestatum Algebricarũ cum Dimensionibus Geometricis comparatio. Earumq; appellationes.*



(hoc est, si tantum extendatur, seu moveatur directe in altum, quantum est vel in longum, vel in latum extensum; seu, quod perinde est, si altitudinem acquirat Lateris longitudini æqualem) *fiet Cubus*, cujus itidem latus erit assumpta linea. Observârunt deinde Aream seu magnitudinem investigari multiplicando numerum lateris in seipsam; (ideoq; cum latus sit trium

trium pedum longum, quoniam ter tria sunt 9, continebit Area Quadrati novem pedes quadraticos:) Item si Area quadrati multiplicetur in suum latus, emerget magnitudo Cubi, seu potius multitudo pedum cubicorum in cubo contentorum; (adeoq; si area quadrati 9, multiplicetur per latus 3, prodibit numerus 27, quæ est magnitudo Cubi, seu multitudo pedum cubicorum in illo cubo contentorum cujus latus est trium pedum longum.) Hæc autem invicem comparantes, quoniam figura quæ ex latere in seipsum ducto emergit *Quadratum* dicitur, & quæ emergit ex quadrato in latus ducto *Cubus* dicitur; ideo & productum ex numero in seipsum multiplicato numerum *Quadratum* appellabant (qui quadrati Aream quodammodo repræsentat) cujus *Latus* sive *Radicem* appellant numerum illum qui fit ex se multiplicatus; & productum, ex multiplicatione numeri quadratici in suum latus seu radicem, appellabant numerum *Cubicum*, qui & aream seu magnitudinem Cubi quodammodo repræsentat. (Atq; hinc ortum esse, credo, ut *numerum hunc in illum ducere* idem significet ac *numerum hunc in illum*, seu per illum, *multiplicare*.)

Quamvis autem animadverterint, Geometrice in *Cubo* sistendum esse (utpote qui tres dimensiones Geometricas habeat, longitudinem, latitudinem, & profunditatem; nec plures sint in rerum natura possibiles) adeoq; cubum in suum Latus duci non posse: attamen, cum nullum ejusmodi terminum Arithmeticis Multiplicationibus poni viderint, quin ut possit Radix seu Numerus lateralis in continuos productos quousq; libet multiplicari; ideo & Numeros *Figuratos* (quos vocant) ulterius continuandos putabant, quos quatuor, quinq, sex, aut etiam plures dimensiones supponunt continere: eósq; *Quadra-quadraticos*, *Surdesolidos*, *Quadraticubos*, &c. nominabant; appellationibus scilicet tanquam ex Geometria mutuatis.

Nonnulli (præsertim Itali) pro *quadrato*, *zensum* vel *censum* dicunt, & *Zenzizenzum*, *Zenzicubum*, &c. pro *quadratiquadrato*, *quadraticubo*, (vel *quadrato cubi*) &c. item, pro *Radice*, *Rem* dicunt; unde & Regulam Algebræ, *Regulam rei & census* (hoc est, regulam Radicis & Quadrati, seu Zenzi) appellant: item, pro *Re*, *cosam* dicunt (nam *res* Italice *cosa* dicitur, sicut Gallice *chose**) unde hi numeri Figurati, *Cossici* vocantur; & regula Algebræ, regula *cosæ*, seu *cossi*, seu *cossica*; sic *characteres cossici*, *operationes*,

Uterumq; a Latinorum causa.

perationes Cossicæ, &c. dici solent. Alii simplicius (& forte melius) pro *Radice*, *Quadrato*, *Cubo*, *Quadratoquadrato*, (seu *Biquadrato*,) *Surdesolido*, *Quadrato Cubi*, *Surdesolido secundo*, *Quadratiquadratiquadrato*, *Cubo cubi*, *Quadrato surdesolidi*, *Surdesolido tertio*, &c; dicunt *Potestatem primam*, *secundam*, *tertiam*, *quartam*, &c. pro numero dimensionum quæ inibi supponuntur contineri.

Sed & hisce potestatibus seu numeris figuratis suos Characteres aptatos habent, quibus indicentur. Aliqui quatuor initialibus literis R, Q, C, S, innuunt *Radicem*, *Quadratum*, *Cubum*, *Surdesolidum*; vel etiam pro R, scribunt N, hoc est *Numerum*: Alii characteribus his utuntur ꝛ ꝛ ꝛ ſ qui ex literis *r z c ſ* oriuntur, & innuunt *Rem*, *Zensum*, *Cubum*, *Surdesolidum*. Alii (saltem post *Franciscum de Vietâ*, qui Arithmeticam *Speciosam*, ut loquuntur, vel primus omnium introduxit, vel saltem admodum auxit) pro *Radice* quamlibet ad placitum Alphabeti literam adhibent, ut A, ejusq; reliquas potestates adjunctis literis *q* & *c* innuunt, ut Aq, Ac, Aqq, &c. pro *Quadrato*, *Cubo*, *Quadratiquadrato*, &c. ex radice A: Atq; hac notatione utitur D. *Oughtredus*, Anglus, (venerabilis senex adhuc in vivis) in ipsius *Clavi Mathematicæ*, quam (aliquandiu antea conscriptam) Anno 1631 primo edidit, & deinceps aliquoties iteravit. Post eum (vel eodem circitèr tempore) D. *Harriotus* item Anglus, Mathematicus eximius, in ipsius *Artis Analyticæ praxi*, (quã post ipsius obitũ edidit D. *Warnerus*, egregius & ipse Mathematicus, anno item 1631) literis alphabeticis ad placitum assumptis, & toties iteratis, quoties potestas indicata postulaverit, designat, puta *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*, &c. pro Radice, Quadrato, Cubo, Biquadrato, &c. Deniq; D. *des Cartes*, & post illum alii, literarum sæpe iterandarum tædium timentes, radicem, ut prius, qualibet Alphabeti litera designant, & ipsius reliquas potestates suspensis notis numericis (pro numero Gradus seu Potestatis) designant, ut a, a^2, a^3, a^4, &c. Quorum specimen in subjuncto Schemate intuendum proposui.

Characteres Cossici.

Nomina

Nomina.		*Characteres.*				*Potestas seu gradus.*
Radix	♃	R	A	*a*	*a*	1
Quadratum	♄	Q	Aq	*aa*	a^2	2
Cubus	♂	C	Ac	*aaa*	a^3	3
Quad. quadratum	♄♄	QQ	Aqq	*aaaa*	a^4	4
Surdesolidum	♂	S	Aqc	&c.	a^5	5
Quad. Cubi.	♄♂	QC	Acc		a^6	6
2m Surdesolidum.	B♂	bS	Aqqc		a^7	7
Quad. quad. quad.	♄♄♄	QQQ	Aqcc		a^8	8
Cubi cubus	♂♂	CC	Accc		a^9	9
Quad. Surdesol.	♄♂	QS	Aqqcc		a^{10}	10
3m Surdesolidum	C♂	cS	Aqccc		a^{11}	11
Quad. quad. cubi	♄♄♂	QQC	Acccc		a^{12}	12
4m Surdesolidum	D♂	dS	Aqqccc		a^{13}	13
Quad. 2i Surdesol.	♄B♂	QbS	Aqcccc		a^{14}	14
Cubus Surdesol.	♂♂	CS	Accccc		a^{15}	15
Quad. quad. quad. quad. &c.	♄♄♄♄	QQQQ	Aqqcccc		a^{16}	16

Notandum autem est, quod in grandioribus potestatibus (quæ nempe quartam sequuntur) non eodem apud omnes modo appellationes aptantur. Nam v. g. *Quadratocubus* apud non paucos significat *Quadrati cubum*, seu *Cubi quadratum*, adeoq; *potestatem sextam*, (quæ ex cubo in seipsum ducto emergit, vel ex quadrato cubicè multiplicato, hoc est, in seipsum bis ducto;) atq; in hac significatione appellationes quas in Schemate apposui intelligendæ sunt, atq; huic congruunt prima & secunda characterum series: At *Vietæus* (& qui illum hac in re sequuntur) per *Quadrato-cubum* intelligunt potestatem quintam, quæ ex Quadrato in Cubum ducto emergit; adeoq; veterum *Surdesolidos* (primos) ille Quadrato cubos vocat; (& eadem analogia reliquarum potestatum nomina format, adeoq; surdesolidorum appellationem omittit;) cui etiam nomenclaturæ conveniunt ipsius characteres, (qui in characterum tertia serie habentur) *Cartesius* (& qui illum imitantur) veterum potius nomenclaturam resumit; ipsius verò characteres (quinta serie positi) utrivis æquè conveniunt, cum solummodo

modo poteſtatum ordinem, ſeu numerum dimenſionum innuant, adeoq; minus dubiæ ſignificationis, & errori minus obnoxii.

Poteſtates Algebricæ melius per Gradus Arithmeticos, quam per Geometricas Dimenſiones, explicantur.

Quod autem alii per varias dimenſiones Geometricas explicarunt, ego potius per gradus Arithmeticos explicandum exiſtimo, adeoq; extra campum Arithmeticum non excedendum. Idem igitur nobis eſt *Gradus aſcendens primus, ſecundus, tertius*, &c. quod illis *Radix, Quadratum, Cubus*, &c. Prout enim, apud illos, quoties in Radice continetur Unitas, toties in quadrato Radix, totieſq; in Cubo quadratum ſupponitur contineri: ſic & nobis, quoties in *Gradu Aſcendente primo* continetur unitas, toties in ſecundo primus, & in tertio ſecundus; & ſic deinceps. Quod autem de gradibus ſupra unitatem Aſcendentibus dictum eſt, etiam de gradibus infra Unitatem Deſcendentibus eſt intelligendum. Sicut enim, ubi Radix eſt unitate major, ſingulæ poteſtates gradatim Aſcendunt: ita ubi Radix eſt unitate minor, gradatim Deſcendunt. Si vero ipſa Unitas ſit Radix, neq; Aſcendunt neq; Deſcendunt, ſed & poteſtas unaquæq; eſt etiam Unitas; nam Unitas in Unitatem quotieſcunq; Multiplicata, manet Unitas. Mallem autem per varios Gradus Arithmeticos, quàm per Geometricas Dimenſiones, rem explicare, his de cauſis.

1° Quia univerſa Algebra eſt vere Arithmetica, non Geometrica; ideoq; potius Arithmeticis quam Geometricis principiis explicanda. Quamvis enim Geometrica multa Algebricis principiis vel inveniantur vel elucidentur, non tamen inde ſequitur Algebram eſſe Geometricam, aut quidem Geometricis principiis nixam, (prout, qui ſic procedunt, videntur imaginari,) ſed ob intimam Arithmeticæ Geometriæq; affinitatem illud evenit, aut potius quoniam Geometrice ſit Arithmeticæ quaſi ſubordinata, adeoq; univerſalia Arithmetices effata rebus ſuis ſpecialiter applicet. Nam, ſiquis lineã tripedalem bipedali additã, lineã quinq; pedes longam, conſtituere affirmet eò quod numerus binarius & ternarius additi efficiant quinariũ; non tamen calculus ille Geometricus, eſt ſed plane Arithmeticus, quanquã Geometricæ menſuræ ſubſerviat: eſt enim aſſertio illa, de æqualitate numeri quinarii; cum numeris binario, & ternario conjunctis; aſſertio generalis, quibuſcunq; aliis rebus non minus quam Geometricis applicabilis; nam & Angeli duo

& tres, ſint Angeli quinque. Atq; eadem omnino ratio eſt operationum omnium ſive Arithmeticarum ſive ſpeciatim Algebricarum; quæ ex principiis magis generalibus procedunt quam ut Geometricis menſurationibus reſtringantur.

2° Quia Poteſtates Algebricæ nõ rarò altiùs aſcendunt quàm Geometricæ dimenſiones. Cum enim Geometria non plures quàm tres admittat dimenſiones, Longitudinem, Latitudinem & Altitudinem ſeu profunditatem, adeoque nec ultra corpus ſolidum, ſeu cubum, aſcendit: Algebra interim ad Quadratoquadrata ſeu ſurdeſolida, aliaſq; ad libitum ſuperiores poteſtates procedit. Cõmodius ergo per gradus Arithmeticos, quia indefinite quouſq; libet extendi poſſunt, quam per Geometricas Dimenſiones, quæ vel omnino tantũ tres ſunt vel, ſi plures ſupponantur, imaginariæ tantum ſunt & plane impoſſibiles.

3° Quia etiamſi Geometria poſſet tot dimenſiones ſuppeditare, quot Arithmetica gradus; tamen nec ſic quadrarent operationibus Algebricis. Sæpiſſimè enim contingit æquationes fieri inter varias poteſtates non ejuſdem altitudinis quod quamvis ſatis conveniat Gradibus Arithmeticis, Geometricis, tamen dimenſionibus neutiquam convenit. Verbi gratiâ. Poſito pro Radice, ternario; hujuſmodi poſſunt æquationes occurrere 2 Q = 6 R vel 2 C = 6 Q; hoc eſt, Duo Quadrata æquari ſex Radicibus; vel duos Cubos, ſex Quadratis. At quis non videt, Quadrata & Cubos, vel Quadrata & Latera, cum ſint quantitates heterogeneæ, non poſſe comparari? Nec enim Cubus conſtituitur ex quadraris, (quamvis illis terminetur) nec Quadratum ex Lateribus. Omnes enim quantitatum comparationes quoad æqualitatem, inter Homogeneas tantum ſunt faciendæ. Sic ſolidum ſolido æquale eſt aut inæquale, & Planum Plano, & Linea Lineæ; At ſolidum Plano nec æquale eſt nec inæquale, ſed quid Heterogeneum. Sic ſolidum ſolido addi vel auferri dicitur, & planũ plano, lineæq; lineæ: at nec ſolidum plano, nec utrivis linea. Verum, ſi Arithmetice loqui libeat, optimè dici poteſt, centurias duas æquari viginti decadibus, aut Duo millitia centuriis viginti; hoc eſt, numeros aliquot unius gradus ſimul ſũptos, æquari aliquot numeris alterius gradus ſimul ſumptis: Sic & duas trientum triades æquari ſex trientibus, hoc eſt, (ſi 3 ſit radix) duo quadrata æquari ſex radicibus. Cum enim numeri omnes (proprie

prie dicti) ex unitatibus constituantur (vel saltem ad unitatem vere rationem habeant) sunt vere Homogeneæ (licet fortasse, si de numeris surdis etiam loqui velimus sint Incommensurabiles) ideoque vel æquales vel inæquales, majores aut minores, alii aliis dici possunt, possuntque invicem addi vel auferri: quæ omnia in Geometricis magnitudinibus, nisi homogeneis, fieri non possunt.

Siquis dicat Æquationes Algebricas, ubi Cubi, quadrata, & Latera comparantur, non de Cubis, quadratis & Lateribus Geometricis institui; sed de Numeris Cubicis, quadraticis, & Lateralibus; posse autem Numeros quadraticos cubicis aliquot æquales esse: Fateor quidem hoc verum esse: Sed jam de Numeris res erit, (quod nos contendimus,) non de magnitudinibus; eritq; consideratio plane Arithmetica, non Geometrica. Estq; numerus Lateralis, quadraticus, Cubicus, cæterique, nihil aliud quam denominationes graduum (sive Ascendentium sive Descendentium) primi, secundi, tertii, &c. in certâ aliquâ proportione. Sic in proportione triplâ, gradus ascendentes exhibent Triades, Ternionum triades, Ternionum triades triplicatas &c. hoc est, Radices, Quadrata, Cubos &c. Si enim *Ternio* radix constituatur; *ternionum trias* erit numerus quadraticus, nempe numerus ternarius in se ductus; & *ternionum trias triplicata* numerus cubicus, nempe numerus ternarius in sui quadratum ductus, Et sic de cæteris.

Atq; has rationes dedisse sufficiat, cur credam potestates Algebricas melius per Gradus Arithmeticos, seu numeros continue proportionales, quam per dimensiones Geometricas Heterogeneas, explicari posse.

Verum cum jamdiu recepta fuerint vocabula, quibus potestates Algebricæ vulgò exprimuntur; eadem & mihi non incommode adhibenda censeo: cum vocabula artium semel recepta, quamvis fortè minùs exactè rebus aptata, raro possint citra gravius incommodum in mutari. Præterquam enim, quod si frequentes hujusmodi pro cujusvis arbitrio fierent immutationes, non modo pluribus quam necesse est vocabulis oneranda esset memoria, cum & antiqua & nova sint addiscenda & recordanda, ut varii authores varia nomenclatura utentes intelligantur; illud merito gravius est, quod eadem vocabula, vario sensu a variis usurpata, confusionem non raro

Potestates Algebricas, cur antiquis nominibus adhuc appellandas duxerim.

haud exiguam inducant. sufficiat saltem monuisse, varias Potestates Algebricas, quocunq; appellentur nomine, nil aliud esse quam Numeros sive Lineas sive alias etiam quantitates invicem homogeneas, continue proportionales.

Notatio Algebrica ulterius traditur.

Ut autem numerationem Algebricam plenius absolvam; sciendum est hujusmodi sive potestates sive gradus (cum non ita commode possint ac numeri simplices decupla proportione dispositi, ipsis tantum locis designari) appositis suis quibus indigentur characteribus distingui solere; quales nempe supra ostendimus. Cum autem hujusmodi potestates plures simul conjunguntur, fit hoc non simpliciter unam alteri immediate postponendo (prout in vulgaribus notis numeralibus fieri solet;) sed peculiaribus *signis* hunc in finem inventis colligantur: suntque ea præsertim hæc duo + & —, quorum illud Additionis, hoc Ablationis indicium est; sive illud Affirmativum, hoc Negativum; vel illud Positivum, hoc Ablativum; sive (ut vulgo efferuntur) *Plus* & *minus*. Ego hoc tertium (cum *Oughtredo*) adjungendum existimo, × quod sit Multiplicationis indicium. Item = vel ∞ quæ sit Æqualitatis nota. Sic numerus (supra memoratus) 27, ratione decupla consideratus erit 2 ☉ + 7 vel 2 R + 7 vel 2 A + 7, Hoc est, duæ radices seu decades & septem unitates: In proportione quadrupla, erit 1 ♃ + 2 ☉ + 3 vel 1 Q + 2 R + 3 vel A q + 2 A + 3, vel $a^2 + 2a + 3$; hoc est unum quadratum (seu quaternionum quaternio) & duæ radices (seu quaterniones) & tres unitates: In proportione tripla, erit 1 ☾ vel 1 C vel 1 A c vel 1 a^3; hoc est, unus cubus, seu ternionum trias tripla. Vel etiam in proportione decupla idem numerus 27 erit 3 ☉ — 3 vel 3 R — 3 vel 3 A — 3; hoc est, tres Radices (seu decades) demptis tribus unitatibus: In quadrupla, 1 ♃ + 3 ☉ — 1 vel 1 Q + 3 R — 1 vel 1 A q + 3 A — 1 vel $1\,a^2 + 3\,a - 1$: hoc est, unum quadratum (seu quaternionum quaternio) & tres Radices (seu quaterniones) demptâ unitate: Et pariter in aliis; Atque hujusmodi sunt illæ formulæ locutionis ordinariæ, cum, pro *Novendecim*, dicimus *Undeviginti*; pro *Octodecim*, *Duodeviginti* &c. hoc est, *viginti demptis uno*, *viginti demptis duobus* &c. Tale quid innuitur, cum pro 4. 9. 19. &c. scribitur IV. IX. XIX hoc est, 5 — 1. 10 — 1. 10 + 10 — 1. Item 40. 90. 99. &c. XL. XC. XCIX. hoc est, 50 — 10. 100 — 10.

100

100 — 10 + 10 — 1. &c. Esq; hæc notatio Algebrica, seu numerorum Cossicorum.

Notandum est autem inter Algebram Veterum, & Recentiorum hoc præsertim discrimen intercedere; quod veteres solebant numeros tantum adhuc ignotos & investigandos characteribus Cossicis exprimere; at Recentiores Algebristæ, tam notos quâ ignotos sic solent exprimere Ut deinceps suo loco patebit. *Algebrica Veterum & Recentiorum, quomodo differunt.*

Interrogabit forsan aliquis; Quorsum hæc nova signa seu symbola adhibeantur numeris exprimendis, potius quam vulgares numerorum Notæ? *Utriusq; usus.*

Respondeo; Triplici de causa hoc factum esse; partim Necessitatis, partim Brevitatis, partim Perspicuitatis (atq; adeo Utilitatis,) gratiâ.

Primo, inquam, Necessitatis causa: cum, pro numero aliquo adhuc ignoto, substituitur symbolum seu character eo usque dum ipse innotescit.

2° Brevitatis & facilitatis causâ, cum illud non raro citiùs peragatur per symbola seu *species*, quam per ipsos numeros.

3° Perspicuitatis adeoq; majoris Utilitatis gratiâ: ubi enim per symbola seu species procedit inquisitio; tota operationum series sic peracta evidentius in ipsa tandem quantitate proveniente patet; quod si operationes ipsis numeris peragerentur, quamvis eadem tandem provenire possit quantitas quæsita, nulla tamen ipsarum operationum vestigia supererent. Ea vero quæ provenit quæstionis solutio in hujusmodi symbolico operationum progressu, universalem ostendit methodum qua non modo proposita difficultas speciatim solvatur; sed & infinitæ aliæ quæstiones conjunctæ eadem opera solutionem accipiant, si generalis nempe solutio proveniens speciatim applicetur prout quæstionis hypothesis variata postulet.

Res tota exemplo melius patebit. Operæ pretium igitur existimo problema quoddam non difficile breviter subjungere, quo melius perspiciatur quid ea velint quæ diximus. (Ubi tamen veniam me facile consequuturum spero, si nonnulla de Additione, Subductione, Multiplicatione, & Divisione tanquam jam cognita assumam, quæ deinceps sunt tradenda: aut saltem siquis mihi hanc veniam non sit concessurus, poterit ille hujusce problematis solutionem eousq; differre, donec ea fuerint tradita: non enim ego illam hic loci ἐπιδεικτικῶς pro- *Exemplo ostenditur.*

pono, sed tantum ἐξηγητικῶς.) Esto igitur hoc Problema propositum.

"Accessit virgo quædam tres successive Divos, puta Jovem, "Apollinem, Palladem; Oravit Jovem, ut quos ipsa secum "attulerat nummos ille duplos efficiat; quo præstito, reddidit "illa Jovi gratitudinis ergò tres asses: Apollo deinde simili ora- "tione compellatus duplavit virginis nummos residuos; cui & "illa tres statim asses pependit; Reliquos autem ad Palladem "duxit quos ipsa geminavit; cui & virgo tres item asses dona- "rii loco obtulit; Quibus peractis, unicus tandem assis virgini "relictus erat quem secum auferat. Quæritur; quot pri- "mum attulerat.

Hoc ego Problema sic ego aliquando carmine utcunq; reddidi; ad imitationem aliorum, quæ passim extant ὑπογραμματικῶς proposita.

Accessit virgo tres, supplex, ordine Divos;
Et tulit accedens asses, quot nescio, secum.
Oratus, ductos geminavit Jupiter asses;
Protinus illa Jovi tres asses grata pependit.
Quotq; superfuerant duplavit Phœbus Apollo:
Grata itidem Phœbo tres virgo reddidit asses.
Pallas tunc reliquos geminavit Virginis asses:
Assibus & tandem tribus est donata Minerva.
Unicus & superest, quem secum rettulit, assis.
Dic mihi, quot fuerant, quos primo Virgo ferebat.

Hoc ego ut solvam problema; Primo juxta veterum Algebram pro numeris adhuc ignotis Characteres cossicos substituam, notos autem notis suis characteribus substituam: Deinde verò, juxta Recentiorum methodum, pro numeris tam notis quam ignotis symbola substituam usque dum ad solutionem pervenero: Ut hoc pacto utriusq; methodi exemplū præstem.

Primo. Pro ignoto assium allatorum numero, substituo 1 ☉: hic autem numerus (quantuscunque fuerit) a Jove duplatus fit 2 ☉: hinc demptis tribus assibus Jovi solutis, restant 2 ☉ — 3. hoc residuum cum geminaverat Apollo, fiunt 4 ☉ — 6: hinc cùm tres adhuc asses ablati fuerint, Apollini tradendi, manebunt 4 ☉ — 9 hoc residuū Pallas duplando efficit 8 ☉ — 18: unde cum tres insuper asses sint adhuc auferendi qui Palladi tribuantur, manebat tandem 8 R — 21. At in quæstione

quæſtione propoſita unicus aſſis ſupereſſe dicitur. Ergo ſtatuendum eſt 8 R — 21 tantundem eſſe ac 1. Hoc invento; Quoniam 8 R — 21 = 1, (additis utrinq; 21) erunt 8 R = 22. Ergo 4 R = 11 Et 2 R = 5 ½. Et deniq; 1 R = 2 ¾. At 1 R ponitur numerus aſſium allatorum; erant ergo aſſes allati 2 ¾. Totus quippe operationis progreſſus ſic ſimul conſpiciendus eſt.

1 ☌	1 R
1 ☌	1 R
2 ☌	2 R
— 3	— 3
2 ☌ — 3	2 R — 3
2 ☌ — 3	2 R — 3
4 ☌ — 6	4 R — 6
— 3	— 3
4 ☿ — 9	4 R — 9
4 ☿ — 9	4 R — 9
8 ☿ — 18	8 R — 18
— 3	— 3
8 ☿ — 21 = 1.	8 R — 21 = 1
8 ☿ = 22	8 R = 22
4 ☿ = 11	4 R = 11
2 ☿ = 5 ½	2 R = 5 ½
1 ☿ = 2 ¾	1 R = 2 ¾

Patet hinc Characterem Coſſicum 1 ☌, vel 1 R, neceſſitatis cauſa primo fuiſſe appoſitum; quia tunc ipſius valor nondum innotuerat, ſed quærendus erat. Non tamen adeo abſolute neceſſarium erat (in præſente problemate) hoc pacto procedere, acſi nulla alia methodo quæſtioni reſponderi potuerit: Nam, quamvis illud fortaſſe in difficilioribus Problematis non raro accidat, non tamen adeo difficilis eſt præſentis quæſtionis ſolutio quin ut poſſit citra opem Algebræ inveſtigari. Nempe hoc pacto. Si reſiduo 1, reſtituantur 3 (qui nuperrime Palladi ſolvebantur) fiunt 4 (tot ergo Palladem duplante provenerant) horum ſemiſſis 2, eſt numerus aſſium ad Palladem adductorum; quibus ſi adjiciantur 3 (qui nuper ſoluti fuerant Apollini) fiunt 5, (tot ergo Apolline duplante provenerant) horum ergo ſemiſſis 2 ½ ad Apollinem duxerat; quibus ſi adjiciantur 3 (qui nuper detracti erant ſolvendi Jovi) fiunt 5 ½, qui duplante Jove provenerant; horum ergo ſemiſſis 2 ¾ eſt numerus aſſium ad Jovem allatorum; qui eſt numerus quæſitus.

Quamvis autem in hujuſmodi minoris difficultatis quæſtionibus

nibus non ſit abſolute neceſſarium ut Methodo Algebrica ſeu Analytica procedatur: Hoc tamen utilitatis utcunq; emergit, ut ſolutio ſemel inveſtigata poſſit etiam aliis hypotheſibus applicari; nec opus ſit pro ſingulis quæſtionis variationibus totam operationum ſeriem de novo ordiri. Verbi gratia. Si, cæteris ut prius manentibus, dicamus 3 aſſes tandem ſupereſſe; eſſent igitur 8R — 21 = 3: ideoq; 8R = 24 & R = 3. Si ſupereſſent 5 aſſes, eſſent 8R — 21 = 5; ideoq; 8R = 26, & $3\frac{1}{4}$. Et pariter faciendum erit ſi plures aut pauciores aſſes ſupereſſe dicatur. Ut

8R — 21 = 3	8R — 21 = 5	8R — 21 = 7
8R = 24	8R = 26	8R = 28
1R = 3	1R = $3\frac{1}{4}$	1R = $3\frac{1}{2}$

8R — 21 = 9	8R — 21 = 11	
8R = 30	8R = 32	&c.
1R = $3\frac{1}{4}$	1R = 4	

Secundo. Juxta Algebram ſive Analyticen Recentiorum, qui non modo pro numeris ignoratis, ſed & pro numeris datis, ſymbola ſubſtituunt, ſolutio proveniet magis adhuc univerſalis. Verbi gratia. Pro numero quæſito ſubſtituatur A, pro binario (quia nempe ſit aliquoties numerorum duplicatio) B, & deinde pro ternario (quia nempe 3 aliquoties auferuntur) C, & deniq; pro numero reſiduo (qui hic eſt 1) D: progreſſus erit hujuſmodi

A

B A — C

B q A — B C — C

B c A — B q C — B C — C = D

Hæc autem ſymbola pariter præſtabunt quæſitum, ſive quemlibet Divorum allatos nummos duplare, triplare, quadruplare, &c. dixeris; (nempe interpretando B, pro 2, 3, aut 4 &c.) item ſive tres, quatuor, aut quinq; &c. aſſes ſingulis traditos, (nempe interpretando C de 3, 4, 5, &c.) & deniq, ſive unum, duos, tres, &c. (nempe interpretando D, de 1, 2, 3, &c.) aſſes tandem ſupereſſe dixeris.

Si enim quemlibet deorum nummos duplâſſe dixeris erit B = 2, B q = 4, B c = 8; Si triplâſſe dixeris, erit B = 3, B q

Bq = 9, Bc = 27, &c. Deinde si cuivis tres asses redditos dixeris, erit C = 3; si quatuor erit C = 4 &c. Denique si unum supereſſe dixeris, erit D = 1; si duos, erit D = 2, &c. Adeoq; pro variatâ hypotheſi varianda erit ſolutionis interpretatio.

Bc A − Bq C − BC − C = D
8 A − 4 C − 2 C − C = 1
8 A − 12 − 6 − 3 = 1
8 A = 22
A = 2 1/4

Bc A − Bq C − BC − C = D
27 A − 9 C − 3 C − C = 2
27 A − 36 − 12 − 4 = 2
27 A = 54
A = 2

Et ſimiliter faciendum eſſet quicunq; eſſent alii numeri in quæſtione poſiti.

Atq; hactenus Notationem Algebricam, Coſſicam, Symbolicam ſive ſpecioſam, quantum opus eſt explicavi.

CAP. XII.

Fractionum ſive Minutiarum Notatio. Fractionis Denominator, & Numerator. Minutiæ minutiarum; Fractio propria, impropria. Numerationis Epilogus.

VNicum adhuc ſupereſt ut univerſam numerorum Notationem abſolvamus: nempe Notatio *Fractionum*, ſive *Minutiarum*, quos *Numeros Fractos* appellare ſolent. Quamvis enim Fractionum natura perfectius deinceps intelligetur, poſtquam Rationum ſive proportionum naturam explicaverimus, operæ tamen pretium eſſe exiſtimo, eâ de re nonnulla hîc adjungere, necui manca videatur Notationis traditio, ſi illud hîc loci prorſus negligeretur. *Fractionum Notatio.*

Sunt autem *Fractiones*, ſeu *Numeri Fracti*, non tam numeri, quam *Unitatis fragmenta*. Quanquam enim, ut ſupra dictum eſt, *Unitas* ſit Numerorum minimus; (cum paucius quàm Unum eſſe *Fractionis Denominator.*

esse non possit, neque aliquid rariùs quàm semel: attamen *Unum* illud supponi solet (ut quid continuum) in membra partiri sive plura, sive pauciora, (prout res postulaverit) æqualia tamen.

Fractionis Denominator

Prout autem membra illa æqualia, sive partes æquales, alio atque alio numero esse possunt, ita & aliam atque aliam Denominationem subeunt. Ita si quid unum in duas partes æquales partiri supponatur, illarum utraque Semissis dicitur; si in tres, appellantur Trientes; si in quatuor, Quadrantes; si in sex, Sextantes; si in octo, Octantes; sic si in decem partes dividatur, quælibet earum Dextans dici potest, seu pars decima; & sic in aliis: (quamvis enim non ignorem *Dextantem* pro *Decunce* a multis poni, & quidem apud antiquos eo sensu occurrere; analogia tamen Grammatica suadere videtur ut *partem decimam* potius significet quam *decem duodecimas*: sicui secus videatur, poterit ille, pro *Dextante*, eodem sensu *partem decimam* dicere) Græci dicunt ἡμιμόριον, τεταρτημόριον, πεμπτημόριον, ἑκτημόριον, δεκατημόριον, &c. Hæc autem *denominatio*, in scribendis Fractionibus, exprimitur figurâ analogâ lineolæ subscriptæ.

Fractionis Numerator.

Quot autem harum partium assumptas esse supponitur, alia figura eidem lineolæ suprascripta innuitur. Sic $\frac{2}{3}$ *duos trientes* significat, $\frac{3}{10}$ *unum dextantem*, seu δεκατημόριον, $\frac{3}{4}$ *tres quadrantes*, $\frac{5}{12}$ *quinquuncem*, seu *quinque partes duodecimas*, sic $\frac{13}{100}$ *tredecim partes centesimas* seu ἑκατοστημόρια, $\frac{11}{20}$ *undecim partes vicesimas*, seu εἰκοστημόρια, significant. Et pariter de similibus dicendum est.

Duobus igitur numeris Fractio scribitur; quorum inferior *Denominator* appellatur, superior *Numerator*: Quoniam ille partes *denominat*, & ποσημόριον seu *quota pars* sit numerandarum quælibet determinat; hic verò partes illas *Numerat*, & *quot partes* ejusmodi sint assumendæ ostendit.

Minutiæ Minutiarum.

Si verò *partium particulæ* notandæ occurrant, seu (ut appellantur) *Minutiæ minutiarum*; puta *unius quadrantis dimidium*, vel *duorum quintantum tres quadrantes*, aliæq; ejusmodi: illæ si opus est, sic scribi consueverunt, $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{4}\frac{3}{5}$, nempe lineola in priori parte omissa; vel sic etiam $\frac{1}{2}$ ex $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{4}$ ex $\frac{3}{5}$ majoris perspicuitatis gratia: Sed & sic scribi nonnunquam possunt $\frac{0\frac{1}{2}}{4}$ &c. Mallem ego sic scribere $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{4}$, vel $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}$; hoc est, *semissis*

semisses in quadrantem ducti, & *tres quadrantes in duas quintantes ducti*; Est enim quadrantis dimidium, nihil aliud quam quadrans per semissem multiplicatus; & duorum quintantium quadrantes tres, idem valent ac quintantes duo in tres quadrantes ducti: ut postea, cùm de multiplicatione dicendum erit, patebit.

Fractio Propria.

Sciendum autem est, in Fractione propriè dicta, Numeratorem Denominatore semper minorem esse; quia propriè dicta Fractio, est quid unitate minus.

Fractio impropria.

Si quando vero numerator Denominatore major sit, vel illi æqualis; dicitur illa *Fractio impropria*, sive improprie dicta. Si nempe Numerator & Denominator sint æquales, idem valent atq; unitas; Nam $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, duo semisses, seu tres trientes, quatuorve quadrantes, tantundem sunt atque unum integrum. Si vero numerator Denominatore major sit, aliquid unitate majus innuitur; nempe vel plures unitates; vel unitas una pluresvè cum fractione annexâ: sic $\frac{4}{2}$ quatuor semisses, idem valent ad duo integra; $\frac{4}{3}$ quatuor trientes, idem ac $1\frac{1}{3}$ unum integrum uno triente auctum; sic $\frac{3}{2}$ est $2\frac{1}{2}$; $\frac{4}{3}$ est $2\frac{2}{3}$. Et sic in similibus.

Quod autem de fractionibus sive propriis sive impropriis, vulgaribus figuris numeralibus descriptis, dictum est; pariter intelligendum est ubi alia quævis symbola, seu potestatum characteres, figurarum vice ponuntur. Sic $\frac{A}{2}$ est $\frac{1}{2}$ A, semissis quantitatis A; & $\frac{A}{E}$ innuit quantitatem **A** per quantitatem **E** divisam; & $\frac{2c}{2}$ est radicis semis; $\frac{2q}{3}$ quadrati triens; $\frac{3}{2c}$ numerus ternarius per radicem divisus; sic $\frac{2\,2q+3\,2c}{2\,2c}$ vel $\frac{1\,2q+\frac{1}{2}\,2c}{2c}$ vel $\frac{2\,2c+3}{2}$ vel $1\,2c+\frac{1}{2}$ vel $1\,2c+1\frac{1}{2}$; Ita $\frac{A\,q+B\,q}{E}$ est aggregatum ex **A** q & **B** q divisum per **E**. Atq; ita in similibus. Verum hæc multo melius percipientur, postquam Divisionis naturam exposuimus; Fractio enim est quasi Divisionis indicium; innuit nempe Numeratorem per Denominato-

rem dividendum esse. Interim hæc de fractionum Notatione hîc loci dixisse sufficiat.

Adeoque totum illud notationis negotium expedivimus; eáq; omnia quæ sub *Numerationis* nomine Arithmetici Practici vulgo comprehendunt; quæ numeros apte scribendo & scriptos interpretando præcipuè versatur. Monendum autem est *Numerationis* vocabulum aliter hîc loci ab Arithmeticis Practicis usurpari, quàm ubi suprà Arithmeticam diximus scientiam benè *Numerandi*: Illic enim *Numerare*, est in universum Proprietates & usum numerorum interpretari & exercere; hîc aut, per numerationem, speciatim intelligunt, simpliciora Arithmeticæ rudimenta, de Numerorum compositione, Notatione, aliisq; quasi Prolegomenis ad commodam Numerorum tractationem prærequisitis.

Arq; hæc quidem omnia quasi Præmissarum loco sunt habenda, ad eas quæ sequuntur Operationes Arithmeticas, puta Additionem, Subductionem, Multiplcationem, Divisionem, aliasq; quæ ex hisce componuntur operationes. Hucusq; enim quæ tradidimus, potius ad placitum posita sunt, quam demonstrata; docentq; quid sibi volunt Arithmetici per eas quas exposuimus Appellationes & Characterum dispositiones, quas ad libitum sibi assumpserunt Arithmetici quo melius sequentes operationes perficere valeant. Et eo quidem loco sunt habenda quo definitiones & Terminorum explicationes a quibus rerum Mathematicarum scriptores ordiri solent. Vel, si cum Logicis loqui libeat, Objectum scientiæ exposuimus; sequitur ut ipsius Affectiones inquiramus & demonstremus.

CAP. XIII.

Additio, quid? Axiomata aliquot, sive communes notiones. Additionis summa seu aggregatum. Additionis praxis, in numeris simplicibus. Additionis & Subductionis tabella; Ejusq; demonstratio. Additionis praxis in numeris compositis: ejusq; demonstratio. Operationis compendium. Additionis praxis in fractionibus decimalibus. Additionis praxis in variis Denominationibus.

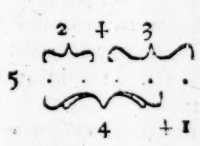
POst absolutam, in superioribus, Numerorum *Notationem*, ad eorum Additionem accedendum est.

Est

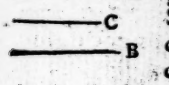
Est autem Additio, *Numerorum plurium in unam Summam collectio.* Vel Addere, est, *Datis numeris quotlibet, unum aliquem illis omnibus simul sumptis æqualem invenire.* Aut etiam, si latus libeat, quàm ad solos numeros, Additionis appellationem extendere, erit Additio, *Quantitatum plurium Homogenearum in unum Aggregatum collectio.* Nam revera eadem omnino est *Additionis* notio, sive in Continua sive in Discreta quantitate. *Additio qui?*

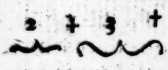
Quò melius autem in sequentibus procedamus, sciendum est, in Arithmetica, perinde ac in Geometria reliquisq; disciplinis omnibus, Principia quædam per se nota necessario concedenda esse, unde alia probentur; quæ tamen Principia talia sunt ut ea nemo sanæ mentis negare, aut quidem de iis (modo sensum verborum intelligat) dubitare possit. Hujusmodi sunt *Axiomata* illa, seu *Communes notiones*, quæ Elementis Euclidéis præmittuntur; Quorum pleraq; non magis Geometriæ quam Arithmeticæ conveniunt; Neq; ab Euclide proponuntur quasi Solis Magnitudinibus congruant, sed quæ quibusvis quantitatibus, prout opus erit, applicari possint. Ego ex illis ea seligam quæ præsenti negotio conveniunt, suntq; hæc quæ sequuntur. *Axiomata, sive communes notationes.*

1. *Quæ eidem sunt æqualia, sunt & inter se æqualia.* Ut si tam linea A, quam linea C, sit æqualis lineæ B; erunt ipsæ A C lineæ æquales inter se. Atq; de hoc nemo merito dubitare potest, sensu verborum semel intellecto: Cùm enim, vi vocis, Æqualia ea sint quorum quantitas est eadem, seu, quorum hoc tantundem est atq; illud: sitq; quantitas tam lineæ A, quam lineæ C, ea quæ est lineæ B; erit linearum A & C eadem quantitas, (ea nempe utriusq; quæ est lineæ B,) ipsæq; igitur æquales. Similiter in numeris, si $2+3=5=4+1$ erit $2+3=4+1$, hoc est, si tam aggregatum $2+3$ quam aggregatum $4+1$ æquetur numero 5, erunt ipsa aggregata $2+3$ & $4+1$ inter se æqualia; eorum enim quantitas est eadem; ea nempe utriusq; quæ est numeri quinarii. Atq; idem omnino obtinet in Superficiebus, Solidis, Angulis, Ponderibus, rebusq; aliis omnibus quæ quovis modo vel mensurantur vel numerantur.

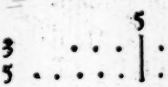


2. *Si æqualibus æqualia addantur, tota sunt æqualia.* Ut si A = B erit A + C = B + C; hoc est, si æqualibus rectis A B addatur vel eadem vel æquales quantitates C, erit aggregatum A + C, æquale aggregato B + C. Sic si 2 + 3 = 5 erit 2 + 3 + 1 = 5 + 1. Neq; de hujus propositionis veritate quispiam sanus dubitare poterit magis quam de veritate præcedentis; cum utraque dependeat ex eadem Æqualitatis notione.





3. *Si ab æqualibus æqualia subducantur, reliqua sunt æqualia.* Puta si A = B erit A − C = B − C: vel si A + C = B + C erit A = B. Sic si 2 + 3 = 5 erit 2 + 3 − 1 = 5 − 1, aut si 2 + 3 + 1 = 5 + 1, erit 2 + 3 = 5. Estque hujus propositionis veritas satis evidens; aut, siquis assensum negaret, cogi poterit ex præcedente. Suntque hæc tria axiomata, præsertim in Æquationibus Analyticis, perpetui usus. Sed & quæ sequuntur non minus sunt indubitata.



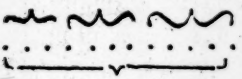
4. *Si inæqualibus æqualia addantur, tota sunt inæqualia.*

5. *Si inæqualibus æqualia auferantur, reliqua sunt inæqualia.* Sunt autem hæc duo duarum præcedentium consectaria; atque exinde vel ostendi vel saltem cogi possent.

6. *Quæ ejusdem sunt duplicia sunt inter se æqualia.* Sequitur hoc ex secundo; dum 2 A nihil aliud sunt quam A + A.

7. *Quæ ejusdem sunt dimidia, sunt æqualia inter se.* Hoc ex præcedente si opus sit, cogi potest. Sed & hæc duo axiomata pariter etiam valent in triplis, quadruplis, &c item in trientibus, quadrantibus &c. atq; in duplis, & dimidiis.

8. *Totum est majus sua parte.* Addo.



9. *Totum æquatur partibus suis omnibus simul sumptis.* Cum enim sit suarum partium omnium aggregatum, nemo dubitare poterit quin ipsum tantundem sit atque illæ omnes simul sumptæ.

Hæc autem omnia & siqua sunt similia, adeo sunt per se perspicua, ut nulli dubitationi sint obnoxia; quique hujusmodi quid

quid negat, non ſperandum eſt ut ullis argumentis teneri velit. Reliqua Euclidis ἀξιώματα & αἰτήματα pure Geometrica ſunt, adeóq; non huius loci Ex his autem quæ jam tradidimus, ea quæ deinceps ſequentur, tam de Additione quàm reliquis operationibus Arithmeticis, demonſtranda erunt.

Additionis ſumma ſive aggregatum.

Additionis nota, quæ nunc dierum paſſim obtinet, eſt +. Adeóque ſi quantitates A B ſimul ſint addendæ, aggregatum eſt A + B; ſic ſi 2 & 3 ſint ſimul addendæ, aggregatum eſt 2 + 3. Hæc enim + additionis ſive affirmationis nota, indicat 3 vel B numerum ſeu quantitatem cui præfigitur, præcedenti 2 vel A additam ſeu adjunctam eſſe, vel (ſi libet) addendam vel adjungendam.

Additionis praxis.

Verùm illud ulterius quærit practicus Arithmeticus, annon (verbi gratia) illud aggregatum 2 + 3 poſſit alia forma notari quæ tantundem valeat atq; interim magis ſit commoda, ſuumq; valorem melius intellectui repræſentet: adeoq; cum ſit 2 + 3 = 5, loco aggregati 2 + 3 ſubſtituit unicum numerum 5 qui aggregato illi æqualis eſt, & tantundem valet. Atq; in hoc totum verſatur Arithmetici practici negotium (non in Additione ſolummodo, ſed in aliis operationibus Arithmeticis, quod ſemel monuiſſe ſufficit) ut quantitates utcunq; propoſitas ſeu quæſitas commodiſſima forma deſcribere poſſit, atq; intellectui exhibere. Atq; hoc quo pacto in Additione præſtari poſſit, primùm quidem in notis Figuris numeralibus, deinde etiam in aliis Speciebus (ut loquuntur) ſive Symbolis, jam traditurus ſum.

Numeri autem addendi, ſunt vel ſimplices ſive monadici, quales ſunt 1, 2, 3, reliquiq; decade minores, qui unica figura ſcribi ſolent; vel compoſiti, quales ſunt 10, 11, 13, 20, 234, aliiq; in infinitum, qui conjunctis characteribus ſcribuntur. (illud enim per *numerum compoſitum* hic loci intelligo, quamvis illud aliàs alio ſenſu occurrere poſſit.) Vulgo, qui uno characte ſcribuntur, *Digiti* appellari ſolent; qui circello ſeu cipha terminantur *Articuli*; reliqui, *Compoſiti*.

In numeris ſimplicibus;

Simplicium numerorum additionem quod attinet, ea natura potius vel exercitatione, quàm præceptis, eſt diſcenda: Puta *Unum Uni* additum conſtituere *Duo*; item *Duo* & *Tria* conjuncta valere *Quinq;*: & ſic in reliquis. Atq; hæc ſunt adeo pueris nota, ut non ſit opus ea fuſius tradere. Si quis tamen poſtulet

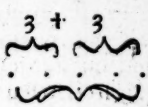
postulet ut (pro more) omnia demonstrentur; aut etiam siquis de majorum additione dubitare possit: Subjecta tabella simplicium omnium additionem exhibebit.

Tabella Additionis & Subductionis.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Si enim numerorum addendorum alter sumatur in summitate seriei erectæ, alter in principio seriei transversæ, communis serierum concursus ostendet eorum aggregatum. Exempli gratiâ si sumatur in vertice 2, ad latus 3, communis concursus exhibet 5, qui æqualis est aggregato 2+3.

Si quis deniq; veritatem hujus tabellæ demonstrandam postulet; illud hoc modo fiet. Verbi gratia, 2+3=5 sic demonstratur. Ponantur primum duo puncta, & deinde tria, quæ omnia si numerentur reperientur quinque. Vel sic. Quoniam notum est ex ipsa numerorum procreatione (quàm Cap. V. tradidimus) quòd sit 1+1=2. 2+1=3. 3+1=4. 4+1=5. 5+1=6. 6+1=7. 7+1=8. 8+1=9. 9+1=10. 10+1=11. &c. Erunt etiam (per axiomata superius in hoc capite tradita) 2+3=1+1+3=1+4=5. Ergo



2+3

2+3=5. Vel 2+3=2+2+1=2+1+1+1=3+1+1=4+1=5. Atq; eodem modo tota tabella demonstrari potest.

Si quis autem Tabellam illam abbreviandam cupiat, poterit illa quidem fieri fere duplo minor. Cum enim sit, verbi gratia 4+3=3+4, sufficiat horum summam semel apponi, eo modo quo hic ostenditur: ubi duorum numerorum addendorum major semper in fronte tabellæ, minor ad latus quæratur, aggregatum in area.

Additionis Tabella Contractior.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

In Numeris compositis.

In numerorum compositorum additione major est difficultas, quæ tamen tota ex simplicium additione dependet. Hoc autem quo commodius fiat, numeri addendi ita scribendi sunt ut unus alteri directè subsit, ita nempe ut Monades unius Monadibus alterius subsint, & decades decadibus, reliquiq; loci inferioris iisdem respective superioris locis subscribantur: quod faciendum est sive duo sive plures quotvis numeri addendi sint: atq; deinde, ducta subtus lineola, aggregatum monadum monadibus subscribendum, decadum decadibus, centuriarum centuriis, atq; sic deinceps. Exempli gratia. Addantur 25634+63152. Numeris igiur rite scriptis, & linea-

25634	103605		lâ ductâ; in columnâ ſeu co-
63152	430120		lumellâ monadum, pro 4+2
	315032		ſubſcribo 6: in columellâ
88786			decadum pro 3+5 ſubſcribo
	848757		8: quia ſcilicet (per tabel-

lam præcedentem) $4+2=6$. $3+5=8$. atq; eodem modo in reliquis columellis reperio $6+1=7$. $5+3=8$, $2+6=8$; adeoq; cum ſubſcripta ſummula cujuſq; ſeriei, ejuſdem ſeriei particulis æquetur; (puta 6 monades $=4+2$ monadibus, 8 decades $=3+5$ decadibus, 7 centuriæ $=6+1$ centuriis &c.) erunt omnium ſummulæ ſimul ſumptæ (debita locorum ratione habita) 88786, omnium particulis ſimul ſumptis æquales. Atq; eodem modo $103605+430120+315032=848757$.

Non raro autem accidit, particularium ſerierum ſummulas tantas eſſe, ut unica figura ſuæ ſeriei ſubſcribi non poſſint, (quoties nempe ſummula numerum novenarium excedit) quo caſu, ultima ſummulæ figuræ ſuo loco ſubſcribenda erit, reliqua autem loco proximè ſuperiori, (aut, ſi plures ſint, proximis quot opus eſt locis,) adeoq; ſingulæ (ſi libet) ſummulæ diſtinctis lineis ſcribi poſſunt; ut in exſemplis ſubjectis primo & ſecundo; vel etiam contractius, ut in tertio & quarto; illud autem ſemper cavendum, nequa figura debito loco extrudatur, ſed duæ potius eidem ſeriei ſubſcribendæ ſunt: illæ autem ſummulæ, in unam deinde ſummam (eodem artificio) collectæ, numerorum addendorum ſummam integram, ſive aggregatam exhibent. Non autem omnino refert ſive a dextra ſive a ſiniſtra operatio ordiatur: Neq; etiam refert quis addendorum numerus ſupremus ſit, quis ſecundus, &c. (modo illud ſemper caveatur ut monades monadibus, decades decadibus, &c. directè ſubſint, ut vitetur confuſio locorum,) Additio enim non addendorum ordinem inquirit, ſed aggregatum. Patet hoc ex ſubjectis exſemplis, ubi eadem ſumma, diverſo tamen ordine, emerget.

98697

98697	87998	95588	67590
87998	98697	98697	87998
95588	67590	87998	98697
67590	95588	67590	95588
23	32 milliũ decad.	327553	22323
35	27 millia.	2232	32755
25	25 centuriæ.		
27	35 decades.	349873	349873
32	23 monades.		
349873	349873		

In his omnibus exſemplis, ſummula monadum (ſive infimæ ſeriei) eſt 23; ſubſcripta igitur ſuo loco figurâ 3 (pro tribus unitatibus) reliqua figura 2 loco proxime aſſcendente ſcribenda, quam ſive 20 unitates ſive 2 decades ſignificare dicamus, perinde eſt. Sic ſummula decadum eſt 35; ſubſcripta igitur 5 in decadum ſerie, reliqua 3 ſcribenda eſt in ſerie proximè aſſcendente, ut 30 decades, ſeu (quod idem eſt) 3 centurias ſignificet. Et pariter in reliquis. Omnes autem ſummulæ collectæ, exhibent 349873 ſummam integram.

Additionis demonſtratio.

Totius proceſſus demonſtratio dependit ex illo axiomate (ſæpius applicato) *ſi æqualia æqualibus addantur tota ſunt æqualia.* Puta ſi pro tota monadum ſerie ſubſtituantur monades $23 = 7+8+8+0$, tantundem exhibetur; deinde ſi pro decadum ſerie ſubſtituantur decades $35 = 9+9+8+9$, tantundem adhuc exhibetur; item ſi in reliquis ſeriebus ſubſtituantur $25 = 6+9+5+5$, & $27 = 8+7+5+7$, & $32 = 9+8+9+6$, tantundem adhuc exhibetur; adeoq; ſummulæ inventæ æquantur numeris propoſitis: & (eadem ratione) ſummularum ſumma æquabitur ipſis propoſitis numeris.

Operationis compendium.

Hic autem proceſſus (quẽ perſpicuitatis gratia diſtincte proponendũ duximus ut operationis ratio perſpiciatur) poteſt aliquantulum (præſertim exercitatis) abbreviari, ſi nempe (a gradibus infimis ſemper incipiendo) cum gradus unius ſummula inventa eſt, ultima ipſius figura ſtatim ſuo loco ſubſcribatur, & reliqua (ſi qua ſit) memoria reſervetur (aut ſi libet, du-

duabus lineolis, ne memoria excidat, interpositâ) sequenti statim seriei annumeretur. Hoc pacto.

986	97	98697
955	83	95588
879	98	87998
675	90	67590
349873		22 32
		349873

Quoniam, in serie monadum, est $7+8=15$. $15+8=23$. $23+0=23$. subscriptâ figurâ 3, reliqua 2 (memoriâ reservata, vel lineolis interscripta) statim sequenti seriei adjungitur hoc modo: $2+9=11$. $11+8=19$. $19+9=28$. $28+9=37$; subscripta figura 7, reliqua 3 transferatur in sequentem seriem sic, $3+6=9$. $9+5=14$. $14+9=23$ $23+5=28$. subscripta 8, transferatur 2; adeoq; $2+8=10$. $10+5=15$. $15+7=22$. $22+7=29$ subscripta 9, transferatur 2; eritq; $2+9=11$. $11+9=20$. $20+8=28$. $28+6=34$: Subscribatur 4, & in sequente serie (quia nihil ulterius addendum restat) 3. eritque summa totalis ut prius, 349873.

Cur autem figuras sequenti seriei annumerandas, non memoria tantum reservari, sed & duabus lineolis interscribi posse dixerim; ratio est, quia non raro expedit in grandioribus numeris, præsertim tyronibus & parum exercitatis, illud sic fieri; eo scilicet fine, ut, siquando operatio de errore suspecta sit, cujusvis seriei summula commode possit seorsim examinari, errorque siquis sit, facilius detegi; quod quidem non adeo commode peragi poterit, si, peracta operatione, nullum vestigium remaneat numeri ab aliâ serie illuc translati, seu plurium serierum operatio iteranda erit ut unius error detegatur.

Additio Fractionum Decimalium. Si quando numeri addendi fractiones decimales (ut loquuntur) annexas habeant, seu (quod idem est) gradus aliquot infra unitatē descendentes, operatio eodem omnino modo peragenda est, quo in numeris integris sive absolutis, & iisdem principiis demonstranda: Illud autem caute prospiciendum est, ne gradus confundantur: Adeoq; non semper ultima figura unius numeri ultimæ alterius est subscribenda, sed graduum ratio sic habenda est, ut monades monadibus, decades decadibus, &c. in eadem serie subscribantur; adeoq; linea separatrix (sive illud quod separatricis munus obit) in omnibus numeris apte conveniat ut in exemplo adjuncto videre est: nempe

17.25
3.5
0.005
16.
36.755

17 25 + 3 5 + 0 005 + 16 = 36 755. Neq; ulla hic nova difficultas occurrit.

Si quantitates addendæ ex pluribus constent Denominationibus (ut loquuntur) prout in addendis Monetis, Ponderibus, Mensuris, Motibus, &c. contingere solet: curandum, ut quoties inferioris alicujus Denominationis summula conflata excrescit ut unitatem proxime superioris denominationis vel æquet vel excedat, (aut etiam duas aut plures unitates,) subscribendus est suo loco excessus (siquis sit, vel si nullus sit, ciphra) & reliquum superiori seriei adjungendum est. Illud igitur curandum est, ut sciatur quot unitates Denominationis inferioris unitatem superioris Denominationis adæquent. *Additio plurium Denominationum.*

Exempli gratia. In addendis monetis Anglicanis; 12 Denarii constituunt unum Solidum; & 20 Solidi unam Libram Anglicam (*Sterling* vocant.) Ideoq; in exemplo appositio cum numerus denariorum sit 17 = 12 + 5, in Denariorum loco subscribo 5; &, pro reliquis 12, adjungo 1 solidum proximæ seriei: Deinde, cum summa solidorum (simul cum 1 transmisso) sit 41 = 40 + 1; sub serie solidorum appono 1; &, pro reliquis 40 adjungo 2 libras proximæ seriei: Denique librarum summulam (cum 2 transmissis) reperio 33. Adeoq; omnium addendorum summa reperitur 33 libræ, 1 solidus, & 5 denarii.

lib.	s.	d.
07.	19.	04.
16.	08.	06.
08.	13.	07.
2	1	
33.	01.	05.

Eodem modo in Fractionibus Astronomicis (ut vocantur) addendis procedendum est: Ubi diviso (verbi gratiâ) Zodiaco in 12 signa, & quolibet signo in 30 gradus, quolibet gradu in 60 minuta prima, & quolibet horum in 60 secunda, & sic deinceps; Pro 60 secundis subsitituendum 1 minutum primum; pro 60 primis, 1 gradum; pro 30 gradibus, 1 signum. Ut in appositio exemplo videre est.

sig	grad.	′	″
1.	3.	16.	30
0.	12.	23.	15
2.	5.	47.	45
4.	23.	51.	00
1	2	1	
8.	15.	18.	30

Atq; eodem prorsus modo in aliis ejusmodi Additionibus procedendum erit, ubi denominationum pluralitas occurrit. Nec quicquam interest discriminis, nisi quod nunc plures nunc

pauciores unitates in gradu inferiori, adæquent Unitatem gradus proxime superioris. Adeo ut non sit opus exsempla plura subjicere.

Additionis praxis in speciebus (ut loquuntur) sive symbolis, & in potestatibus Algebricis, inferius, post explicatam Numerorum subductionem, tradetur.

CAP. XIV.

Subductio Additioni contraria. Subductio quid? Subductionis praxis. in Numeris simplicibus: In numeris Compositis. Praxeos demonstratio. Praxis in partibus decimalibus: in variis Denominationibus. Subductio majoris ex minore, impossibilis. Quantitates negativæ seu Ablatitiæ; non absurde supponuntur; quid innuant. Subductio majoris ex minore, quatenus supponitur præstanda.

Subductio Additioni contraria.

POst Additionis traditionem, ad subductionem deveniendum est; quæ Additioni contraria est: Ut enim Additio Numerum numero, vel saltem Quantitatem quantitati, adjungit; subductio è contrà Numerum numero, vel Quantitatem quantitati, aufert: Adeoq; quod Additio componit id subductio dissolvit: In praxi Additionis, datis partibus investigatur Totum; in praxi subductionis, Dato Toto cum parte una, quæritur Residuum seu pars reliqua.

Subductio quid?

Est igitur *Subducere, Numerum a numero, vel potius Quantitatem a quantitate, auferendo, Residuum exhibere.* Subductionis autem sive Ablationis nota, hæc esse solet —. Adeoq; si ex 5 auferamus 3, restabit 5 — 3. Si ex quantitate A auferatur quantitas B, manebit A — B. Illud autem Arithmetici practici, in praxi subductionis, munus est, ut Residuum quam fieri potest commode notis exprimat, ejusq; valorem intellectui exhibeat. Quod quo pacto fieri potest nunc tradituri sumus.

In numerorum subductione, numeri duo dantur, quorum alter ab altero auferendus est, & tertius quæritur Numerus illud a quo alter est auferendus, *Numerum Minuendum* appello; auferendum

auferendum vero *Minutorem*; tertium autem quem quærimus, *Reſiduum* voco. Sic ſi ex numero quinario auferendus ſit ternarius 3; Numerus Minuendus eſt 5, Minutor 3, qui reſtat autem $5 - 3 = 2$ Reſiduus eſt. Vel univerſim (quoniam alias etiam quantitates ſubducendas eſſe non raro accidit) dici poſſunt quantitas *Minuenda*, quantitas *Minuens*, & quantitas *Reſidua*, vel *Totum*, *Ablatum*, *Reſiduum*.

Numerorum ſimplicium ſubductionem nemo ſupponitur ignorare, ſed vel natura vel uſu quotidiano didiciſſe; ut ſi ex 5 auferantur 3, reſtare 2. Aut ſaltem, ſi illud docere ſit neceſſe; poſitis tot punctis quot eſt numerus minuendus, puta 5, ſi tot deleantur, quot eſt numerus minuens ſeu auferendus, puta 3, reſtare deprehendemus 2. Vel denique ex tabellâ quam ſupra poſuimus, illud depromi poteſt. Si nempe numerus minuens vel auferendus in ſummitate ſumatur, puta 3, atq; inferius in eadem columnâ quæratur numerus minuendus, puta 5, habebitur ad ſiniſtram numerus reſiduus 2. Atq; eodem modo in aliis ſimplicium ſubductionibus peragendum erit. Demonſtratio ſatis patet ex iis quæ de Additione ſupra diximus.

Subductionis praxis in numeris ſimplicibus.

Tabella Additionis & Subductionis.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Ubi-

Subductionis praxis in numeris compositis.

Ubi autem numerorum compositorum unus ab altero est auferendus (vel quidem simplex a composito qui numerum 18 excedit) Minutorem solemus Minuendo ita subscribere, ut singuli inferioris numeri gradus iisdem superioris gradibus directe subsint, (puta Unitates unitatibus, Decades decadibus, Centuriæ centuriis &c.) Deinde a dextra inchoando, singulis figuris seu notis numeri subducendi, ab ejusdem gradûs notâ in numero minuendo, sigillatim subductis, particulares numeros residuos suis locis subscribimus, quorum omnium aggregatum est totius subductionis peractæ Residuum. Sic si ex

1755898	*Minuendus*
650 467	*Minutor*
1105431	*Residuum*

1755898, subducendus si numerus 650467; numeris his ita scriptis & minutoris loci primus, secundus, tertius, &c. (a dextra sive gradu infimo inchoando) iisdem numeri Minuendi locis subsint: primò, ex 8 unitatibus, subductis unitatibus 7, manet unitas 1, (nam $8 - 7 = 1$) subscribenda igitur (infra lineolam ductam) nota 1 deinde ex decadibus 9, subductis 6, manent decades 3, (nam $9 - 6 = 3$) subscribenda igitur decadum loco nota 3: &, eâdem ratione, centuriarum loco, subscribenda 4, quia $8 - 4 = 4$: & sic deinceps $5 - 0 = 5$: $5 - 5 = 0$: $7 - 6 = 1$: deniq; cum ex 1 in loco supremo nulla nota subducenda restat, subscribenda 1; nempe $1 - 0 = 1$. Adeoq; totus Residuus est $1105431 = 1755898 - 650467$.

Vel etiam Residuus superne notari potest, deletis successive notis tam Minuendi quam Minutoris. Sic quia $8 - 7 = 1$, deletis 8 & 7 repono 1: item quia $9 - 6 = 3$, deletis 9 & 6 repono 3: sic pro $8 - 4$, repono 4: & quia $5 - 0 = 5$, figuram 5 intactam relinquo: pro $5 - 5$, repono 0; pro $7 - 6$, repono 1, deniq; 1 (quia nihil insuper inde subducendum est) intactam relinquo; Residuus est idem qui prius, 1105431. Ut in exemplo appositio videre est.

1105431
1755898
650467

Quoties autem contingit notam aliquam numeri subducendi nota sibi supra posita majorem esse; augenda est nota suprapositia mutuata 1 ex loco proxime superiori, quæ in loco præsenti valebit 10, adeoq; sat grandem numerum efficiet ut inde nota subscripta auferri possit: adeóq; nota minutoris in loco

730582
51368
11 1
679214

loco ſequente ſupponenda eſt unitate minor jam facta quam prius erat; vel (quod tantundem valet) nota inde auferenda ſupponenda erit unitate aucta: Unitas autem illa mutuata (ſi libet) poteſt duabus lineolis (memoriæ gratia) interponi. Sic ſi ex 730582 auferendus ſit numerus 51368; numeris rite ſcriptis, ex unitatibus 2 auferendæ occurrunt 8, quod cum fieri non poſſit, mutuatâ ex ſequentibus 1 decade (quæ valet 10 unitates,) fiunt unitates 12, unde ſubductis 8, reſtant 4.

Deinde in loco ſequente, ex decadibus 8, ſubductis 7 = 1 + 6 (nam una jam inde deſumpta in unitates reſoluta priori loco annumerata eſt, & 6 inſuper jam occurruunt ſubducendæ) reſtat 1: tum e millibus 5, ſubductis 3, reſtant 2: deinde in gradu ſequente, ſubducto 1, ex 10 = 10 + 0 (mutuatis nempe 10, ut fieri poſſit ſubductio) reſtant 9: item ſubductis 6 = 1 + 5 (propter 1 jam ſubductum, & 5 jam ſubducenda) ex 13 = 10 + 3 (mutuatis nempe 10 ut fieri poſſit ſubductio) reſtant 7: & denique 7 — 1 (propter 1 inde jam mutuatum) = 6. Adeoq; totus numerus reſiduus eſt 679214 = 730582 — 51368.

Atque jam ratio patet, cur, in ſubductionis praxi, a dextra ſive gradu infimo inchoandum eſſe dixi: Ut nempe numerorum ex gradu ſuperiori ad inferiorem transferendorum (ut fieri poſſit ſubductio) ratio habeatur, quod non adeò commode fieri poteſt ſi a ſiniſtra praxin ordiamur.

Si tamen libeat a ſiniſtra inchoare, poteſt etiam illud fieri, duplici ſaltem modo. Poſſumus enim Reſiduum vel Superius ſcribere vel Inferius, deletis ſucceſſivè notis numeri Minuendi (atq; etiam, ſi libet, Minutoris) eorum loco Reſidui notis ſubſtitutis, quæ & ipſæ aliquoties etiam delendæ ſive emendandæ erunt. Ita ſi ex 7358806 auferendus ſit numerus 650467: Scriptis ut prius numeris; a ſiniſtra ordiendo, ex 7 ſubductis 6 reſtat 1, (hoc eſt revera propter locorum rationem ex 700000 ſubductis 600000 reſtat 100000; ſeu ex 7 millium centuriis ſubductis 6 millium centuriis reſtat 1 millium centuria;) deletis igitur 7 & 6, eorum loco ſuperne

3 3
x 8 4 4 9 *Reſiduus.*
7 3 5 8 0 6 *Minuendus.*
6 5 0 4 6 7 *Minutor.*

ſuperne ſcribatur 1 (= 7 — 6 : deinde ſubductis 5 ex 13 (quoniam ex 3 ſubduci non poſſunt) reſtant 8 = 13 — 5 ; deletis igitur 13 & 5, ſcribatur ſuperne 8 : tum quia 5 — 0 = 5, figuram 5 intactam relinquo (vel, ſi placeat, ipſa deleta aliam figuram 5 ſuperne collocare: licebr) tum, quia 8 — 4 = 4, deletis 8 & 4 ſuperne pono 4 : deinde ſubductis 6 ex 40 (quoniã ex 0 fieri non poteſt) reſtant 34, deletis itaq; 6 & 40, ſuperne ſcribo 34 : deniq; 46 — 7 = 39, deletis igitur 7 & 46 repono ſuperne 39. Adeoq; numerus Reſiduus ſupernè repertus eſt 85339 = 735806 — 650467.

Vel etiam reſiduus inferne notari poteſt, hoc modo.

Praxeos demonſtratio,

735806	*Minuendus.*
650467	*Minutor.*
185449	*Reſiduus*
033	

Totius proceſſus demonſtratio (ſive a ſiniſtra dependet ex ordiamur) ſive dexra noto illo axiomate, *Totum æquatur partibus omnibus ſimul ſumptis*; adeoq; ſubductio omnium *particularum*, æquivalet ſubductioni *totius* ſubducendi.

Subductio Partium Decimalium.

Si fractiones decimales ſint integris numeris adjuncti, operatio nihilominus eodem procedit modo: id tamen ſemper cavendum eſt, ut quilibet gradus numeri inferioris pari gradu numeri ſuperioris ſubſit. Exſemplum hoc eſto.

703.865	
2.7136	
701.1514	

Subductionis praxis in variis Denominationibus

Si ſubductio inſtituenda ſit in quantitatibus plurium (ut loquuntur) Denominationum: eadem tamen eſt proceſſus ratio quæ prius. Illud tantum curandum erit, ut quoties ex claſſe ſeu ſerie ſuperiori (majoris ſcilicet denominationis) mutuanda eſt Unitas pro illâ in ſerie inferiori (ſive denominationis proxime minoris) tot numerentur unitates quot ſerierum ad invicem ratio poſtulat. Sic in ſubductione Monetæ Anglicanæ, pro 1 libra ſubſtituendi erunt 20 ſolidi, pro 1 ſolido 12 denarii. In Fractionibus Aſtronomicis pro 1 ſigno, reponendi erunt 30 gradus, pro 1 gradu, 60 minuta prima; pro 1 minuto

lib.	*ſ.*	*d.*	*ſig.*	*gr.*	′	″
4.	3.	5.	8.	15.	3.	10.
2.	17.	6.	3.	5.	18.	11.
1	1		1	1		
1.	5.	11.	5.	9.	44.	59.

nuto primo, 60 secunda &c. ut in exsemplis adjunctis videre est.

Denique si quando plures fuerint numeri subducendi, vel ex uno aliquo proposito vel ex pluribus simul sumptis; priusquam subductio instituatur, tam numeri subducendi colligendi sunt in unã summam seu aggregatum, quam numeri illi ex quibus sunt subducendi & tum demum, ex aggregato hoc, subducendum erit aggregatum illud, ut Residuum habeatur. (Atq; idem omnino faciendum erit non modo in Numerorum sed & in aliarum quarumlibet quantitatum subductione.) Ut in exsemplo appositio videre licet. *Subductionis praxis ubi varii numeri sunt subducendi.*

5369		
9572	23301	*Minuendus.*
8360		
3961		
5603	10775	*Minutor.*
1211		
	12526	*Residuum.*

Vel etiam ubi plures numeri, vel ex uno, vel ex plurium aggregato sunt subducendi; possunt plures subductiones successive fieri hoc modo.

23301	
− 3961	
19340	
− 5603	
13737	
− 1211	
12526	

In omni autem Subductione actualiter præstanda, notandũ est, Quantitatem subducendam minorem esse debere (saltẽ non majorẽ) quantitate illa ex quâ est subducenda: Impossibile enim est ut quantitas major ex minore desumi possit, (cum pars suo toto major esse nequeat:) Adeoq; siquando illud præstandum proponatur, Propositum est impossibile. Verbi gratia, Impossibile est ut ex 5 subducantur 8, eùm numerus hic sit illo major. *Subductio Majoris ex Minore, impossibilis.*

Nihilominùs, quanquam hoc sit reápse impossibile; non raro tamen apud Arithmeticos, præsertim Algebristas, tanquam esset possibile præstari jubetur: Supponunt enim (præter reales quantitates) quantitates quasdam imaginarias, quæ minores sint quã nihil, quas quantitates Negativas, sive Ablatitias appellant: Et prout (distinctionis gratia, ubi opus est,) quantitatibus veris (quas positivas vel affirmativas appellant) notam hanc + Additionis seu Affirmationis vel Positionis indicium præfigunt; ita quantitatibus imaginariis, negativis, sive ablatitiis, præfigunt notam hanc −, Subductionis vel Ablationis *Quantitates Negativæ;*

sive Negationis indicium. Adeoq; si ex 5 auferenda sint 8, manere dicunt — 3, hoc est, quantitatem quæ sit, numero ternario, minor quam nihil.

Non absurde supponuntur. Hujusmodi autem (quæ supponuntur) quantitates Negativæ, quanquam videri possint non sine absurdo supponi, suos tamen habent usus eximios, neq; sine magno commodo ab Arithmeticis (Geometris item, aliisq; Mathematicis) introducuntur: ut suo loco aliquando patebit. Hic autem sufficiet ostendere eam suppositionem nihil absurdi supponere. Dum enim dicunt 5 — 8 = —3: idem est ac si dicerent, *Qui supponit 8 ex 5 demi, supponit ille aliquid ternario numero minus quam nihil*; (qui enim supponit 8, hoc est 5 + 3, ex 5 subduci, supponit ille totum quinarium sublatum esse atq; insuper 3 plus quam totum, adeoq; restare tanto minus quam nihil.) Atq; hoc quidem non magis incommode dicitur, quam hoc, *Qui supponit Hircocervum, supponit ille animal quoddam ex Hirco & Cervo conflatum*; quæ propositio vere enunciari potest quanquam neq; *Hircocervus*, neq; *Animal ita conflatum* existat, aut quidem existere possit: Potest enim Propositio vera esse, quamvis neq; Prædicatum neq; subjectum actu existat, aut quidem sit possibile. Ita quamvis neq; sit possibilis quantitas — 3, neq; 5 — 8, tamen verum est has quantitates (suppositicias licet) æquales esse, atq; qui alteram supponit reliquam etiam supponere. Et quidem qui dicit 5 — 8 = — 3, non modo dicit subductionem illam 5 — 8 impossibilem esse, sed ostendit mensuram impossibilitatis; nempe, numerum 8 tantò majorem esse quam ut possit ex numero 5 subduci quantus est numerus 3.

Subductio Majoris ex minore, quatenus præstanda supponitur. Quando autem hujusmodi subductio requiritur, (nempe ut major ex minore auferatur,) illa utcunq; sic præstanda est; operatione scilicet præscriptæ contraria. Numerus qui ut Minuendus proponitur subducendus est ex eo qui proponitur ut Minutor, & Reliquo præponenda est nota negationis. Ut ubi requiritur subductio numeri 8 ex numero 5; subductis contra 5 ex 8, residuo 3 præponenda est nota —: Adeoq; ut + 8 — 5 = + 3; sic + 5 — 8 = — 3. Atq; eadem ratione, erit 546 — 987 = — 441: Nam subductis 6 ex 7 restat 1; subductis 4 ex 8 restant 4; subductis 5 ex 9 restant 4; & (quia operatio peracta est imperatæ contraria) præfigenda est nota —.

+ 546
— 987
— 441

Atq;

Atq; hæc de Subductionis Numerosæ praxi dicta sufficiant. De praxi tam Additionis, quam Subductionis Speciosæ sive Symbolicæ, proxime docendum est.

CAP. XV.

Additio & Subductio Algebrica & Speciosa. Utriusq; Regulæ & Praxis.

Additio & subductio algebrica seu speciosa.

IN additione & subductione Algebrica, vel Speciosa, (de quibus jam dicendum est,) sive veterum notis Cossicis sive Recentiorum Speciebus seu Symbolis perficiantur, (de quibus Cap. XI. diximus,) duo potissimum consideranda occurrunt; nempe, præter ipsas Species seu quantitatum Notas, *Signorum* etiam (uti vocari solent) habenda est ratio.

Signa + & — quid indicant.

Sunt autem Signa ea (quæ nempe Additioni & Subductioni inserviunt) hæc duo, + & —. Quorum illud quidem + *Affirmativum* est, sive *Positivum*, & notat quantitatem cui præfigitur affirmari sive adesse; (quod quidem ubiq; intelligendum est ubi nullum signum præfigitur:) Hoc autem — Negativum seu Ablativum, denotans eam cui præfigitur quantitatem negari, sive deesse; & symbola vel species sic insignita non tam quantitatem, quam quantitatis absentiam seu defectum indicant.

Et propterea Species quæcunq; seu Symbolum quodvis, cui signum — negativum præfigitur, semper interpretandum est sensu contrario isti de qua quæritur quantitati, ejusmodi symbolo vel absoluto, vel (quod tantundem valet) signo affirmativo insignitæ. Verbi gratia, Si de Lucro quæratur, quod nota B vel + B denotetur, erit — B (sensu contrario interpretandum) tantundem Damni. Sic, si C vel + C indicet excessum; — C indicabit defectum. Item, si *a* vel + *a* sit augmentum, erit — *a* decrementum. Si 2 vel + 2 solem tot gradibus supra Horizontem elevatum indicet; — 2 eundem denotabit totidem sub Horizonte gradibus depressum. Et contra. Et quidem universaliter quicquid sit illud quantitatis quod signo Affirmativo

designatur, ejusdem contrarium signo Negativo designari intelligendum est. Puta

Si signum Affirmativum indicet, *Affirmationem, positionem, augmentum, lucrum, accessum, ascensum, supra, ultra, plus, gravius, calidius, adjici, elevari, &c.*

Signum negativum indicabit, *Negationem, ablationem, decrementum, damnum, recessum, descensum, infra, citra, minus, levius, frigidius, auferri, deprimi, &c.*

Et contra, ubi hæc signo affirmativo, illa signo negativo intelligenda erunt.

His intellectis, de ipsa Additionis & Subductionis praxi agendum; ubi hæ observandæ sunt regulæ.

De Speciebus, regula. Si vel in Additione vel in Subductione plures occurrant species seu symbola, quantitates illæ quæ iisdem Symbolis designantur sunt invicem vel addendæ vel subducendæ (prout res postulaverit,) ut earum vel summa vel differentia intelligatur, seorsim notanda: quæ vero distinctis symbolis sive speciebus designantur, non ita invicem comparandæ sed sigillatim considerandæ & notandæ. Causa est, quia dum distinctis symbolis denotantur, quorum ad invicem ratio vel ignoratur, vel saltem nondum consideratur, non possunt sine confusione conjungi. Puta si 2 solidi & 1 denarius, addendi sint, non dicendum est summam esse 3; sed 2 solidi & 1 denarius.

Ubi autem symbolorum utut distinctorum ratio ad invicem innotescit & actu consideratur, possumus, interpretando, etiam diversa symbola in unum colligere; nempe pro quantitate eorum altero designanda ipsi æqualem substituendo quæ symbolo altero indicetur mutatis interim mutandis prout symbolorum ratio adinvicem postulat. Ut, si 1 ½ solidis, addendi sint 6 denarii, dicimus fieri 2 solidi; quia nempe, ubi innotescit unum solidum tantundem valere atq; 12 denarios, & proinde ½ sol. = 6 den. possumus pro 6 denariis substituere, semissem solidi; & deinde 1 ½ sol. + 6 den. hoc est, 1 ½ sol. + ½ sol. erunt 2 solidi. Et similiter in aliis. Atque hoc quidem indifferenter sive in Additione sive in Subductione intelligendum est.

De signis + & —, Regulæ. De signis autem + & —, aliæ Additioni aliæ Subductioni inserviunt regulæ. Quarum quæ Additioni inserviunt hæ sunt.

In Additione 1 *In Quantitatibus addendis, si signa sint similia, subscribenda est quantitatum*

quantitatum ſumma cum communi ſigno. Puta pro + 2 + 3 ponendum + 5; quia utraq; quantitas ponenda intelligitur. Item, pro − 2 − 3 ponendum − 5; quia utraq; auferri intelligitur.

2. *Si ſint autem ſigna Diſſimilia, ſubſcribenda, eſt quantitatum Differentia, cum ſigno majoris quantitatis.* Puta pro + 3 − 2 ponendum + 1; quia nempe ubi intelligitur, apponi tria, & deinde illorum duo auferri, unicum eorum adjectum manet: item pro − 3 + 2 ponendum − 1; quia nempe uno plus aufertur quam quod reſtituitur. Et ſimiliter in alis.

Oughtredus utramq; regulam ſic breviter conjungit, *Additio ſpecioſa conjungit omnes magnitudines datas, ſervatis ſignis.*

His intellectis, praxis, non erit difficilis. Exſemplum eſto,

Addenda	+ 3 ♌ + 1 ♑ − 2 ♍ + 3	vel	+ 3 C + 1 Q − 2 R + 3
	− 1 ♌ + 2 ♑ − 3 ♍ − 4		− 1 C + 2 Q − 3 R − 4
Aggregatum	+ 2 ♌ + 3 ♑ − 5 ♍ − 1		+ 2 C + 3 Q − 5 R − 1

vel	3 Ac + 1 Aq − 2 A + 3	vel	3 *aaa* + *aa* − 2 *a* + 3	vel	$3a^3 + a^2 - 2a + 3$
	− Ac + 2 Aq − 3 A − 4		− *aaa* + 2 *aa* − 3 *a* − 4		$-a^3 + 2a^2 - 3a - 4$
	2 Ac + 3 Aq − 5 A − 1		2 aaa + 3 aa − 5 a − 1		$2a^3 + 3a^2 - 5a - 1$

Nempe ſi addantur 3 ♌, & − 1 ♌ hoc eſt, ſi intelligantur apponi 3 Cubi, & (propter ſignū − contrario ſenſu exponendū) auferri 1 Cubus, tantundem eſt atq; ſi apponantur 2 Cubi, (quia 3 − 1 = 2.) ita ſi addantur + 1 ♑ & + 2 ♑, cum utrumq; affirmetur, aggregatum eſt + 3 ♑. Item − 2 ♍ & − 3 ♍, cum utrumq; negetur, erit − 5 ♍, (qui enim tollit 2 ♍, & tollit inſuper 3 ♍, tollit omnino 5 ♍ quia 2 + 3 = 5.) deniq; + 3 & − 4, ſunt 1; nempe uno plus tollitur quam apponitur. Et propterea aggregatum duorum additorum (ex ſingulis ſummulis collectum) eſt + 2 ♌ + 3 ♑ − 5 ♍ − 1.

Sic in exſemplis ſequentibus, ſi addantur A + B − C, & − 2 B + 2 C − D & A − C + E, (quæcunq; demum ſint quantitates ſymbolis illis A, B, C, &c. delignatæ) agregatum omnium erit 2 A − B − D + E. Et pariter in reliquis.

A +

$A + B - C$	$5b^4 - 2b^3 - b^2 + 4b$
$= 2B + 2C - D$	$+ b^2 + b - 3$
$A - C + E$	$- b^4 - 5b^3 - b^2 + 4$
$2A - B - D + E$	$4b^4 - 6b^3 - 2b^2 + 5b + 1$

Verbi gratia, si supponamus A, B, C, D, E, significare 1, 2, 3, 4, 5. Item b, b^2, b^3, b^4, significare 3, 9, 27, 81. tantundem valebunt ista atq; hæc.

$1 + 2 - 3 = = = 0$	$405 - 54 - 9 + 12 = = 354$
$- 4 + 6 - 4 = = = - 2$	$+ 27 + 3 - 3 = = 27$
$1 - 3 + 5 = 3$	$-81 - 135 - 9 + 4 = = -221$
$2 - 2 = 0 - 4 + 5 = 1$	$324 - 162 - 18 + 15 + 1 = = 160$

In subductione hæ observandæ sunt Regulæ.

In Subductione.

1. *Si signa sint Dissimilia subscribenda est quantitatum summa, cum signo superioris, nempe quantitatis minuendæ seu illius unde faciendæ est subductio.* Puta si ex $- 3$ auferamus $+ 2$, residuum erit $- 5$. Nempe si supponantur jam deesse 3, & ulterius auferantur 2, tandem deerunt $5 = 3 + 2$. Item si ex $+ 3$ auferantur $- 2$, residuum erit $+ 5$. Nempe si jam adsint 3 & insuper tollatur, (hoc est, suppleatur) defectus duorum, sive restituantur 2, jam tandem aderunt $5 = 3 + 2$.

2. *Si signa sint similia, subscribenda est quantitatum Differentia; cum signo communi, ubi quantitas auferenda minor est; sed cum signo cum contrario, ubi quantitas auferenda est major.* Puta, si ex $+ 3$ auferantur $+ 2$, manebit $+ 1$, quia $3 - 2 = 1$; Si vero ex $+ 3$ auferantur $+ 4$, manebit $- 1$, quia $3 - 4 = - 1$, supponitur nempe 1 deesse. Item si ex $- 3$ auferamus $- 2$, manebit $- 1$; quia nempe si intelligantur deesse 3, & auferantur $- 2$ sive suppleatur defectus duorum, hoc est, si restituantur 2, tandem deerit non nisi 1: Si vero ex $- 3$ auferamus $- 4$, manebit $+ 1$; nempe ubi deerant 3, si restituantur 4, aderit 1. Et pariter in aliis.

Oughtredus utramq; conjunctim sic effert, *Subductio speciosa conjungit utramque magnitudinem datam, mutatis omnibus signis quantitatis subducendæ.*

His

His explicatis exsempla sequentia non difficulter percipie8tur.

$$\begin{array}{lr} \text{Ex} & +3\,\text{☉} - 2\,\text{♃} + 3\,\text{♃} - 5 \\ \text{aufer.} & +2\,\text{☉} - 1\,\text{♃} - 2\,\text{♃} + 3 \\ \hline \text{restat.} & +1\,\text{☉} - 1\,\text{♃} + 5\,\text{♃} - 8 \end{array} \qquad \text{vel} \qquad \begin{array}{r} 3C - 2Q + 3R - 5 \\ 2C - 1Q - 2R + 3 \\ \hline 1C - 1Q + 5R - 8 \end{array}$$

$$\text{vel} \quad \begin{array}{r} 3Ac - 2Aq + 3A - 5 \\ 2Ac - Aq - 2A + 3 \\ \hline Ac - Aq + 5A - 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3a^3 - 2a^2 + 3a - 5 \\ 2a^3 - a^2 - 2a + 3 \\ \hline a^3 - a^2 + 5a - 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3aaa - 2aa + 3a - 5 \\ 2aaa - aa - 2a + 3 \\ \hline aaa - aa + 5a - 8 \end{array}$$

Nempe, si ex 3 ☉ auferantur 2 ☉, manebit 1 ☉; quia $3 - 2 = 1$. Item, si ex -2 ♃ auferamus -1 ♃, manebit -1 ♃; quoniam, si ubi deerunt quadrata 2, auferatur vel suppleatur defectus unius, hoc est, restituatur 1, deerit adhuc quadratum unum sive 1 ♃. Item, si ex 3 R auferamus -2 R supersunt $+5$ R; nempe si ubi adsunt 3 radices, restituantur adhuc 2 radices, aderunt omnino 5 radices. Deniq; si ex -5 auferantur $+3$ residuum erit -8: nempe cum jam desint 5, si adhuc auferantur 3, deerunt omnino 8. Si igitur residua istæc omnia particularia in unum colligantur, erit illud 1 ☉ $-$ 1 ♃ $+$ 5 ♃ $-$ 8.

Similiter in exsemplis subsequentibus. Si ex $A + 2B - 3C + D$, auferantur, $2B - 2D + E$, manebit $A - 3C + 3D - E$. Et pariter in aliis.

$$\begin{array}{r} A + 2B - 3C + D \\ +2B \qquad - 2D + E \\ \hline A \qquad - 3C + 3D - E \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3a^3 + 3a^2 - 2a - 2 \\ 2a^3 + 3a^2 + 2a - 10 \\ \hline +a^3 \qquad - 4a + 8 \end{array}$$

Quod si supponamus A, B, C, D, E, significare 1, 2, 3, 4, 5. Et a, a^3, a^3, significare 2, 4, 8. tantundem valebunt illa atq; hæc.

$$\begin{array}{r} 1 + 4 - 9 + 4 \qquad == 0 \\ +4 \qquad - 8 + 5 = +1 \\ \hline 1 \pm 0 - 9 + 12 - 5 = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 + 12 - 4 - 2 = 30 \\ 16 + 12 + 4 - 10 = 22 \\ \hline 8 - 0 - 8 + 8 = 8 \end{array}$$

Atq; hoc quidem, de Additione & Subductione Algebricâ & Specioſa, dicta ſufficiant.

Quod autem ſuperius de Additione monuimus, illud etiam de utriſq; Additione & Subductione (ſive Numeroſis ſive ſpecioſis) intelligendum eſt; Nempe *Quando plures quantitates ſunt continuè vel addendæ vel ſubducendæ, vel partim addendæ partim ſubducendæ, perinde eſt quo ordine inſtituantur operationes, modo omnes continuè peragantur.* Non enim de ordine ſeu ſitu quantitatum quæritur ſed de earum magnitudine; (nempe quantum illud ſit quod emergit, quocunq; tandem ordine diſponantur.) Nempe $6+3-4=6-4+3=3+6-4=3-4+6=-4+6+3=-4+3+6=5$. Item $A+B-C=B+A-C=A-C+B=B-C+A=-C+A+B=-C+B+A$. Et ſimiliter in aliis.

CAP. XVI.

Additionis & Subductionis, per contrarias operationes, probatio. Objectionibus Rami reſpondetur. Quæſtiunculæ aliquot familiares ſolvuntur. Probatio novenaria. Vtut lubrica ſit, non tamen contemnenda. Quomodo reddi poteſt certa.

POſt traditam Additionis & Subductionis praxin; annectendum videtur aliquid de utriuſq; Probatione ſive Examine. Cum enim in Arithmetices praxi, tyronibus præſertim & parum exercitatis, error calculi facillime poſſit irrepere: ſolent hic Arithmeticæ Practicæ Magiſtri methodos tradere operationem jam peractam examinandi, quo melius perſpectum ſit numquis error ſubſit. Quam ego rem in hunc locum diſtuli, quia Additionis & Subductionis examinationem ſimul tradendam eſſe duxerim; partim quod eadem ferè ſit utriuſq; methodus; partim etiam quod neutra ſeorſim tam commodè tradi poſſit, cum altera alterius probationem præſtet.

Examinatio ſive Probatio Additionis.

Additionem peractam ſolenne eſt per Subductionem (operationem ipſi contrariam) examinare. Cum enim duo numeri ſimul additi ſunt, ſi ex ſumma ſubducatur eorum alterutra, reſtabit

restabit reliqua. Ut si 2 + 3 = 5; erunt 5 − 2 = 3, & 5 − 3 = 2. Hoc est, si 2 & 3 addita constituant 5; tum, si ex 5 auferantur 2, manebunt 3; si auferatur 3 manebunt 2. Atq; idem patebit, si in tot punctis res peragatur. Si enim puncta bina & terna constituant quina; deletis 3 manebunt 2; vel deletis 2 manebunt 3. Demonstratio dependet ex illo axiomate, *Si æqualia æqualibus auferantur, reliqua erunt æqualia.*

	+ 2	2
	+ 3	3
	5	5
	− 2	− 3
	3	2

Ideoq; si sint deletis utrinq; manebunt

3 + 2 = 5	
3	3
2	2

Si igitur, ubi ex Additionis summa additorum alterum auferatur, quod restat æquatur additorum reliquo, operatio rite peracta est; si autem Residuum subductionis, reliquo addendorum non congruat; indicium est erroris. Atq; idem in grandioribus numeris accidit. Ut in appositio exsemplo.

378569	addendi.
482586	
861155	Summa.
482586	Subducendus.
378569	Residuus.

Si autem plures numeri addantur; Subductionis opus sæpius erit iterandum. Ut in exsemplo appositio.

38925	addendi.
19634	
82703	
98516	
239778	Summa.
38925	Subducendus.
200853	Residuus.
19634	subducendus.
181219	Residuus.
82703	Subducendus.
98516	Residuus.

Verum cum hoc pacto examinandi labor evadat ipsâ primaria operatione major: Satius fortasse videbitur ipsam potius Additionis operationem repetere: præsertim si ordine retrogrado vel aliquo alio modo inverso procedatur: verbi gratia, Si prius singulas series addendo a nota suprema deorsum processimus (ut in exsemplo ultimo, 5 + 4 = 9. 9 + 3 = 12. 12 + 6 = 18) in repetita operatione ab infima nota incipientes procedamus sursum, (ut 6 + 3 = 9. 9 + 4 = 13. 13 + 5 = 18,) ut eo minus sit periculi in eundem errorem,

errorem, si quis prius commissus fuerit, denuo incidendi.

Quod autem de Additionis probatione in addendis numeris absolutis dictum est; pariter etiam in additione Algebrica & Speciosa locum habet; ut & in addendis quantitatibus plurium denominationum. Nam & hic eadem omnino ratio obtinet quæ superius, ut non sit opus alia demonstratione. Exsempla sunto.

	lib.	*unc.*	*drach.*	*scrup.*	*gr.*		
Adde	13	9	5	1	18	$2Q+1R+3$	Additio.
	2	6	2	2	6	$3Q-2R-1$	
Summa	16	4	0	1	4	$5Q-1R+2$	
Subduc.	2	6	2	2	6	$3Q-2R-1$	Subduct.
Restat.	13	9	5	1	18	$2Q+1R+3$	

Additio	$A+3B-C+2D$	b^3+3b^2-5b-1	addit.
	$3A \quad +2C-D$	$2b^3-b^2+4b+6$	
	$4A+3B+C+D$	$3b^3+2b^2-b+5$	
Subdu.	$3A \quad +2C-D$	$2b^3-b^2+4b+6$	subduc.
	$A+3B-C+2D$	b^3+3b^2-5b-1	

Probatio Subductionis

In Subductionis probatione, eâdem fere methodo incedendum est, qua in probatione additionis: sed vice versa. Ut enim subducendo examinatur additio, ita addendo examinanda est subductio. Nempe, si quantitas ablata & Residua simul addita constituant quantitatem primo propositam (unde nempe altera auferenda erat) indicium est operationem ritè processisse; sin secùs, erratum est. Nam *Ablatum & Residuum simul æquantur Integro* (quippe Totum suis Partibus simul sumptis;) ideoq; *si Residuo restituatur Ablatum, redibit Integrum.* Exsempli gratia. Si ex numero quinario, auferatur binarius, & ternarius superesse dicatur, patet operationem probe peractam esse, quia numeri binarius & ternarius (ablatus & residuus) simul additi constituunt quinarium. Quod itidem in totidem punctis ostendetur; nam si punctorum quinq; deletis duobus, tria dicantur superesse; verum illud esse liquet, quoniam si tribus illis residuis restituantur duo ablata,

5	$5-2=3$
2	$5=3+2$
3	
2	. . | . . .
5	

ablata, redibit punctorum numerus quinarius primo positus. Vel denique si sint $5-2=3$, additis utrinq; 2, aggregata erunt æqualia $5=3+2$; & contra si æqualibus $5=3+2$, auferantur æqualia puta 2 manebunt æqualia $5-2=3$.

$$\left.\begin{array}{r} 5-2=3 \\ 2=2 \\ \hline 5\quad\ =3+2 \end{array}\right\}\text{adde.}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3+2=5 \\ 2=2 \\ \hline 3\quad\ =5-2 \end{array}\right\}\text{subduct.}$$

Atque idem prorsus, iisdem de causis, in numeris majoribus non minus valebit; ut & in subductionibus Algebricis & speciosis sive symbolicis; aut etiam in Quantitatibus plurium denominationum. Ubiq; enim & universaliter obtinebit illud, *Sublatum & Residuum æquantur Toti*. Exempla aliquot subjecimus.

Ex. $3\mathcal{C}+2\mathcal{Z}-1\mathcal{L}$
tolle $1\mathcal{C}-1\mathcal{Z}+3\mathcal{L}$
Resid. $2\mathcal{C}+3\mathcal{Z}-4\mathcal{L}$
Sūma $3\mathcal{C}+2\mathcal{Z}-1\mathcal{L}$

$$\left.\begin{array}{r} 5Ac-4Aq+A-1 \\ 3Ac+2Aq-2A+3 \\ \hline 2Ac-6Aq+3A-4 \end{array}\right\}$$
$$5Ac-4Aq+A-1$$

$$\left.\begin{array}{r} 2A-3B+C \\ A+B-C \\ \hline A-4B+2C \end{array}\right\}$$
$$2A-3B+C$$

	dies.	horæ.	minuta.
	45.	12.	56.
	13.	18.	7.
	31.	18.	49.
	45.	12.	56.

Atq; hactenus quidem ostendisse sufficiat mutuam tam Additionis quam subductionis, examen sive probationem per operationem contrariam.

Non ignoro interim Ramum, & post illum alios, censores fortè plus satis rigidos, hujusmodi Additionis & Subductionis mutuas sive demonstrationes sive probationes rejicere; non quidem ut falsas aut fallaces, sed ut superfluas: quippe cum veritas operationis sive in addendo sive in subducendo ex ipso progressu satis appareat, (si nempe rite procedat uti regulis docetur,) ideoque demonstrationem aliunde frustra pentendam esse. *Objectio Rami.*

Solutio. Ego autem rationem illam Rami vix commode applicatam arbitror, aut rei, quæ jam agitur, rite accommodatam. Vix enim quisquam (uti credo) est, qui concessa firmitate regulæ, & exsempli pariter cum illa regulâ conformitate, dubitabit adhuc de veritate operationis; (siquis enim ejusmodi reperiatur, fateor illum sub Rami censura meritò cadere, ut qui, concessis præmissis, ipsaque syllogismi formâ, de conclusione interim dubitat:) Verum concessâ Regulæ certitudine, de præsentis operationis cũ datâ regulâ conformitate, merito fortasse nonnunquam dubitabitur; hujusmodi autem dubitationes his probationibus tollendas docent. Cum autem doceat Ramus hæcce dubia siqua sint tollenda esse repetendo totã operationẽ peractam, eamq; ad regulam exigendo: quanquam non negem rem ita peractam satis feliciter succedere posse, tamen (pace tanti viri) facilius eundem errorem calculi recurrere posse judico eodem opere iterato, quã opere aliquantùm variato: (quod & facile concessuros arbitror qui vel leviter calculo exercitati sunt;) adeoq; melius per operationem contrariam, quam eandem repetendo, examen faciendum.

Sed & alia me movet ratio cur nolui reciprocas has examinationes sive probationes exterminare; Nempe quod, hoc pacto exercitati, utriusq; operationis, Additionis scilicet & subductionis comparatas vires persentiscent tyrones Arithmetici: nimirum hanc resolvere quod illa componit. Est enim Additio istius quasi γένεσις, cujus subductio est ἀνάλυσις. Ea vero quæ συνθετικῶς construuntur, ἀναλυτικῶς examinare, nec Arithmeticum dedecet, nec Geometram.

Iisdem item quæ jam tradidimus principiis solvuntur hujusmodi quæstiones (quibus se exercere tyrones non incommode poterunt)

$$\begin{array}{r} 4 \\ \underline{3} \\ 7 \\ \underline{4} \\ 3 \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{additio} \\ \\ \\ \text{subductio} \\ \\ \end{array} \left\{\begin{array}{l} \underline{7} \\ 4 \\ 11 \\ \underline{7} \\ 4 \end{array}\right.$$

Quis Numerus ille, unde si demantur 4, *restabunt* 3? Additis nempe 4 & 3 (sublato & residuo) prodibunt 7, numerus quæsitus. Item *A quo numero tollenda* 7, *ut restant* 4? Additis scilicet 7 & 4 prodibunt 11; hoc est, numerus ablatus & numerus residuus simul additi dabunt numerum minuendum.

Ita

2436 } additio.
1563 }
3999 }
2436 } subductio.
1563 }

Ita in numeris grandioribus; *Qui, ære alieno obstrictus, jam solvit libras* 2436, *& etiamnum debet libras* 1563, *quanto primitus debito obstingebatur*? Seu (quod perinde est) a quo numero tollenda sunt 2436, ut restent 1563? Additis numeris 2436, & 1563 prodibit quæsitus 3999. Hos autem numeros ita repertos eos ipsos esse qui quærebantur, inde liquet, quod, si subductiones fiant prout quæstiones propositæ postulant, numeri residui iidem erunt quos quæstiones postulabant. ut patet.

Contra vero, si quæratur *Quis numerus ille sit cui si addantur* 6 *prodibunt* 10? Ex additionis

10 } subductio { 783
6 } { 356
4 } additio { 427
10 } { 783

summa 10, auferatur numerorum additorum alter (cognitus) 6, & prodibit reliquus (quæsitus) 4. Item *cui numero addenda sunt* 356 *ut fiant* 783? subductione facta, prodibunt 427. Hos autem sic inventos numeros eos ipsos esse qui quærebantur, patebit, si additiones juxta quæstionum præscriptum peragantur, prodibunt enim summæ indicatæ.

Eodem modo si quæratur *Quis numerus sit qui, a quinario, binario differt*? Quoniam differentia potest esse, vel in excessu vel in defectu; patet ejusmodi numeros duos esse, majorem nempe & minorem: illum addendo, hunc subducendo inveniemus. Est enim septenarius binario major, & ternarius binario minor, quam est quinarius. Sic 3758 est differentia numeri 5371 a duobus numeris nempe 9129 majore, & 1613 minore, quorum ille addendo, hic subducendo investigatur.

5 } additio { 5371
2 } { 3758
7 } { 9129

5 } subd. { 5371
2 } { 3758
3 } { 1613

Possunt autem hæc omnia etiam per *Regulam algebræ* (ut loquuntur) vel Analiticen, aut Arithmeticam speciosam pariter ostendi. Verbi gratia. Si quæratur *Cui numero addenda*

7,

$$\left.\begin{array}{r} 1\mathcal{C}+7=20 \\ 7=7 \\ \hline 1\mathcal{C}\quad =13 \end{array}\right\}\text{subductio}$$

$$\left.\begin{array}{r} A-325=243 \\ 325=325 \\ \hline A\quad =568 \end{array}\right\}\text{additio.}$$

$$\text{summa}\quad \begin{array}{r} 402= E \\ 261 \end{array}$$

$$\text{Residua}\quad \begin{array}{r} 141 \\ 120= E \end{array}$$

7, *ut fiant* 20? Numerus quæsitus dicatur $1\mathcal{C}$; ergo $1\mathcal{C}+7=20$; auferantur utrinq; 7; & restat $1\mathcal{C}=13$, numerus quæsitus. Ita, *A quo numero auferenda* 325 *ut restent* 243? Numerus quæsitus dicatur A; erit ergo $A-325=243$: Et (additis utrinque 325) $A=568$. Item *Quis numerus est cujus differentia a* 261, *est* 141? Numerus quæsitus dicatur E; ergo erit $261 \pm 141 = E = \left\{\begin{array}{l}402.\\120.\end{array}\right\}$ numerus quæsitus. Et similiter in aliis.

Siquis autem inquirat verbi gratia, *Quinam addendi sint numeri, ut summa sit* 7; vel *Quinam ex quibus subducendi, ut restent* 7; Hujusmodi quæstiones essent planæ ludicræ & nugaces; cum ex datis propositis in quæstione nihil certi elicitur; quippe modis innumeris responderi poterit. Puta $1+6$, $2+5$, $3+4$, $1+2+4$, $1+2+3+1$, $5+1+1$, $8-1$, $10-3$, $20-13$, $5+6-4$, $12-3-2$, &c. Nam ex solo Aggregato, vel Residuo, de particulis additis aut subductis nil certi constabit.

Subductionis alia probatio.

Notandum autem & hic est, aliam esse consimilem subductionis probationem, eidem prorsus fundamento innixam. Nempe (in operatione legitime peracta) *Si numerus residuus a numero primum posito auferatur restabit numerus prius ablatus.* Puta si ex 583 auferendo 291 deprehendero primum 312. Quod an recte probaturus, ex 583 (numero proposito) subduco 312 (residuum inventum,) ut videam num sic proveniet 291 numerus prius ablatus: inventio autem jam residuum esse non illum sed 271, ipso minorem; unde deprehendo errorem calculi alicubi irrepsisse

$$\left.\begin{array}{r} 583 \\ 291 \\ \hline 312 \end{array}\right\}\text{subductio mendosa}\qquad \left\{\begin{array}{r} 583 \\ 312 \\ \hline 271 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} 583 \\ 291 \\ \hline 292 \end{array}\right\}\text{subductio emendata}\qquad \left\{\begin{array}{r} 583 \\ 292 \\ \hline 291 \end{array}\right.$$

repsisse; quem repetito oppere in decadum serie commissum intelligo, dum decadas 31 pro 29 posuerim; & verum residuum esse 292. Fundamentum hujus probationis hoc est, quoniam cum ablatus & residuus æquentur toti, utrovis eorum ablato reliquis manebit. Adeoq; usi toti 583 æquentur duo simul 291 & 292, sicut sublato 291 manebit 292, ita sublato numero 292 manere necesse est alterum 291.

Supereſt adhuc alius tam Additionem quàm Subductionem probandi ſive examinandi modus; quam *probationem Novenariam* appellant. Eaq; ſic inſtituitur. *Probatio Novenaria.*

In Additione, Numerorum addendorum ſingulis figuris indiſcriminatim, nulla locorum conſideratione habita, ſimul additis; & 9 quoties fieri poteſt abjectis, reſiduum numero novenario minus obſervetur: atq; idem etiam in additorum ſumma fiat. Quo facto, ſi duo iſta reſidua ſint invicem æqualia, operationem illam ritè peractam eſſe conjicimus; ſin ſecùs, certum eſt alicubi errorem incidiſſe. Sic in appoſito exſemplo: 3, 5, 8, ſimul addita conſtituunt 16, unde abjectis 9 reſtant 7, (ſeu, quod eodem redit, 1 + 6 = 7;) huic numero 7 addantur inſuper 1, & 2, ut fiant 10, unde demptis 9 reſtat 1: huic additis 3 & 5 ſiunt 9, quæ abjiciantur; tum 6, 1, & 3, ſunt 10, unde abjectis 9 reſtat 1; hoc reſiduum ſeorſim (memoriæ cauſa) notetur. Deinde & in ſumma id ipſum faciendum eſt; ubi 1 + 1 + 9 = 11. Et 11 − 9 = 2. tum 2 + 4 + 4 = 10. deniq; 10 − 9 = 1. Quod etiam reſiduum ſeorſim noto. Cum reſidua (poſt 9 quoties fieri poteſt abjecta) ſint æqualia (utrobiq; 1) conjicio operationem illam rite peractam eſſe. Si autem reſidua iſta fuiſſent inæqualia, certum eſſet errorem alicubi admiſſum eſſe. *In Additione.*

3581	
2350	1 X 1
6013	
11944	

Quo fundamento nititur hæc probatio, neſcio an quiſquam tradiderit; ego certe non memini me uſpiam legiſſe. Verùm, uti in aliis ſoleo, ita hic mihi incumbere judico operationis fundamentum tradere, ut inde diſcant qui velint non rem tantum, ſed & rei rationem; præſertim cùm in diſciplinis Mathematicis non ſit adeo congruum ἀναποδείκτως effata pronunciare. Fundamentum igitur iſtius operationis (ſive unde primitus originem ſumpſerit, ſive ſaltem unde demonſtrari poſſit;) *Quo fundamento nititur*

rposſit,) hoc eſt. Cum numerorum loci aſſcendant (uti ſupe-
ulus traditum eſt) proportione decuplâ, pro ſingulis decadibus
nnius gradus ponenda ſunt (in gradu ſuperiori) totidem u-
nitates: atidem omnino eſt a 10 abjicere 9, atq; pro 10 ſub-
ſtituere 1: & eadem ratione, pro 11 ſubſtituere 2 (nempe
pro 10 unam, pro 1 alteram unitatem) atq; ab 11 abjicere 9.
Et ſic in cæteris. Atq; hinc fit, ut ubi poſthabita locorum diſtin-
ctione ſinguli characteres indiſcriminatim conſiderantur, de-
cem & unum eodem omnino charactere notantur, hoc ſcilicet
1 utrumq; Atq; hinc factum eſt quod 10 & 1 perinde habentur,
hoc eſt, ex ſingulis decadibus ejiciuntur novem.

Quam ſit lubrica. Non difficeor tamen probationem hanc lubricam eſſe. Quamquam enim reſiduorum diſſenſus certum ſit erroris indicium, non tamen eorum conſenſus certum eſt indicium veritatis. Nam, verbi gratia, in exemplo præcedente, ſive dicamus additionis ſummam eſſe 11944 (quod verum eſt) ſive 19144, ſive 11044, ſive 11080; ſive deniq; (ne plures memorem) 10000, utcunq; poſt novenariorum quoties fieri poteſt abjectionem remanebit 1; adeoq; probatio iſta errorem non detegeret. Non eſt igitur cur huic probationi nimium fidamus, quaſi, ubi illa nullum detegit operatio plane eſſet erroris immunis.

Non tamen rejicienda. Neq; tamen ſuadeo ut penitus rejiciatur hæc examinandi methodus; quia non ita magno labore peragitur, & errorem nihilominus non raro detegit, (licet non ſemper,) imò rariſſimè fallit: Niſi enim quis data operâ illud agat, ut numeros falſos pro veris ſubſtituat, & ſponte erret, vix unquam tam felici ſucceſſu (ſeu potius infelici) errabitur, quin ſe prodet error. Cum enim vel mediocriter cauti vix pluſquam una aut altera unitate (in eâdem ſerie) peccent; non autem latere poſſit error, niſi vel multiplex ſit (ita ut unus alterum celet) vel novem præciſè unitatibus (aut forſan 18, 27, &c.) in eadem ſerie erratum fuerit; rariſſimo certè caſu eveniet, ut error, ſiquis ſit, lateat, & vel lubricam hanc probationem effugiat.

Quomodo fieri poteſt certa. Sed addo, probationem hanc tanta cautione (neq; labore interim multùm aucto) adhiberi poſſe, ut non minus certa ſit & infallibilis, quam alii probandi modi. Ut autem hoc fiat, operæ precium erit decadas in ſuperiores ordines tranſmiſſas continuo notare (ut ſupra oſtendimus) intra duas lineolas: Atq;

exami-

examinare deinde singulas seorsim series, puta unitatum, decadum, centuriarum, &c. Quo facto, si quoties ex omnibus ejusdem seriei numeris simul additis abjiciantur 9, toties præcise ex ejusdem seriei summula abjici etiam possit, cum eodem utrobiq; residuo, certum est indicium operationem illam neutiquam mendosam esse. Exemplum esto operatio apposita. Ubi in unitatum serie occurrunt numeri 6,8,7,6,9. in quibus addendis, postquam 9 quater abjecta sunt, nihil supereſt, (nempe $6+8=14$. $14-9=5$. $5+7=12$. $12-9=3$. $3+6=9$. $9-9=0$. $0+9=9$. $9-9=0$.) sed & in 36 (ejusdem seriei summulâ) 9 præcise quater continentur, sine ullo residuo. In sequenti decadum serie; in addendis 9,7,6,5,7,3, postquam quater abjecta sunt 9, restat 1: sed & ita in 37. In serie centuriarum 8,9,8,7,7,3, cum 9 quater ejecta sunt, 6 supersunt: atq; ita in 42. In serie millium, tam in addendis 7,9,9,8,8,4, quam in summula 45, cum 9 quinquies abjiciuntur nihil supereſt. In serie deniq; suprema, tam in particulis 9,8,5,7,8,4, quam in earum summula 41, abjectis 9 quater supersunt 5. Certum est igitur & singularum serierum summulas, & omnium etiam aggregatum, vera esse, adeoq; totam operationem ritè processisse. Nec secus eveniet in aliis ejusmodi additionibus probandis. Hac autem si incedamus viâ, non novenarius magis quam quilibet alius numerus adhiberi possit. ut patet. Quod monuisse sufficiat.

	97896
	89978
	59867
	78756
	88779
	4433
	415276

In novenaria Subductionis probatione, eâdem omnino est incedendum via, quam in Additionis probatione ostendimus: cum hoc solo discrimine, nempe quod in Additione numeri addendi cum summa conferuntur; in subductione, ablatus & residuus (simul sumpti) conferuntur cum numero minuendo. Ratio est, quoniam ut in Additione, summa est quid integrum cujus partes sunt numeri addendi; sic in subductione numerus minuendus rationem habet Totius, cujus partes sunt ablatus & residuus. Exemplum esto illud quod apponitur. Ubi in figuris numeri minuendi simul indiscriminatim addendis, nempe 7,3,9,8,1, abjectis 9 quoties fieri potest. re-

Subductionis probatio novenaria.

ſtabit 1: Sed & idem reſtabit in addendis figuris nempe ablati & reſidui: Unde operationem illam minime vitioſam eſſe conjicio; quod ſi diverſa fuiſſent reſidua, certum eſſet operationem alicubi fuiſſe mendoſam.

5,2,3,0,4,2,1,6,7,7,
7 3 4 8 1
5 2 3 0 4 — 1 X 1
2 1 6 7 7

Quæ vero ſuperius dicta ſunt de Additionis probatione, nempe lubricam illam eſſe, nec tamen plane contemnendam: etiam de hac Subductionis probatione non minus intelligenda erunt, ut non ſit opus ea denuò repetere.

Hæc autem ſive Additionis ſive Subductionis probatio novenaria, in additionibus & ſubductionibus Algebricis & Speciosis locum non habet: Sed neq; ubi variæ ſunt numerorum addendorum aut ſubtrahendorum denominationes (quod in monetis, ponderibus, aliiſq; ſimilibus numerandis plerumq; evenit) niſi ſaltem cum levi aliqua correctione, quam tamen vel mediocriter exercitati, ubi operæ pretium videbitur, facile adhibebunt.

Atq; hæc, quæ dicta ſunt, de toto & Additionis & Subductionis negotio tradidiſſe ſufficiat. Alia minutiora quæ vel inter operandum ſe ſponte offerent, vel in Arithmeticorum practicorum libris paſſim occurrunt, conſultò omiſi, ut quæ vel levioris ſunt momenti, vel ex jam traditis ſatis intelligi poterunt. Libet autem, priuſquam hanc rem penitus dimittam, utriuſq; exercitium aliquod, in re Chronologica, exhibere: ut intelligant ſaltem tyrones quomodo univerſalia quæ tradidimus præcepta, ſint (prout res poſtulet) in uſum educenda. Quod capite ſequente fiet.

CAP. XVII.

Additionis & Subductionis exercitium, in Chronologia. &c. De nativitate Arphaxadi & Abrahami; & Promiſſione facta. Gen. 15. & Gal. 3. comparantur. De Iſraelitarum mora in Ægypto. De duræ ſervitutis initio. De Obſtetricum reſponſione. Numerus deſcendentium in Ægyptum. Gen. 46. & Act. 7. comparantur. Immenſum eorum incrementum.

CUm harum rerum lectores, præſertim tyrones, exiſtimem, non tam nudis præceptis delectari, quam ſi eadem videant ad uſus communes applicatos, unde & ipſi forſan impræſentiarum

tiarum aliquid delectationis perſentiſcant, & diſcant interim ſimiliter eadem ubi opus eſt in uſum proferre: Non ingratum fore judicavi hujuſmodi ſpecimen in re chronologica exhibere.

A Mundo Condito ad Diluvii initium numerantur an: 1656. Annos autem qui ibi numerantur completas eſſe, patet ex vita Methuſalæ, juxta illam quam habemus computationem Gen. 5. cujus ultimus annus concurrit cum anno Mundi 1656, uti illa computatione liquet. A diluvio autem inchoato ad Arphaxad natum numerat Helvicus annos 2, atq; inde ad Tharam annos 220, inde autem ad Abrahamum natum, annos 70, quem annorum numerum colligit ex ea ſupputatione quæ habetur, Gen. cap. 11. Inde autem ad Promiſſionem datam (cujus mentio facta eſt Gen. 12.) numerat annos 75. propter Gen. cap. 12. v. 4. ſaltem annos completos 74. Hinc autem ad Exitum ex Ægypto numerat annos 430. juxta quod habetur Galat. 3. ver. 17. & Exod. 12. ver. 41. Ab exitu autem ad Templum Salomonis numerat itidem annos 480. Inde autem ad Chriſtum natum numerat annos completos 1015. Unde etiam ad initium Æræ Chriſtianæ vulgaris ſive Dionyſianæ annos adhuc 2 elapſos autumat. Atq; inde ad annum præſentem completũ numeramus 1655. Adeoq;, numeris omnibus ſimul additis, fuerunt juxta Chronologiam Helvici (qui in pleriſq; cum Calviſio & Scaligero conſentit) ab Orbe condito ad annum præſentem (incluſive) anni 5604, uti ex calculo adjuncto patet.

De Annis Mundi.

A Mundo Condito,	Anni.
Ad Diluvium.	1656
Inde ad Arphaxad.	2
Inde ad Tharam.	220
Inde ad Abrahamum.	70
Inde ad Promiſſionem.	74
Inde ad Exitum ex Ægypto.	430
Inde ad Templum.	480
Inde ad Chriſtum natum	1015
Inde ad Æram Dionyſ.	2
Inde ad annum præſentem.	1655

Millia	3
Centuriæ	22
Decades	38
Unitates	24
Summa	5604

Verum, ni fallor, calculus ille Helvici eſt aliquot in locis emendandus, ut cum veritate hyſtoricâ melius conſentiat. Ego

pauca tantum, circa Abrahami præſertim tempora, leviter attingam, exercitii gratia; (non enim exſpectandum eſt ut totam Chronologiam in tranſitu emendandam ſuſcipiam.)

De Nativitate Arphaxadi.

Incepit diluvium (uti ex *Gen. cap.* 5. conſtat) anno mundi completo 1656, currente vero 1657. (menſe ſecundo.) Annos enim qui *Gen.cap.* 5. numerantur completos eſſe, patet ex vita Methuſalæ, quæ ſi ſecus eſſet, ultra diluvii initium proroganda eſſet; incidit enim ejuſdem annus ultimus in annum mundi 1656. Adeoq; iſte menſis ſecundus in quo incipit, eſt anni mundi 1657 currentis & anni vitæ Noachi 601 currentis. Duravit autem diluvium per annum integrum, & quod excurrit, adeoq; finitum eſt poſt annum Mundi completum 1657, ſive anno mundi currente 1658. Deinde natus dicitur Arphaxad *biennio poſt diluvium Gen.cap.* 11. *v.* 10. cujus nativitatem incidiſſe putat Helvicus (aliiq; fere omnes) anno mundi completo 1658, hoc eſt, biennio poſt diluvium inchoatum. Quod ſi *biennio poſt diluvium* intelligatur de biennio poſt diluvium finitum, tum naſci dicendus erit Arphaxad anno mundi 1659 completo, ſive anno 1660 currente; nempe uno anno ſerius quam vult Helvicus. Fateor interim voces illas *biennium poſt diluvium*, quanquam prima fronte potius diluvii finem quam initium ſpectare videantur, non tamen neceſſario eo trahendas eſſe; præſertim cum phraſis eadem aliter interpretanda videtur *Gen.cap.* 9. *v.* 28. *vixit autem Noachus poſt diluvium annos* 350; nempe, *poſt diluvium inchoatum*; ut patet ex collatis *Gen.cap.* 7. *v.* 6. & *cap.* 9. *v.* 28, 29. Adeoq; ſi de Arphaxad, *biennio poſt diluvium* nato, biennium illud rectius a diluvii initio inchoandum, quam ab ipſius fine judicaverint Viri docti, ego non repugno; quanquam etiam non deſint qui & alterum ſenſerint.

De Nativitate Abrahami.

Deinde, poſt natum Arphaxad, ad Tharam uſq;, tranſierunt (ut conſtat ex *Gen.cap.* 11.) anni 220. Tharam vero 70 annos natum reputat ille (cum Euſebio & Scaligero) cum genuerit Abrahamum; quia nempe dictum eſt, *Gen. cap.* 11. *v.* 26. *Vixit Tharah* 70 *annos & genuit Abrahamum, Nachorem, & Haranem.* At vero non inde certo concludimus *Abrahamum* (quamvis primo nominatum) aut natu maximum fuiſſe, aut eo anno natum, ſed eorum ſaltem alterum tunc fuiſſe natum. Et quidem Haranem, licet ordine ultimum, aliunde colligimus fuiſſe natu primum, utpote cujus duæ filiæ Milcah & Iſcah

quam

(quam eandem & Saram dictam esse colligitur ex comparatis *Gen. cap.* 11. *v.* 29, 30. *cap.* 20. *v.* 12. quam etiam eodem sensu sororem vocat *Abraqamus* quo & Lotem fratrem, *Gen. c.* 13 *v.* 8. & *c.* 14. *v.* 12, 14. (unde etiam videtur Harani atq; Abrahamo licet eundem patrem Tharam, non tamen eandem fuisset matrem;) Nachori & Abrahamo nuptæ fuerint; & quidem Sarah sive Isca nonnisi 10 annis Abrahamo natu minor, ut patet *Gen. cap.* 17. *v.* 17. Quot autem annos natus Thara Abrahamum genuerit, sic colligimus. Thara ex Ure Chaldæorum cum Abrahamo profectus Harane (sive Charris) mortuus est natus annos 205, *Gen. c.* 11. *v.* 31, 32. Unde mortuo Thara decessit Abrahamus tunc annos natus 75, *Gen. c.* 12. *v.* 4. Si igitur Abrahami annus 75 coincidat cum Tharæ anno 205 (aut saltem hunc annum non præcesserit,) fuit Thara saltem annorum 130 quum Abrahamum genuerit: adeoq; 60 annis integris serius quam vult Helvicus &c. Qui plura hac de re quærit, videre poterit, totam hanc quæstionem satis prolixe agitatam apud D. *Gualterum Rauleigh* Equitem Anglum, in ipsius *Historia mundi*, Anglice editâ.

Tum demum supponit Helvicus (ut & *Eusebius*, *Scaliger*, *Calvisius* &c.) Abrahamo 75 annos nato promissionem factam esse, tot enim annos natus dicitur Abrahamus quũ Charris excesserit *Gen. c.* 12. *v.* 4. At vero non ab *Abrahami* decessu ex Charane reputanda est Epocha promissionis datæ, sed altius omnino repetenda est dum adhuc esset Ure Chaldęorum, ut liquet ex Actor. *cap* 7. *v.* 2. 3. priusquam Charanem omnino advenerat. Adeoque & promissionis recensio *Gen. cap.* 12. *v.* 1, 2, 3. facta, quamquam in ordine historiæ posterior sit, quam profectionis prius memoratæ *cap.* 11. *v.* 31. tamen ordine temporis promissio illa hæc professionẽ præcessit; eaq *ὑστερολογία* justũ rerũ ordinẽ turbare non debet, cum sit tantũ *ἀδιαλογία* profectionis prius per prolepsin memoratæ. Abrahamum vero postquã Ure Chaldæorum excesserat Charane aliquamdiu commoratum fuisse satis innui videtur in ipsa historia, quæ recensetur *Gen. c.* 12 præsertim *v.* 5. quanto autem tempore istic permanserit, non *ῥητῶς* ibidem affirmatur, sed ex circumstantiis colligitur fuisse per spacium circiter quinq; annorum saltem a promissione data in Ure Chaldæorum, ad Abrahami ex Charris decessum annos elapsos esse quinque. Quod confirmatur ex

De Promissione facta.

collatis

collatis, *Gen. cap.* 15. *v.* 13. & *Act. cap.* 7. *v.* 6. cum *Exod. cap.* 12. 40, 41. & *Gal. cap.* 3. 17. Quæ loca, quamvis primo aspectu inter se pugnare videantur, cum in illis mentio facta est annorum tantum 400, in his autem annorum 430: tamen, si penitius introspiciamus, optime conveniunt; & simul nodum illum quem præ manibus habemus, de Abrahami mora in Charris, feliciter solvunt. In illis *Gen. cap.* 15. & *Act. cap.* 7. dicitur Abrahami semen, sive posteros, peregrinos fore in alienâ terrâ per annos 400: In his autem annorum præcise 430 mentio facta est; Nempe *Exod.* 12, *v.* 40, 41. dicitur, Israelitas sive filios Israel, exactis annis 430, eodem ipso die, Ægypto exiisse: & Gal. c. 3. v. 17. legem, 430 annis post promissionem datam, fuisse promulgatam. Sed notandum est, annos illos 400, de Abrahami semine, sive posteris, (non de ipso Abrahamo,) signanter dictos; adeoq; ab Isaaco nato, (nam de Ismaele, ejusq; posteris non agitur;) cum Abrahamus annum jam centesimum compleverat, numerandos esse: At ubi annorum 430 mentio facta est, ad ipsam promissionem factam, ipsamq; Abrahami profectionem primam respiciendum est, (uti ex locis ipsis patet;) quæ propterea annis 30 præcessit nativitatem Isaaci, adeoq; Abrahami anno 70 completo facta est, 5 annis priusquam Charane excessit. Adeoq; & hic emendandus erit calculus Helvici, &c. abjectione annorum 5. vel saltem annorum 4, propter annos tantum 74 completos ab ipso Helvico numeratos. Alia siqua sint animadvertenda, intacta prætereo; cùm non sit mihi animus omnes Chronologiæ difficultates excutere. Sufficit specimen aliquod exercitii gratia exhibuisse, paucas has emendationes innuēdo; juxta quas si corrigatur calculus Helvici, annum præsentem, annum ab Orbe Condito 5661, exhibebit. Vel saltem, (si omittatur

	Anni
Ad Diluvium.	1656
Ad Arphaxad.	241
Ad Tharam.	220
Ad Abrahamum.	70+60
Ad Promissionem.	74—4
Ad Exitum.	430
Ad Templum.	480
Ad Christum.	1015
Ad Æram vulgarem	2
Ad annum præsentem	1655
	5604+61—4
	5661

mittatur adjectitius ille ad Arphaxadi natales annus) annum 5660.

Priusquam autem rem hanc dimittam, prout annum mundi addendo investigavi, libet etiam tempus, quo Israelitæ Ægypto permanserint, subducendo inquirere. *De Israelitarum mora in Ægypto.*

Præmittendum autem, verba illa Exod. cap. 12. ver. 40. וּמוֹשַׁב בְּנֵי יִשְׂרָאֵל אֲשֶׁר יָשְׁבוּ בְּמִצְרַיִם שְׁלֹשִׁים שָׁנָה וְאַרְבַּע מֵאוֹת שָׁנָה *Et incolatus Israelitarum (sive, filiorum Israel,) qui commorati sunt in Ægypto, fuit quadringentorum & triginta annorum:* &c. caute interpretanda esse. Non enim id volunt, quod Israelis posteri per totos 430 annos in Ægypto permanserint: sed quod Familia ista, (ex Abrahamo nempe ejusq; posteris constans, quam Deus ex aliis omnibus sibi speciali modo selegerat;) quæ nunc passim *Israelitarum*, sive *filiorum Israel*, nomine celebratur, (quæq; jam aliquandiu in Ægypto fuerant inquilini, & duram servierant servitutem;) ex quo primum patriam suam Dei jussu reliquerunt, inquilini erant (in aliena terra) per annos 430. *Exactis autem annis illis 430, eodem ipso die egressi sunt, &c.*

Cum igitur constet, totam eorum peregrinationem, (ab Abrahami prima profectione ex Ure Chaldæorum, ad Israelitarum exitum ex Ægypto computandam,) fuisse annorum 430. Quærendum restat quot ex illis annis ante Jacobi descensum in Ægyptum transierant; ut constet quantam moram ipsius familia in Ægypto fecerint.

Dicimus igitur, A promissione data ad natum Isaacum elapsos esse annos 30, (uti ex jam dictis patet:) Isaacus autem annos 40 natus duxit Rebeccam; ex qua post annos adhuc alios 20, suscepit Jacobum, uti patet *Gen. cap. 25. v. 20, 26.*

Jacobus autem natus annos 130 cum familia sua in Ægyptum descendit, ut patet *Gen. cap. 47. v. 9.* Quibus omnibus ex annis 430 subductis residui sunt anni 210 quibus in Ægypto commorati sunt. Neq; tamen toto hoc tempore in servitutem redacti sunt; sed quamdiu vel Josephus ipse vixit (nempe per annos adhuc 71) aut etiam ipsius σύγχρονοι qui ipsum noverant, (quibus fortasse anni adhuc circiter 30 concedendi,) prospere vixerunt; uti patet *Exod. cap. 1. v. 6, 7, 8.* adeoq; supersunt anni circiter 110 intra quos *De duræ servitutis initio.*

430	
30	
40	
20	
130	
220	
210	

duram illam servitutem perpessi sunt: num autem per totum hoc annorum 110 spacium malè habiti sint non certum est, (quia de præciso initio istius malæ tractationis non constat) at per eorum longe majorem partem duravisse perpessiones liquido constat. Nam Moses annos 80 compleverat quando coram Pharaone comparuit eorum dimissionem postulans, ut dictum est *Exod. cap. 7. ver. 7.* qui tamen ipse natus est post inceptam illam servitutem, & quidē flagrante persecutione, ut liquet *Exod. 2.* Non igitur statim ab ipso initio servitutis, nam multa prius tentata sunt priusquam eo deventum est. Nempe primo durâ servitute conati sunt Ægyptii Israelitarum animos domare, experturi num hac ratione eorum forte numerus minui possit, ut liquet *Exod. 1. v. 10.* &c. Cum vero hoc neutiquam ex animo succesisset, quin adhuc etiam auctis oneribus eo magis multiplicati sint: Obstetricibus clam ut (videtur) in mandatis datum est ut filios eorum in ipso partu strangularent, filiabus interim salvis: adeoq; secreta fraude, parentibus interim ipsis vix advertentibus, & nihil forsan mali suspicantibus, filios etiam ab ipso partu eriperent. Hoc autem ipsis obstetricibus clanculum in mandatis datum, & quidem clam perpetrandum esse, ideo præsertim suspicor (licet illud totidem verbis non affirmetur) quoniam si aperte vellent, & palam professi, infanticidium illud aggredi, potuisset aliis quibusvis rex illud in mandatis dedisse non minus quam obstetricibus, & forte melius cum mulieri tale quid aggredienti facile possit vel viribus resisti; quid quod & ea quam postea in ipsarum defensionem obtendunt excusatio, nullius esset momenti; sive enim priusquam sive postquam ipsæ venerint nasceretur infans, quid hoc impedire posset, ne, si illud palam profiteri vellent, ipsum strangulent; aut, si vi fuerint impeditæ ne illud faciunt, hanc ipsam vim potius causatæ essent cur regis mandato minus fuissent obsequentes. Videtur igitur infanticidium illud, quod palam profiteri puderet, obstetricum curæ cōmissum esse, ut quæ clanculum nec observatæ nec quidem suspectæ illud secretò possent in ipso partu assequi. Illæ vero inhumanum illud facinus detestatæ, cum non ausæ essent regis mandato palam contraire, aut disertis verbis renunciare, tamen rem dissimulandam putarunt, quod & fecerunt, infantes etiam masculos in vivis conservantes. Causatæ interim (fortassis) se satis fideliter

liter quantum in ipsis erat negotium illud curasse, & quidem infantium non paucos reapse mortuos esse (vix enim credibile est', etiam Hebræorum fæminas nunquam feciſse obortum, aut infantes nunquam in partu periisse;) quod suæ deberi curæ credi possit; verum quod illud non semper fiat ipsis non dandū esse vitio, cum Hæbręæ mulieres vegetæ sint, & quidem ipsis Ægyptiis multo vegetiores (quod & ipsum non est improbabile, sed certum potius putandum; cum partim dura earum servitus etiam huc facere possit, nemo enim nescit laboratrices mulieres mollibus & delicatulis vegetiores esse, & quidē in ipso partu minus non raro vel difficultātis vel periculi subire; partim etiā divinæ benedictioni insigni id debeatur,) adeo quidē ut obstetricis ope vix indigeant, & non raro antequam ipsa advocari possit peperissent, unde deesset oportunitas etiam maxime volentibus illud quod a rege in mandatis acceperant exsequendi. Atque hanc posteriorē accusationis etiā partē eas obtendisse, satis constat, cum illud disertis verbis affirmetur, & quidem vix dubitandum est quin & reliquam obtenderint. Quam quidem excusationem, quamvis non sola causa fuerit (uti liquet ex elogio quod ipsis largitur Deus) non tamen plane fictam arbitror, aut eas hac in re, quantum ego video, mendacii reas; quod tamen non paucos video, quasi in cōfesso esset, non plane quidē approbantes, sed saltē temperare satagentes. Cum vero neq; hoc secundū consiliū succesſum quē voluit obtinuerit, quin Hebręorū numerus adhuc creverit, tam tandē re non diutius dissimulata, quod prius clandestinâ fraude & perfidia rex aggressus erat, palam atq; ex professo denunciat, publico edicto toti populo imperans ut Hebræorum infantes masculi mergantur flumine, solis femellis salvis, quantum autem temporis insumpserit, duobus illis prioribus experimentis, (quæ certe aliquot annorum moram postulabant priusquam constare posset quem essent exitum habitura, non constat. At certe tertium illud facinus jam erat susceptum, & (uti videtur) aliquandiu obtinuerat (licet quamdiu non constat) priusquam natus est Moses. Unde certū est non primo statim initio durioris istius servitutis, sed post annos potius aliquammultos natus dicendus est. Et propterea probabili satis conjectur à dicare possumus per centū plus minus annos rigidā illam durâsse servitutem; saltem vix pauciores quam 90 aut plures quam 110.

Numerus descendentium in Ægyptum.

Quamvis autem, uti dictum est, durioris istius servitutis duratio non ita accurate determinari possit attamen (ut superius ostensum est,) tota Israelitarum in Ægypto mora, ex quo Jacobus cum ipsius familia in Ægyptum descendit, satis constat; nempe annorum 210. In hoc autem 210 annorum spacio (quod mirum est dictu) 70 personæ tam stupendo augmento in tam immensum numerum creverunt ut omnem fere exspectationem superet. *Septuaginta personæ*, inquam. Tantus enim erat totus Israelitarum numerus cum Jacobus in Ægyptum descendit, computatis interim tam ipso Jacobo, quam Josepho ejusque liberis qui jam in Ægypto prius erant: prout viritim nominantur *Gen. cap.* 46. Nempe ex liberis Leæ recensentur nominatim 34, quorum cum duo (Er & Onan) jam antea mortui fuerint, (ut dictum est *v.* 12.) reliqui 32 cum ipso Jacobo, sunt 33, quem numerum habemus v. 15. Tum ex liberis Zilphæ recensentur nominatim 16. (ut v. 19.) Ex liberis Rachelis, inter quos Josephus ejusq; duo filii, numerantur 14 (ut v. 22.) Ex liberis deniq; Bilhæ, 7, (ut *v.* 25.) Adeoq; totus omnium numerus, puta Jacobus ejusq; posteri ex eo nati quotquot tunc in vivis erant, sunt (33 + 16 + 14 + 7 =) 70, ut dictum est v. 27. atq; iterum Exod. c. 1. *v.* 5. Deut. cap. 10. v. 22. Non ignoro quidem LXX Interpretes in locis illis habere ἑβδομήκοντα πέντε, sed manifesto, ut videtur, errore. Quem tamen ipsum sequutus est Stephanus in ipsius oratione ad populum uti illam habemus Act. 7. v. 15. Cum enim res esset levioris momenti, ipsiq; tunc temporis incubuerit summa brevitate uti, satius ipsi videbatur in re historica, (obiter tantum attingenda,) juxta receptam apud eos versionem (quæ passim obtinuit) eandem repetere, quam ad importunā emendationem (quæ ad rem præsentē vix quicquā conferret) in illis temporis angustiis citra necessitatem divertere: Lucæ vero, qui hanc ipsius orationē, sive potius ipsius summam recenset neutiquam incubuit narrationem illam (siquid inibi erratum esset) emendare, sed satis suas egisse partes censendus est si orationem illam prout habebatur fideliter recensuerit. Neq; enim exspectandum est, ut, quotiescunq; in N. T. textus aliquis ex V. T. citatur, (juxta eam quæ tunc obtinuit versionem,) singuli versionis apices, re quæ præ manibus erat omissa, critice discutiantur. Satis est, si quem citant textus, quatenus ad præsens negotium applicatur, cum authentico

authentico textu Hebraico quoad ſenſum conveniat; quanquam fortaſſis in nonnullis apicibus non tam accurate ſuas partes egiſſent qui citantur interpretes. Quâ de re videantur, ſi libet commentatores in locum.

In quam immenſam autem 70 illæ perſonæ multitudinem eruperint intra 210 annorum ſpacium, ſatis liquet ex ea quam habemus populi Iſraelitici recenſione, quando Ægypto exierunt. Nam Numeror. cap. 1. v. 46. Iſraelitis tributim computatis, reperti ſunt 603550 viri adulti, ad bellandum ideonei, qui annum ætatis viceſimum compleverant; præter decrepitos ſenes, mulieres item, & infantes ſive etiam adoleſcentes, (quippe qui annum viceſimum nondum compleverant,) tota interim tribu Levi non numerata. Si vero numerus juniorum, qui nondum 20 annos nati, ſimul cum ſenibus ad bellandum ineptis, bellatorum numerum æquâſſe putemus (quod non iniquum eſt poſtulatum, cum ejuſmodi ni fallor, proportio in aliis etiam gentibus ſoleat occurrere; vix enim ſolet adultorum numerus, numerum ſimul puerorum, adoleſcentium, & ſenum, ſuperare,) atq; horum numerus reliquis adjiciatur; reperietur numerus 1207100. His inſuper ſi adjiciatur totius numeri pars decima, pro tribu Levi, (quæ in priori catalogo recenſita non eſt,) exſurgit omnium maſculorum numerus 1327810 circiter. Deniq; ſi fœminas judicemus maribus non fuiſſe pauciores, (quæ forte & multo plures eſſe poſſent, partim quod viri ſinguli non raro plures habuerint uxores, partim etiam quod eorum miranda multiplicatio & incrementum id ipſum ſuadeat, præſertim cum certum ſit ex infantibus maſculis non paucos flumine fuiſſe ſubmerſos,) earumq; numerus numero marium adjungatur, emerget numerus omnium 2655620. Nempe *bis millena millia, ſexcenta quinquaginta & quinque millia, cum ſexcentis & viginti*; ſeu potius juxta ſtilum veterum Romanorum, (qui centenea millia ſolebant numerare,) *vicies & ſexies centena millia, quinquaginta inſuper & quinque millia, cum ſexcentis adhuc & viginti.* Cumq; hi omnes ſint ſimul ſuperſtites; ſi illis ulterius annumerentur omnes qui interea temporis demortui fuerint, numerus in immenſum eſſet ampliandus.

603550
603550
1207100
1207 10
1327810
1327810
2655620

Hos autem omnes ex 70 (uti dictum est) personis intra 210 (aut ad summum 211) annorum spacium descendisse, tam incredibile prope, & stupendum plane est incrementum, ut nulla istius vel probabilis causa assignari possit, præter insignem illam benedictionem Abrahamo divinitus promissam, Gen. cap. 15. v. 5. *Intuere versus cœlum, & numera stellas ejus, si possis eas numerare; nempe sic, inquit, erit semen tuum.* Quod & mirifice ad impletum est: Quicquid enim sit de arenulis ad maris littora positis, certe numerum stellarum, quas Abrahamus in firmamento simul intueri posset, longe superat ipsius posterorum multitudo. Cum enim numerus stellarum, quas facile notare potest oculus intuentis, ultra unum mille non multum excedat, (numerari siquidem solent 1022, in tabulis Astronomicis,) quarum etiam non nisi pars media, uno scilicet hemisphærio contentæ, simul intuendæ patent; unius Jacobi posteri (Ismaelis interim & Esavi posteris, utut numerosis, ne quidem nominatis, nec qui à Ketura descenderunt,) qui uno atq; eodem hoc tempore vixerunt (omissis interim iis qui vel antea fuerant demortui, vel etiam per omnia deinceps secula nascituri) numerum illum plus quam bis millies superavit.

Non dissimulandum interim est, hanc supputationem supra memoratam, non immediate post exitum ex Ægypto factam fuisse, sed post integrum annum, ineunte scilicet anno secundo, (die primo mensis secundi) uti constat *Num.* cap. 1. v. 1. Verum hoc non adeo magni momenti esse judico, cum eorum numerum eo anno non admodum auctum fuisse censendum erit; partim propter insignem illam cladem quam interim passi sunt, (Exod. cap. 32. *v.* 28, & 35.) ob vitulum aureum; partim etiam quod eundem circiter numerum habemus Exod. c. 12. v. 37. licet non accurate supputatum; dicitur enim ibidem Ægypto eadem nocte exiisse, ex Israelitis, viros adultos circiter 600000; numerantur autem (ut diximus) anno sequenti præcise, 603550.

Atq; hæc quidem obiter dixisse sufficiat, quo ansam arriperem Additionis atq; Subductionis praxin in exercitium revocandi.

CAP.

CAP. XVIII.

De multiplicatione, Quid ſit. Quid, multiplicandus, multiplicator, Factus. Quid multiplum, Pars, Partes, Aliquota pars, Aliquanta pars. Multiplicatio ſenſu ſtricto, & ſenſu laxo ſumpta. Non ſemper numerum auget. Multiplicatio eſt multiplex additio. Multiplicandus aut Multiplicator, utervis ex Factoribus dici poteſt. Multiplicationis praxis: in numeris ſimplicibus; in numeris compoſitis; in partibus decimalibus. De Indice numeri Facti.

POſt abſolutam in Prioribus Numerorum Additionem & Subductionem, eorundem *Multiplicationem* tradendam aggredior.

Eſt autem Multiplicare, *Numerum invenire, qui numerum datam toties contineat quoties requiritur.* Sive *Numerum invenire quæ datam rationem (ſive proportionem) habeat ad numerum datum.* Puta, ſi quæratur numerus qui ſit numeri cujuſvis dati *duplus, triplus, quadruplus, decuplus, vigecuplus, centuplus, millecuplus,* aut quavis alia ratione ſeu proportione datum numerum ſuperet: vel (quod perinde eſt) qui numerum datum *bis, ter, quater, decies, vicies, centies, Millies,* aut quotieſcunq; contineat: Multiplicatio docet quæſitum numerum invenire. Vel etiam (ſi ulterius libeat quam ad ſolos numeros multiplicationis vocem extendere) *multiplicare* eſt, *datam quantitatem in data ratione augere*, ſive *Quantitatem deſcribere, quæ datam toties contineat, quotics requiritur:* aut etiam univerſalius *Datæ alicui quantitati aliam in data ratione exhibere.* *Multiplicatio quid?*

Numerus datus ille, cui in data proportione quæritur alius, (puta cujus duplus, triplus, quadruplus, &c. quæritur,) dicitur *Multiplicandus,* πολλαπλασιαζόμενον. *Multiplicandus.*

Numerus ille qui datam proportionem exprimit, (puta qui dicit quotuplus futurus ſit quæſitus numeri dati, ſive quoties, aut quot vicibus illum continere debeat,) πολλαπλαζιάζων dicitur, hoc eſt *Multiplicans* ſive *Multiplicator.* *Multiplicator.*

Numerus deniq; quæſitus dicitur γινόμενον, numerus *Factus,* ſive multiplicatione *Productus.* *Factus.*

Multiplicationis autem *Signum*, ſive *Nota*, ſive *Character*, hoc eſto *Multiplicationis ſignum.*

esto ×. Nempe ut 10 + 2 Additionem innuit, sive numerum denarium binario auctum; & 10 — 2 Ablationem, sive Subductionem, nempe numerum denarium binario mulctatum, sive diminutum; sic 10×2 significet numerum denarium binario multiplicatū sive bis positū. Si itaq; quæratur numerus qui numerū denariū *bis* in se contineat, hoc est, qui sit denarii *duplus*, seu qui duplâ proportione denarium superet: numerus Denarius dicetur *Multiplicandus*; numerus *Binarius* (qui datam proportionem exprimit) dicetur *Multiplicator*; numerus deniq; quæsitus (puta vicenarius) qui numerum denarium bis continet, *Factus* dicetur, seu *Productus*. Hoc est, si sit 10×2 = 20, erit 10 Multiplicandus, 2 Multiplicator, & 20 Factus, seu Productus.

His appellationibus intellectis, non erit difficile aliorum quas afferunt Multiplicationis definitiones intelligere; quales sunt hæ quæ sequuntur.

Multiplicare, est *numerum invenire, qui toties contineat Multiplicandum, quoties Multiplicans continet Unitatem.*

Item, Multiplicare, est *numerum invenire qui eâdem sit ratione ad Multiplicandum qua Multiplicans ad Unitatem.*

Has autem definitiones, allasq; ejusmodi, licet non ut falsas rejiciam, cùm revera rem prout est exprimant; vix tamen usq; adeo accommodas autumo. Cum enim Definitio sit definiti explicatio, debet ea per notiora procedere. Quid autem sit numerus *Multiplicandus*, *Multiplicans*, & *Multiplicatione factus*, non minus est ignotum quàm quid sit ipsum *Multiplicare*. Qua etiam de causa non admittendam censui (in definitione nostra posteriori) ipsam *rationis* sive *proportionis* vocem, nisi & ipsam simul explicuissem; utpote quam nondum in præcedentibus ex professo exposueram.

Fateor interim ipsum Euclidem multiplicationem sic explicuisse, 15 d 7. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις. *Numerus numerum multiplicare dicitur, quando quot sunt in ipso unitates, toties componitur* (numerus) *qui multiplicatur, atq; (ita) factus aliquis emergit.* Verum hîc (si rite attendatur Euclidis scopus) non tam *Multiplicationem* definit, aut docet quid sit Multiplicare; sed exponit quid sibi velit apud illum phrasis illa cum dicitur *numerus numerum multiplicare* (cujus quidem voces singulæ supponuntur prius fuisse cognitæ;) atq; hoc quidem

quidem postquam exposuisset quid sit *ratio*; & speciatim quid sit πολλαπλάσιον seu *multiplum*, adeoq; & quid significet πολλαπλασιάζειν notum esset.

At meum est, non tam aliorum definitiones reprehendere, quam res ipsas explicare: adeoq; mihi sufficit si vel ex eorum vel ex meis verbis res eadem quam & ego & illi volunt percipiatur: neq; enim mihi lubitum est de verbis litem movere, ubi de re convenit, licet interim & verborum delectum adhibendum esse non diffiteor.

Multiplicatio stricte sumpta, quomodo intelligenda.

Notandum autem est, ubi in explicatione definitionis nostræ dictum est, quod numerus multiplicatione quæsitus, sive etiam inventus, (*Factus* nempe) numerum datum (quem *Multiplicandum* diximus,) *bis, ter, &c. contineat*, vel in data ratione *superet*: non hoc temere dictum est: Quoniam in primaria vocis notione illud tantum intelligitur. Atq; hoc quidem ipsa voce satis innuitur, nam *Multiplicare* sive πολλαπλασιάζειν, est numerum dati *multiplum* seu πολλαπλάσιον invenire. Quid autem sit πολλαπλάσιον seu *multiplum*, ut & e contra, quid sit *μέρος* sive *pars*, (seu, ut vulgo dicimus, *aliquota pars*,) definit Euclides 1 & 2 d d 5. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος. *Pars est magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor metitur majorem: Multiplex autem est major minoris quando minor metitur majorem.* uti Commandinus & Clavius exponunt. Vel (aliquanto forsan explicatius, neq; minus κατὰ τὸ ῥητόν,) *Magnitudo minor Magnitudinis majoris Pars est* (aliquota) *quando majorem metitur*, (mensurat, seu potius permetitur, permensurat, nempe quando aliquoties sumpta majori fiet accuratè æqualis:) *Major autem minoris Multiplex est quando a minori* (sic) *mensuratur.* (Quod autem de Magnitudinibus hîc dicitur, id ipsum totidem verbis de Numeris habetur, 3 & 5 d d 7. Et quidem de quantitate qualibet perinde intelligi debet.) Nempe *Partis* vox non de qualibet totius particula seu membro dicitur, (uti cum ax. 9. dicitur *Totum esse majus sua parte*,) sed definitâ sive determinata significatione restringitur ad ejusmodi partem, quæ nunc dici solet *aliquota pars* (puta *pars tertia, pars quarta, pars centesima*, &c.) quæ nempe aliquoties sumpta toti fiet æqualis: si autem non poterit ita aliquoties repetita toti fieri æqualis (sed semper vel major, vel minor,) non ipsius *μέρος*, seu *pars* (aliquota) dicetur, dicetur

Quid sit Pars & Multiplum.

(hoc sensu,) sed potius *partes* μέρη, uti dicitur 4 d 7, μέρη ἔστιν ὅταν μὴ καταμετρῇ (quã tamen definitionem de magnitudinibus non interposuit *lib.* 5. quoniam hoc de illis universaliter enunciari non posset; fieri enim potest ut magnitudo minor majoris neq; *pars* sit, neq; *partes*, quoties nempe toti est incommensurabilis: quod cum de numeris, proprie dictis, nimirum integris, de quibus solis hic agit Euclides, contingere non possit, ut qui sint omnes cõmensurabiles, cum saltem unitas eas omnes metiatur, necesse est ut numerus minor sit majoris vel *pars*, vel *partes*, hoc est partis aliquotæ aliquoties repetitæ aggregatum.) Sic verbi gratia, 2 est numeri 6 aliquota *pars* (puta triens, sive pars tertia,) quia $2+2+2=6$, hoc est numerus 2 ter repetitus æquatur numero 6; sed numerus idem 2 numeri 5 *pars* (aliquota) non est, quia si bis (aut rarius) ponatur est minor quam 5, si autem ter (aut sæpius) major erit quam 5 nam $2+2=4$ minor quam 5; $2+2+2=6$ major quam 5; adeoq; numerus 2 numeri 5 non *pars* (aliquota) dicetur, sed *partes*, puta $\frac{2}{5}$ seu *duæ quintæ*; vel etiam, uti jam loqui *solemus*, *aliquanta pars* dici potest, sed non *aliquota pars*. Et similiter de *Multiplici* sive *multiplo* judicandum erit. Cum enim pars & multiplum sint relata, ex uno cognito cognoscetur reliquum: est enim Pars, multipli pars; & Multiplum, est partis multiplum; quod propterea partem aliquoties præcise continere debet, puta bis, ter, quater, aut sæpius.

Multiplicatio laxiori sensu accepta.

Quoties igitur multiplicatio per unitatem, aut numeros fractos, aut etiam surdos, puta per 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$. &c. occurrit: *Multiplicationis* vox latiori sensu intelligenda erit, & καταχρηστικῶς· neq; alio sensu illud dici potest quam quo 1, aut etiam $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, &c. numeri aut multitudines dici possunt.

Qui enim quantitatem quamlibet per unum multiplicat, hoc est, semel (præcise) ponit; non proprie multiplicare dicendus est, seu multoties ponere, sed eandem simpliciter quantitatem retinet; neq; quod hac multiplicatione producitur est proprie expositæ quantitatis Multiplum, sed potius ea ipsa; (nisi & Æquale, eo sensu Multiplum esse dicatur, quo Unum supra contendimus esse Numerum; quod si dicatur, ego non repugno.) Atq; hinc est quod dici solet, *Unitatem neq; multiplicare neq; dividere*; quia nempe sive multiplicemus sive dividamus per unum, quantitas ea multiplicatione aut divisione non mutatur, sed eadem quæ prius manet: non minus quam in Additione

tione aut Subductione, ciphra seu 0, nihil mutat. Nam ut $2 + 0 = 2$, & $2 - 0 = 2$, sic $2 \times 1 = 2$, & $\frac{2}{1} = 2$. Estq; potius multiplicationis aut divisionis negatio, quam multiplicatio aut divisio.

Qui autem, per, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. multiplicare supponitur, non tam revera multiplicare dicendus est quam dividere (ut deinceps melius patebit, ubi Divisionis naturam exposuerimus,) nam sicut qui multiplicat per 2, 3, 4, &c. datæ quantitatis quærit duplum, triplum, quadruplum, &c. sive expositam quantitatam bis, ter, quater, &c. ponit: sic qui per, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. multiplicat, non nisi datæ semissem, trientem, quadrantem, &c. quærit; neq; ipsam quantitatem, nedum ipsius multiplum, sed ipsius saltem semissem, trientem, quadrantem, &c. hoc est revera dividere per 2, 3, 4, &c. Adeoq; ut qui quantitatem negativam supponitur Addere, (puta qui numero 4 adjungit $- 2$,) reapse Tollit; (minuit enim, non auget; est enim $4 - 2$, minus quam 4; & tantundem est atq; tollere 2:) ita qui per $\frac{1}{2}$ (aut aliam quamlibet aliquotam partem) supponitur Multiplicare, reapse Dividit; tantundem enim est atq; per 2 dividere. Ut enim Additioni Subductio, sic Multiplicationi Divisio est contraria.

Tandem; qui per $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{4}$, &c. multiplicare supponitur, partim multiplicat partim dividit; nempe multiplicat per 2, 3, &c. (numeratores,) & per 5, 4, &c. (denominatores) dividit: Sicut qui addere supponitur $4 - 2$, partim addit, partim aufert; nempe addit 4 & aufert 2. Ut & qui multiplicare supponitur per $\sqrt{3}$, duo facit, nempe multiplicat per 3, & radicem quadraticam educit. Verum hæc omnia rectius percipientur ubi de numeris Fractis, & Surdis deinceps dictum fuerit: at interim hæc expedit subinnuisse, ut intelligatur quid per *Multiplicationem* strictissimo sensu sumptam, & quid sensu laxiori intelligi debeat. Ut autem Multiplicationis nomen, sic & Definitio nostra utriq; ut opus est accommodari potest.

Et propterea Multiplicatione, laxione sensu sumpta, non semper augetur numerus, aut multiplum producitur, (quanquam illud vi vocis perhiberi videatur, impositio nempe nomine a famosiori significato.) Cum enim, in multiplicatione, supponitur numerus Multiplicandus toties poni, quoties innuit Multiplicator; sive (quod tantundem valet) numerus

Non semper auget numerum.

rus multiplicatione Factus toties contineat Multiplicandum quoties Multiplicator continet Unitatem: Prout Multiplicator major sit aut minor quam Unitas, aut etiam ipsi æqualis; ita numerus Productus sive factus major est aut minor quam multiplicandus, aut ipsi æqualis. Nam qui quantitatem præcise semel ponit (hoc est, multiplicat per 1,) eandem neq; auget neq; minuit; qui autem plusquam semel ponit (ubi nempe multiplicator est major quam 1,) ille auget; qui autem minus quam semel ponit (sive qui multiplicat per quid minus quam 1)ille sic multiplicando minuit.

Multiplicatio est multiplex Additio.

Patet autem, ex jam traditis, Multiplicationem (saltem stricte sumptam)vix aliud esse quam multiplicem additionem, sive additionis compendium. Idem enim est triplicare aut per 3 multiplicare, atq; quantitatem ter apponere; adeoq; Factum istius multiplicationis tantundem erit, atq; hujus additionis Aggregatum; & similiter in aliis. Puta $2\times 2 = 2+2$. $2\times 3 = 2+2+2$. $2\times 4 = 2+2+2+2$. &c. ut patet. Ubi etiam obiter notetur, numerum binarium sive sui adjectione, sive in seipsum multiplicatione, tantundem augere; nempe $2+2 = 2\times 2$: quod in solo numero binario contingit.

Multiplicandum aut Multiplicator, utervis ex Factoribus dici potest.

Porro, in numerorum multiplicatione, uti ex dictis item patet, duos numeros notos esse, sive datos, cōstat, nempe *multiplicandum* & *multiplicantem* (sive multiplicatorem;) tertium quæsitum esse, quem *Factum* sive *Productum* diximus. Sciendum tamen est, perinde omnino esse sive hunc sive illum ex datis multiplicandum aut multiplicantem dicamus; idem enim omnino prodibit Factus, utervis datorum dicatur multiplicandus. Tantundem enim est sive velimus Quatuor Ter ponenda, sive Tria Quater, utrobiq; enim exsurgunt Duodecim. Hoc est $4\times 3 = 3\times 4$. Et similiter in aliis. Quod quidem totidem punctis, eo quem hic videas ordine positis, satis demonstrari poterit: sive enim seriebus transversis numeremus ter quatuor, sive seriebus erectis quater tria, idem tamen erit utrovis modo punctorum omnium numerus, ut patet. Atq; hoc ipsum Euclides ostendit 16 e 7. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάζοντες ἀλλήλους, ποιῶσί τινας, οἱ γινόμενοι ἐξ αὐτῶν, ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

. . . .
. . . .
. . . .

Si duo numeri ſe mutuo multiplicantes aliquos effecerint, numeri ſic facti, erunt inter ſe æquales. Hoc eſt, ſi numerus A multiplicet B, ut fiat B × A; & vice verſa numerus B multiplicet A, ut fiat A × B; numeri ſic facti, erunt invicem æquales, nempe B × A = A × B. Cujus ulteriorem demonſtrationem, ſi noſtra non ſufficiat, videat cui libet apud Euclidem loco citato.

Quum igitur Arithmeticæ practicæ magiſtri non raro docent ex numeris datis, Majorem dicendum eſſe multiplicandum, & præponendum eſſe: minorem vero Multiplicantem, & ſubſcribendum eſſe: non tamen illud putandum eſt aut ſemper aut neceſſario faciendum eſſe, ſed prout ſibi commodius putaverit calculator: quamvis enim nonnunquam expedire videatur, nulla tamen neceſſitate imperatur.

Denique monendum inſuper eſt, duos illos numeros datos, quos *Multiplicandum* & *Multiplicantem* diximus, non raro apud Arithmeticos uno nomine *Factores* dici, ſicut qui multiplicatione producitur dicitur *Factus*. Item Factores illi *invicem duci* ſive *Multiplicari* dicuntur. Idem enim omnino eſt *numerum in numerum ducere*, atq; *numerum per numerum multiplicare*. Item numerus multiplicatione productus ſive factus, nō raro dicitur *Rectangulum*, vel *Planum*, vel etiã *numerus planus*; Metaphora nēpe ex Geometricis ducta, ubi ex ductu longitudinis in latitudinē habetur planum ſive area Rectanguli vel Parallelogrammi.

Atq; hactenus multiplicationis naturam ſatis videar expoſuiſſe, ſeu quid ſit Multiplicatio: ſupereſt ut ipſius etiam Praxin oſtendam, ſive quomodo ſit multiplicandum.

Multiplicationis praxis.

Monendum autem & hic eſt de multiplicatione, quod de Additione & Subductione ſupra monuimus; eam nempe vel in numeris ſimplicibus (unius tantum figuræ) vel in numeris Compoſitis (figurarum plurium) exerceri.

Simplicium numerorum multiplicatio.

Quod ad numerorum ſimplicium multiplicationem attinet, ea vel ex memoria petenda eſt, vel ex Additionis principiis repetenda, uſq; dum uſus & exercitatio eam familiarem reddiderint. Ita ſiquis neſciat quot ſint ter tria, vel ſepties octo; poterit ille tres numeros ternarios, vel ſeptem octonarios ſimul addere; & pariter in aliis. Sunt enim, ut jam oſtendimus 3 + 3 + 3 = 3 × 3, & 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 8 × 7. Et ſic in cæteris.

Ne autem ejuſmodi additiones ſæpius ſint a tyronibus repetendæ, Tabellam quandam ſolent huic rei accommodatam

compingere, unde ſingulas ſimplicium numerorum multiplicationes velut ex promptuario petere licet, qualem hic ſubjecimus. Cujus quidem Tabellæ demonſtratio quoad ſingulos iſtius numeros, ex Additionis fundamentis petenda eſt, ut modo oſtendimus.

Tabella Multiplicationis & Diviſionis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

In hac Tabella, numerorum invicem multiplicandorum altero in ſummitate ſeriei erectæ, altero in principio ſeriei tranſverſæ, reperto; locus ille in area tabellæ qui utriq; ſeriei communis eſt numerum exhibet ex eorum multiplicatione factum. Puta ſi quæratur, quis numerus factus erit ex ductu 8 in 7; (ſeu multiplicatione 8 per 7:) in fronte tabellæ quæratur 8, & ad latus 7, (vel contra, numerus hic in fronte, ille ad latus,) & in communi ſerierum concurſu habebitur $56 = 8 \times 7$. & ſimiliter in aliis quibuſcunq;.

Cum autem, uti ſuperius oſtendimus, perinde ſit utrumvis ex Factoribus *Multiplicandum* dicamus, idem enim utrovis modo prodibit; puta $8 \times 7 = 7 \times 8 = 56$. adeoq; perinde etiam ſit utrumvis in fronte quæramus: poterit tabella ipſa in formam duplo fere minorem redigi, uti hic videtur. Ubi duorum numerorum invicem ducendorum major ſemper in fronte, minor ad latus quærendus ſit; & in utriuſq; ſeriei concurſu habebitur, ut prius, numerus factus.

Tabella

Tabella Contractior.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Numerorum compoſitorum multiplicatio.

Ubi autem de ſimplicium numerorum multiplicatione conſtat, non erit difficilis ad compoſitorum multiplicationem progreſſus, ut quæ ex ſimplicium multiplicatione ſæpius itera. tâ tota dependet; uti inductione patebit.

Ubi multiplicator eſt numerus ſimplex.

Sit igitur numerus 3421 duplandus, ſive per numerum 2 multiplicandus. Numero igitur multiplicando 3421, ſubſcribatur Multiplicans 2, & (ducta lineola) cuilibet figuræ numeri multiplicandi, ſubſcribatur ipſius duplum (quia nempe multiplicator eſt 2) eodem ſemper gradu cum illo cujus eſt duplum. Ita nempe duplum unius unitatis ſunt unitates duæ; duplum duarum decadum ſunt decades quatuor; duplum quatuor centuriarum ſunt centuriæ octo; duplum trium millium ſunt millia ſex: qui quidem numeri in unam ſummam collecti, nempe 6842, ſunt totius numeri multiplicandi 3421 duplum. Cum enim omnes partes ſimul æquentur toti; erunt etiam omnes partes bis ſumptæ, æquales toti bis ſumpto; hoc eſt, duplum partium omnium æquabitur duplo totius. Quæ quidem demonſtratio (mutatis mutandis) de triplo, quadruplo, quintuplo, aut quovis alio multiplo pariter valebit.

3421
2
6842

Si vero, in hujuſmodi proceſſu numerus cujuſvis loci ſeu gradus novenarium excedat, adeoq; non ſit uniçâ figurâ exprimendus;

mendus; ultima iſtius figura ſuo loco ponenda eſt, ſuperiori interim in locum proxime aſcendentem protruſâ, cum figuræ iſtius locis deinceps numerandâ. Exſempli gratia, ſi numerus idem 3421 per 8 multiplicandus ſit, ſingulæ figuræ numeri multiplicandi octuplandæ ſunt; earumq; octupla ſuis quæq; locis ſubſcribenda, & in unam deinde ſummam (habito locorum reſpectu) colligenda. Nempe Unitas 1 octuplata dat unitates 8, decades 2 octuplatæ dat decades 16, centuriæ 4 octuplatæ ſunt centuriæ 32, & 3 millia octuplata ſunt 24 millia. Quibus in unam ſummam Additione collectis, emergit totius numeri multiplicandi octuplum 27368 = 3421 * 8. ut patet.

```
3421
   8
------
   8
  16
  32
 24
-----
27368
```

Poſſunt autem illa particularia ſingulorum locorum multipla, vel totidem diſtinctis lineis collocari, ut modo; vel potius in duas omnino lineas cogi ad hanc formam. Dummodo enim illud utrobiq; curetur, ut quælibet figura debito ſuo loco ſeu gradu collocetur, perinde eſt ſive illud duabus ſive pluribus lineis fiat; eadem ſiquidem additionis ſumma emerget.

```
3421
   8
------
3108
2426
-----
27368.
```

Verum & adhuc, ad commodius operationis compendium, poterit iſthæc additionis ſumma etiam currente multiplicationis opere colligi, (quamvis, perſpicuitatis gratia, diſtincte potius utramq; operationem prima vice exponendam putaverim:) Nempe quoties figura quævis in ſuperiorem locum ſit transferenda, ea memoria retineatur, uſq; dum nota quicum addenda ſit innoteſcat, ut utriuſq; loco earum aggregatum ſcribatur. Ita, in ſuperiori exſemplo, poſtquam in unitatum loco ponatur 8 (nempe figuræ 1 octuplum;) ſequuntur 16 decades (nempe duarum octuplum) quarum 6 decadum loco repoſitis, pro reliquis decem reſervo 1 centuriam: deinde 4 centuriarum octuplum ſunt centuriæ 32, quibus adjungenda eſt 1 (nuper reſervata) ut fiant centuriæ 33; quarum 3 centuriarum ſede poſitis, pro reliquis centuriis 30 reſervo 3 millia: His autem 3 millibus, ſi adjungantur millia 24, (nempe octuplum 3 millium in numero multiplicando repertorum,) emergunt millia

millia 27, suis locis ponenda. ut in exsẽplo apposito.

$$\begin{array}{r} 3421 \\ 8 \\ \hline 27368 \end{array}$$

Adeoq; satis declaratum est quomodo in multiplicandis etiam numeris compositis procedendum est, si modo multiplicator sit numerus simplex, una figurâ scribendus.

Ubi multiplicator est numerus compositus.

Si vero non modo numerus multiplicandus, sed & Multiplicator sit numerus compositus, duabus aut pluribus figuris scribendus; eadem quæ prius operatio toties repetenda erit, quot sunt Multiplicatoris sive numeri multiplicantis figuræ; numeriq; sic inventi (debita locorum ratione habitâ) in unam summam additione colligendi. Exsempli gratia, si numerus idem 3421 per 28 multiplicandus sit: postquam subscripserim totius octuplum (modo superius tradito inventum) 27368; subscribendum est insuper ejusdem duplum, seu potius vigecuplum. Nempe ipsius duplum (ut supra docetur inventum) 6842, si ciphram adjectam habeat (puta 68420) sive, quod tantundem valet, uno gradu asscendendo promoveatur, (ita nempe ut ipsius figura ultima ponatur loco decadum, penultima loco centuriarum &c.) habebitur istius dupli decuplum, (quælibet nempe figura uno gradu promota decuplum istius valoris habet quem prius obtinebat,) hoc est, expositi numeri vigecuplum. Si itaq; octuplum & vigecuplum simul addantur, habebitur viginti-octuplum. ut patet. Nempe $95788 = 3421 \times 28$. Similiter in aliis faciendum erit quotcunq; demum in multiplicatore figuræ reperiantur.

$$\begin{array}{r} 3421 \\ 28 \\ \hline 27368 \\ 6842 \\ \hline 95788 \end{array}$$

Ita siquis quærat, *Quot horas contineat annus integer?* Cum notum sit diem quemlibet horas continere 24, erit numerus horarum viginti-quadruplus numeri dierum. Adeoq; cum Annus integer contineat dies 365, atq; insuper 6 horas, si dierum numerus 365 multiplicetur per 24, habebitur numerus horarum quæ in diebus integris unius anni continentur, $8760 = 365 \times 24$. quibus si addantur reliquæ 6 horæ, erit omnium numerus $365 \times 24 + 6 = 8760 + 6 = 8766$. tot igitur horæ in uno anno integro continentur.

$$\begin{array}{r} 365 \\ 24 \\ \hline 1460 \\ 730 \\ \hline 8760 \\ 6 \\ \hline 8766 \end{array}$$

Si quis insuper quærat *Quot horæ fuerint elapsæ a nato Christo ad finem annorum inde subsequentium Mille sexcentorum quinquaginta & sex.* Si ducatur vel 8766 numerus horarum unius anni in 1656 numerum annorum; vel (quod eodem recidit) numerus annorū 1656, in 8766 numerum horarum cujusq; anni, habebitur numerus horarum omnium 14516496 = 8766 × 1656 = 1656 × 8766, ut in operationibus appositis patet.

8766	1656
1656	8766
52596	9936
43830	9936
52596	11592
8766	13248
14516496	14516496

De Ciphris Multiplicatori intermistis.

Siquando numeris invicem multiplicandis, saltem multiplicatori, Ciphræ immiscentur; quanquam ipsæ ex se nihil significent, inserviunt tamen locis supplendis, adeoq; aliarum figurarum valorem augendo, & propterea neutiquam sunt negligendæ. Exempli gratia, si numerus 2361 ducendus sit in 20104. Subscripto primum multiplicandi quadruplo 9444; cum deinde occurrat in multiplicatore ciphra, si illa in totum multiplicandum ducatur prodibit adhuc nihil (nam nullies 1 est nihil, item nullies 6 est nihil, & sic in reliquis,) adeoq; nullies 2361 erit 0000. Deinde 2361 × 1 = 2361. item 2361 × 0 = 0000. Deniq; 2361 × 2 = 4722. His igitur omnibus, eo quo hic locantur modo dispositis, in unam summam collectis, habebitur numerus 47465544 = 2361 × 20104. Ubi notandum est duas ciphrarum series, utut ex se nihil significent, tamen cum multiplorum particularium quodlibet uno semper ad sinistram loco ultra quàm præcedens protruditur, ciphrarum series illud faciunt ut reliquæ suis singulæ sedibus collocentur.

2361
20104
9444
0000
2361
0000
4722
47465544

Cum autem illud solum præstent interpositæ ciphrarum series, ut reliquæ debitas suas series occupent, neq; ulterius ex sese quicquam valoris habeant; possunt quidem illæ non incommode penitus omitti, modo interim caveatur ut reliquæ series significativæ easdem sedes occupent acsi ipsæ (non-significantes)

cantes) adeſſent: ut in eodem exſemplo hic repetito (omiſſis tantum ſeriebus ciphrarum, reliquiſq; ſuas ſedes retinentibus) videre eſt. Idem enim & hic & illic numerus Factus prodit.

```
  2361
 20104
 ----
  9444
 2361
4722
--------
47465544
```

Ut autem ſuus cuiq; locus rite aſſignetur, curandum eſt ut hæc obſervetur regula; nempe, ut *cujuſlibet particularis multipli ultima figura eodem gradu collocetur cum ſuo reſpective multiplicatore*, (reliquis proximos continue locos occupantibus.) Ut in eodem exſemplo, multiplicandi (2361) quadruplum 9444, ultimam ipſius figuram habet in Unitatum loco poſitum, quia ipſius multiplicator 4, totidem unitates indicat. Item ejuſdem multiplicandi ſimplum 2361, ultimam figuram in centuriarum loco poſitam habet, quoniam ipſius multiplicator 1, unam centuriam indicat. Deniq; ejuſdem duplum 4722, ultimam ſuam figuram habet in deciesmillium loco, quoniam ipſius multiplicator 2, duas millium decades ſignificat. Et ſimiliter in aliis quibuſvis multiplicationibus faciendum erit. Atq; hoc quidem ſi curetur, ciphrarum ſeries quotlibet (ſiquando multiplicatori ciphræ immiſceantur) penitus omitti poſſunt.

Deniq,, *ſi e Factoribus* (ſive numeris invicem multiplicandis) *vel alter vel uterq; in ciphris* (ſive una ſive pluribus) *termi-* *De ciphris*
netur; ſepoſitis illis ciphris finalibus, peragatur tota multiplicatio acſi finalibus non adeſſent; & numero tandem ita producto tot ſubjungantur ciphræ quot erant illæ omnes ſepoſitæ. Ita ſi numerus 4085100 ducendus ſit in numerum 230040; ſepoſitis tribus ciphris finalibus (multiplicandi nempe duabus & multiplicatoris unâ) habebitur 939736404 = 40851 × 23004; cui numero Facto ſi reſtituantur tres illæ ciphræ ſepoſitæ, prodibit 939736404000 = 40851000 × 230040. Et pariter in aliis.

```
  40851 00
  23004 0
  ------
  163404
 122553
 81702
 ------------
939736404000
```

Ratio operationis ſatis eſt evidens. Si enim, verbi gratia, 300 per 20 multiplicare oporteat; &, ſepoſitis ciphris, ducantur 3 in 2 habebitur 6 = 3 × 2. Et, reſtitutis ciphris,

6000 = 300 × 20. Nam, si bis 3, sint 6; erunt bis 30 decies 6, hoc est, 60; & bis 300 decies 60, hoc est, 600; & deniq; si bis 300 sint 600, erunt vicies 300 (sive bis decies 300) decies 600, hoc est, 6000. Quælibet enim adjecta ciphra numerum cui adjicitur decuplum facit. Et pariter in aliis ejusmodi multiplicationibus quibuscunq;.

300
20
6000

Atq; hinc liquet, tantundem prorsus valere sive 2 ducantur in 3000, sive 20 in 300, sive 200 in 30, sive deniq; 2000 in 3; quippe in singulis emergit numerus 6000. ut patet. Et pariter in similibus.

3000	300	30	3
2	20	200	2000
6000	6000	6000	6000

Atq; hactenus quidem de numeris integris invicem multiplicandis dixisse sufficiat.

Partium decimalium multiplicatio.

Siquando numeris integris annecti contigerit partes aliquot decimales, sive (quod idem est) loci aliquot infra unitatis locum descendentes; eadem omnino erit operationis methodus atq; in numeris integris: cum hoc solo discrimine, quòd postquam numerus productus eodem plane modo invenitur acsi essent numeri omnino integri, tandem tot loci in numero facto lineâ separatrici sunt abscindendi, ut partes decimales, quot erant in utroq; simul Factore sic abscissi.

Exempli gratia, Si numerus 365|25 ducendus esset in 3|5. Postquam (quasi essent plane integri) invenerim productum 1278375 = 36525 × 35; tandem, quia in factoribus video tres locos partium decimalium (duos nempe in multiplicando, & unum in multiplicatore,) tres ultimas producti figuras linea separatrice abscindo ut partes decimales: adeóq; habeo 1278|375 = 365|25 × 3|5

365 25
3 5
182, 625
1095, 75
1278 375

Atq; idem in aliis partium decimalium multiplicationibus observandum erit.

Ratio hujus operationis hæc est. Quoniam, ut numerus quilibet, adjectione ciphræ in fine, decuplo augetur; promotâ nempe qualibet figura in locum proxime superiorem, ut quæ prius unitates significabat, jã significet decades, & sic de reliquis:

ita

ita figuræ finalis abſciſſione linea ſeparatrice, numerus decuplo minuitur; detruſa nempe figura qualibet in locum proxime inferiorẽ, ut quæ prius decades ſignificabat, jam ſignificet unitates, & ſic de reliquis. Puta, ſi numero 35 adjiciatur ciphra, fiet 350 decuplo major; ſin ab eodem 35 abſcindatur linea ſeparatrice figura ultima, erit 3,5 decuplo minor. Et ſimiliter judicandum erit ubi duæ, tres, aut plures adjiciuntur ciphræ, aut totidem abſcindantur loci decimales; nempe numerus centuplo, millecuplo, &c. adjectione augetur, vel ablatione minuitur. Adeoq; in exſemplo propoſito cum 365,25 ſit centuplo minor quam 36525, erit etiam 365,25 × 35 centuplo minor quam 36525 × 35; cumq; etiam 3,5 ſit decuplo minor quam 35, erit 365,25 × 3,5 decuplo minor quam 365,25 × 35, adeoque decies-centuplo, hoc eſt millecuplo, minor quam 36525 × 35. Cum igitur ſit 1278375 = 36525 × 25, abſcindendæ ſunt linea ſeparatrice tres ultimæ figuræ ut numerus fiat millecuplo minor, nempe 1278,375 = 365,25 × 3,5; adeoq; figura 8 quæ prius ſignificabat tot millia, jam ſignificat non niſi totidem Unitates, & ſic de reliquis.

Atq; hæc etiam ſufficiant de partibus decimalibus multiplicandis.

Tandem & hanc libet (ex Oughtredo) regulam generalem proponere, quæ in ſuos aſſignando numeris multiplicatione factis locos, ſive in numeris integris, ſive etiam partibus decimalibus, dirigat. Cum ſuos cuiq; loco indices aſſignavimus, ita nempe ut Unitatis locus indicem habeat 0 (ut quilibet neq; aſcendit neq; deſcendit) loci autem ſupra illum aſcendentes primus, ſecundus, tertius, &c. indices habeant affirmativos, 1, 2, 3, &c. & contra loci deſcendentes primus, ſecundus, tertius, &c. indices habeant negativos −1, −2, −3, &c. *Index cujuſq; particularis Facti in multiplicatione, æquatur indicibus utriuſq; Factoris ſimul ſumptis.* Exſempli gratia, ſi multiplicandus ſit numerus 32,1 in 5,34. Multiplico primum 4 in 1 (quorum indices −2 & −1) & factus eſt 4 (= 1 × 4) ponendus loco tertio deſcendente, cujus index eſt −3, æqualis duobus −2 & −1. Tum 4 × 2 (quorum indices −2 & 0) factus eſt 8, loco ſecundo deſcendente ponendus, cujus index −2 = 2 + 0. Tum 4 × 3 (quorum indices −2 & +1) factus eſt 12 ponendus (nempe quoad ultimam ipſius figuram 2) loco deſcendente primo

De Indice numeri facti.

mo cujus index $-1 = -2+1$. Deinde 3×1 (quorum indices -1 & -1) factus 3, indicem habet $-2 = -1-1$, ideoq; ponendus loco descendente secundo. Sic 3×2, factus 6, indicem habet $-1 = -1+0$, ponendus loco descendente primo. Et $3+3$, factus 9, cujus index $0 = -3+3$, ponendus loco Unitatum. Deniq; 5×1, factus 5, cujus index $-1 = 0-1$, ponendus loco descendente primo. Et 5×2, factus 10, indicem habet $0 = 0+0$, ideoq; ad locum unitatum referendus, nempe ipsius ultima figura 0 illic collocanda, & reliqua 1 in locum proximum transferenda. Et tandem $5+3$, factus est 15 (cui si addatur 1, figura huc transmissa, fit 16,) cujus index $1 = 0+1$, adeoq; ad locum primum ascendentem spectat. Quibus absolutis, si additione colligantur in unam summam, & totius multiplicationis factus, 171 $\frac{414}{}$, cujus index -3 (quoad ultimam ipsius figuram æstimandus) æqualis duobus simul indicibus -2 & -1, nempe utriusq; factoris 32 $\frac{1}{}$ & 5 $\frac{34}{}$. Et similiter in aliis hujusmodi multiplicationibus quibuscunq;.

1. 0. 1. 2.
32 $\frac{1}{}$
5 $\frac{34}{}$
1,284
9,63
160,5
171,414

Atq; hactenus de multiplicatione tam numerorum integrorum, quam partium decimalium. Multiplicatio Algebrica & Speciosa, ut & quantitatum ex variis denominationibus constantium, deinceps tradetur post Divisionis traditionem; quam sequente Capite aggredior.

CAP. XIX.

De Divisione. Quid sit Divisio, Dividendus, Divisor, Quotiens. Divisio sensu stricto, & sensu lato, sumpta. Non semper numerum divisum minuit. Divisio est multiplex subductio. Divisionis praxis: per divisorem simplicem; per divisorem compositum. Divisionis praxis in partibus decimalibus. De Indice Quotientis, sive numeri orti.

EXposita in præcedentibus Multiplicationis tam natura quã praxi; ad *Divisionem* explicandam accedendum est.

Est

Est autem Dividere, *Numerum quemvis datum in quotlibet æquales partes dirimere*; sive *Numerum invenire, qui doceat quoties numerus quivis datus in dato quovis continetur.* Vel (si libet non ad solos numeros, sed ad alias etiam Divisiones vocem extendere) *Dividere, est datam quamlibet quantitatem in data ratione diminuere*; vel potius *Duarum ad invicem quantitatum homogenearum rationem invenire.* Nam ut Subductione quantitatum homogenearum *Differentiam*, ita Divisione earundem *Rationem* investigamus. *Divisio, quid?*

Sed de Numerorum Divisione præsertim agendum est, quò vocis illa significatio primario refertur, ad alias autem non nisi analogicè applicatur.

In numerorum vero divisione, duos habemus numeros datos, nempe *Dividendum* qui in partes aliquot æquales dirimendus est; & *Divisorem* sive Dividentem, qui numerum partium denotat in quas supponitur ille dirimendus: quibus datis, tertius quæritur, quem *Ortum* dicunt, sive *Quotientem*, ostendit enim quoties divisor in dividendo continetur, sive (quod eodem recidit) quoties ex illo auferri potest. *Dividendus, Divisor, Quotiens.*

Sic si numerus 12 in 3 partes sit dirimendus, numerus *Ortus* sive *Quotiens* (puta 4) ostendit unius trientis valorem: vel etiam ostendit quoties *Divisor* 3, in *Dividendo* 12, continetur. Ita si numerus 20 dividendus sit per (divisorem) 4, sive partiendus sit in 4 partes, vel si 4 dividat 20, vel deniq; si quæratur quoties in 20 contineatur 4, aut quoties inde auferri possit: Numerus ortus sive quotiens, puta 5, ostendit quanta sit istius numeri pars quarta seu quadrans, hoc est, si supponatur numerus 20 in 4 æquales partes dividi, quanta sit earum quælibet, nempe 5; vel quoties in 20 contineantur 4, aut quoties inde auferri possit, nempe quinquies.

Divisionis autem operationem (sive perfectam, sive perficiendam, solemus sic indicare $\frac{12}{3}$; quod notat numerum 12 per 3 divisum vel dividendū; vel etiã 3)12(4; quod notat numerum 12 per 3 divisum, ejusq; quotientem esse 4. Et similiter in aliis.

Quod vero tantundem sit inquirere Quoties in 12 contineantur 3? atq; Quantus sit numeri 12 pars tertia sive trions? (& pariter in similibus;) hac facili demonstratione ostendatur. Statuantur in totidem columnis, sive seriebus erectis, tot punctorum triades sive terniones, quot opus est ad complendum numerum 12, (puta 4;) quo facto, numerus colum-

. . . .
. . . .
. . . .

columnarum simul ostendit, quoties in 12 contineantur 3 (toties nempe quot sunt ipsæ columnæ,) atq; etiam quot puncta sunt in qualibet serie transversa, hoc est, in quolibet totius numeri triente; (tot enim sunt transversæ series quot sunt cujuslibet erectæ puncta, adeoq; quælibet series transversa est totius numeri triens;) tot autem sunt cujuslibet transversæ puncta, quot est serierum erectarum numerus, cum harum quælibet transversarum cuilibet unum subministret punctum, ut patet.

Est autem Divisio eodem fere modo Multiplicationi opposita quo Additioni Subductio. Ut enim quæ Additio componit Subductio resolvit; ita quo Multiplicatione componitur, id resolvitur Divisione. Sic, ubi ex additis 3 & 4 fiunt 7; si ex 7 alterutrum auferas, alterum prodibit. Ita, ubi ex multiplicatis 3 in 4 fiunt 12; si 12 per alterutrum dividas alterum prodibit. Utrobiq; quod componendo ex suis componentibus conflatur,

$3+4=7$	$3\times 4=12$	
$7-3=4$	$3)\ 12\ (4$	$\frac{12}{3}=4$
$7-4=3$	$4)\ 12\ (3$	$\frac{12}{4}=3$

id resolvendo in sua componentia resolvitur. Nempe, quæ in Subductione sunt Ablatum & Residuum, ea in Additione sunt Integri Membra: & quæ in Divisione sunt Divisor & Quotiens, ea in Multiplicatione sunt Factores.

Græcè dici solet Μερισμὸς *divisio*, & μερίζειν *dividere*. Apud Euclidem interim passim μέτρον, μετρεῖν, μετρούμενον, idem sunt atq; *Divisor*, *dividere*, *divisus* sive *dividendus*, & numerus καθ' ὃν μετρεῖται *quotiens* est. Sic 9 d 7 *Numerus pariter par* definitur ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατ' ἄρτιον ἀριθμόν. *Qui a numero pari per parem mensuratur*, sive *quem numerus par per parem metitur*; nempe, qui ita per Divisorem parem dividi potest, ut & quotientem parem habeat.

Divisio stricte sumpta. Notandum autem est, apud Euclidem, non numerum quemvis alium quemlibet καταμετρεῖν *dividere* vel *metiri* posse; sicut nec a quovis numero quilibet auferri potest, (puta major ex minore:) Cum enim ille de veris tantum numeris & propriè dictis (integros intellige) verba facit, qui ex Unitatibus componuntur; adeoq; Unitatem semper habet pro indivisibili, quodq; est, in numeris, minimum quod sic: non raro occurrit numerus qui in imperatas partes dividi non potest. Adeoq;

numerus

numerus ille solus alterum Dividere sive Metiri apud Euclidem dicendus erit, qui est ipsius *aliquota pars*, seu qui aliquoties positus Dividendum æquet; quoties autem ponendum est ut æquet numerum dividendum, id divisione quæritur. Verbi gratia, si dividatur numerus 12 per 3, sive quæratur quoties ponendus numerus 3 ut æquet numerum 12, Quotiens erit 4; quia nempe numerus 3 quater positus æquabit numerum 12. At si proponatur numerus 10 per 3 dividendus; id quidem fieri non potest, cum hic illius non sit aliquota pars, nec aliquoties repetitus ipsum æquabit; nam ter positus ($3\times3=9$) minor est, & quater positus ($3\times4=12$) major est quam 10; atq; inter 3 & 4 non alius intercedit numerus, qui sit Quotiens quæsitus. Atq; idem continget quotiescunq; propositus Divisor non est numeri Dividendi aliquota pars.

Atq; hoc quidem interest inter Arithmeticas operationes Syntheticas & Analyticas. Nempe, in Syntheticis, veris numeris datis verus semper numerus emerget; at non ita in Analyticis. Puta, in Additione $5+4=9$, $3+4=7$, &c. Et similiter continget quicunq; sint numeri dati addendi: At in subductione, quamquam illud aliquando contingit, ut $5-4=1$, &c; non tamen id semper, nam $3-4$ æquabitur nulli vero numero possibili, cū majus ex minori auferri non possit; solemus tamen ejusmodi supposititiam subductionem utcunq; innuere ad hanc formam $3-4$, vel etiam -1. Sic, in multiplicatione, propositis quibuscunq; veris numeris invicem multiplicandis, verus semper emergit numerus, ut $4\times2=8$, $3\times6=18$, $5\times3=15$, &c. At in Divisione, licet illud aliquando contingit, ut $2)4(2$; non raro tamen secus accidit, ut si 3 per 6, aut 5 per 3, dividendi essent, ubi quotientes nullis veris numeris (integris) assignari possunt; solemus tamen & hic supposititios illos quotos utcunq; innuere ad hanc formam $\frac{3}{6}$ vel $\frac{1}{2}$, & $\frac{5}{3}$ vel $1\frac{2}{3}$, &c. Et similiter in Potestatibus componendis & resolvendis, contingit; dati enim cujusq; veri numeri quadratum, Cubus, &c. veris numeris exhibebitur; at non item dati cujusq; numeri Radix quadratica, cubica, &c. veris numeris exhiberi poterit: ut suo loco patebit.

Verum ut multiplicatio, laxiori sensu sumpta, non ad illam solummodo restringitur ubi Factus est numeri propositi Multiplus; ita nec Divisio ita restringi solet ut Divisor necessario sit Dividendi aliquota pars; quamquam istiusmodi & Multipli- *Divisio laxiori sensu accepta.*

cationem & Divisionem voces illæ primariâ & maxime propria sua significatione innuant. Et quo sensu numeri fracti pro numeris habentur eodem & pro Factoribus in Multiplicatione, & in Divisione pro Divisore vel Quotiente haberi possunt. Itaq; & hoc sensu, quilibet numerus (sive integer sive etiam fractus) numerum quemlibet dividere poterit.

Adeoq;, ut rem paucis comprehendam, cum sensu strictiori sumantur, *Multiplicatio quærit numeri dati multiplum; divisio aliquotam partem*: cum sensu vero laxiori usurpantur, dicenda potius est *Multiplicatio, quantitati aliam in data ratione exhibere*; sive *quantitatem, quæ ad datam datam habeat rationem, investigare: Divisio* verò, *datis duabus quantitatibus homogeneis earum ad invicem rationem investigare*. Neq; interim aliquem terreat, quod hoc laxiori sensu eadem operatio utrovis ad libitum nomine appellari possit, nam illud omnino concedendum est, cum perinde sit omnino Multiplicare per 3, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, &c. atq; dividere per $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{3}{2}$, &c. ut suo deinceps loco clarius patebit. Quod eò minus mirandum est, cum & idem in aliis oppositis operationibus contingat; utpote in Additione & Subductione, cùm perinde omnino est sive addamus 2, — 3, 4, &c. sive subducamus — 2, 3, — 4, &c. ut ex supra dictis patet.

Divisio non semper numerum minuit.

Interim monendum est, quod, ut multiplicatione (laxiori sensu sumptâ) non semper augetur quantitas multiplicata, sed aliquando vel eadem manet vel etiam minuitur: sic divisione (laxiori item sensu sumpta) non semper minuitur quantitas divisa, sed vel eadem manet vel etiam augetur. Nempe, quoties Divisor est unitate major, Quotiens erit numero dividendo minor; quoties autem Divisor est unitate minor, Quotiens erit numero dividendo major, si deniq; Divisor sit unitas, Quotiens numero dividendo æqualis erit. Ratio manifesta est. Cùm enim numerus Dividendus ostendat quoties ipse contineat unitatem; Quotiens autem, quoties idem dividendus contineat divisorem: Si divisor sit unitate major, puta 2; manifestum est quotientem numero dividendo minorem esse, cum eodem numero dividendo pauciores continentur binarii (δυάδες) quam unitates: sin divisor sit unitate minor, puta $\frac{1}{2}$; manifestum item est quotientem numero dividendo futurum majorẽ, cum numerus dividendus plures contineat semisses quam integras unitates: si deniq; Divisor sit unitas, quotiens erit numero dividendo

dendo æqualis; toties enim dividendus divisorem continebit quoties continet unitatem.

Atq; huc spectat quod apud Arithmeticos passim occurrit, Dividendum toties continere Divisorem, quoties Ortus seu Quotiens continet Unitatem; vel, eandem esse rationem Dividendi ad Divisorem, quæ est Quotientis ad Unitatem: Item, Dividendum toties continere Quotientem, quoties Divisor continet Unitatem; vel, eandem esse rationem Dividendi ad Quotientem, quæ est Divisoris ad Unitatem. Nam & hoc sciendum est (quod & ex prædictis satis patet,) ut in Multiplicatione perinde est utrumvis e Factoribus Multiplicandum sive Multiplicatorem dicamus, adeo ut si hic dicatur Multiplicandus ille erit Multiplicator, & contrà; Sic in Divisione de Divisore & Quotiente contingit, qui alternatim sedes mutabunt, ut si duorum componentium hic fit divisor erit ille Quotiens, & contra, si ille Divisor hic quotiens erit. Puta, cum in multiplicatione 3 & 4 invicem ducti constituant 12; si 3 dicatur multiplicandus, erit 4 multiplicator; & contra, si 4 sit multiplicandus, multiplicator erit 3. Si autem idem numerus 12, per 3 dividatur, quotiens erit 4; sin divisor sit 4, quotiens erit 3. Et quidem in omni divisione, si qui prius fuerat quotiens fiat Divisor, qui fuerat Divisor fiet Quotiens.

$3 \times 4 = 12$ $\quad 3)12(4 \quad \frac{12}{3} = 4$

$4 \times 3 = 12$ $\quad 4)12(3 \quad \frac{12}{4} = 3$

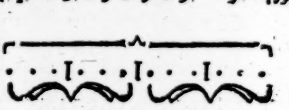
Deniq;, ut de Multiplicatione monuimus, nempe eam vix aliud esse quam multiplicem Additionem, sive additionis compendium; ita & de Divisione monendum, eam quippe vix aliud esse (saltem cum Divisor est numerus integer) quam multiplicem subductionem, sive subductionis compendium. Qui quærit enim, quoties numerus 12 contineat 3; idem facit ac qui quærit, quoties ex 12 subduci possint 3: Qui igitur continuâ subductione invenerit, quoties possint 3 ex 12 auferri, ita ut nihil restet; invenit etiam eâdem opera quoties 3 in 12 præcise contineantur; quod ipsum est 12 per 3 dividere, ut ex prædictis liquet. Sic si ex 12 punctis appositis, 3 quoties fieri possit subducantur, patebit post quatuor subductiones nihil supereſſe. Quot autem subducta sunt, tot prius aderant;

Divisio est multiplex subductio.

adeoq; cum nihil supersit, manifestum est 3 in 12 præcise quater contineri, (quod ipsum divisione quæritur,) vel etiam trientem numeri 12 esse 4, (ut supra ostensum est;) nempe si 12 per 3 dividatur, quotiens erit 4.

Quiq; hæc satis intelligit, is genuina divisionis fundamenta persentiscit. Cum enim infiniti prope laboris esset in divisionibus majoribus tot subductiones figillatim peragere, quot numero dividendo grandiori penitus exhauriendo sufficiant; excogitarunt Arithmeticæ practicæ magistri, laboris magni magnum compendium; nempe *pro multiplici Divisoris subductione, subducunt divisoris Multiplum*; quod eodem plane recidit. Sic in exsemplo præcedente, ubi numerus 12 per 3 dividendus proponitur; perinde est sive ternionem (τριάδα) quater subducamus, sive ternionis quadruplum, (quia $3+3+3+3=3\times 4$,) & utrumvis fiat nihil restabit.

Quod & ipsum fieret si ternarii duplum bis subducamus; aut etiam triplum ternarii semel & semel ipsum ternarium. nempe $3*3+3\times 1=3\times 2+3\times 2=3\times 4=3+3+3+3=12$.



Quo major autem fuerit numerus dividendus, & quotiens, eo magis patebit hujusce compendii utilitas. Si 20 sint per 2 dividenda; pro decem subductionibus numeri 2, substituenda est istius decupli subductio; nam $2\times 10=20$. Si 360 dividenda per 6; pro sexaginta subductionibus numeri 6, semel subducendum erit ipsius sexagecuplum. Et similiter in aliis.

2)20(10
6)360(60

Divisionis operatio.

Atq; hactenus quidem divisionis naturam satis explicasse videar; ejusq; cum Multiplicatione comparationem. Sequitur ipsius praxis exponenda.

Per divisorem simplicem.

Si Divisor simplex sit, una figura scriptus, & dividendus item sit divisoris decuplo minor; ex ipsa memoria petenda est solutio; vel, si opus est, ex eâ quam supra exhibui Multiplicationis & Divisionis Tabella. Nempe, reperto in Tabellæ summitate Divisore, in eâdem columna quæratur numerus dividendus, vel saltem numerus qui illic occurrit Dividendo proxime minor, & habebitur ad latus numerus in quotiente ponendus. v.g. Si quæratur

quæratur quoties in 24 contineantur 3. Repertis in summo 3,

Tabella Multiplicationis & Divisionis.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

& infra 24, habebitur ad latus numerus 8, in quotiente ponendus: quippe in 24 octies præcise continentur 3: nam $3 \times 8 = 24$. Unde patet numerum 3, numeri 24 esse partem aliquotam, nempe octavam. Si 26 per 3 dividenda sint; in columna tertia (ubi in fronte 3,) & serie transversa octavâ, reperiuntur, non 26, sed 24, binario minor, & ad latus 8; quod indicium est Dividendum 26, continere divisorem 3 octies, atq; insuper 2: vel ex Dividendo 26, octies auferri posse divisorem 3, atq; insuper restare 2. Hoc residuum, cum subjecto sibi divisore, & interjecta lineolâ, invento quotienti 8 postpono, ut habeatur perfectus quotiens $8\frac{2}{3}$. Quod etiam indicat numerum 3 numeri 26 aliquotam partem non esse, cum hic illum contineat plusquam octies, & minus quam novies.

3)24(8
3)26($8\frac{2}{3}$

Si vero numerus Dividendus non sit decuplo Divisoris minor, gradatim procedendum est, & varia multipla successivè subducenda; posito primum Divisore sub dividendi gradu supremo, seu ad sinistram primo, (saltem si divisor non sit major figura Dividendi eo gradu posita,) & deinceps successive in reliquos locos promoto, usq, dum ad locum infimum tandem perveniatur; in singulis interim locis sublato quoties fieri

potest Divisore, seu, quod idem est, sublato divisoris multiplo quam fieri potest amplo, e numeris dividendi suprapositis, notato ubiq; si quod sit residuo; numero item subductionum in quolibet gradu factarum, sive multipli subducti denominatore, seorsim in Quotiente notato; quorum omnium, respectu ad suos gradus habito, collectio (residuo, si quid operatione perfecta superfit lineolæ ut dictum est suprapositō, cui subscribatur ipse Divisor,) integrum quotientem constituet: sicut & multiplorum omnium subductorum aggregatum, si illa videbitur colligere, (adjecto interim si quid in fine superfit residuo) restituet integrum Dividendum; si enim singula subducta restituantur, redibit numerus primo positus: Ipseq; numerus Dividendus toties Divisorem continet quoties indicat Quotiens, seu quoties ipse quotiens continet unitatem, ut & Quotientem toties quoties Divisor continet unitatem.

Exempli gratia. Si numerus 486 sit bisecandus, sive in duas æquales partes dividendus; vel, si quæratur quoties in numero 486 contineatur numerus 2; hoc est, si dividere oporteat 486 per 2: Ponatur Divisor 2, sub figura divisoris ad finistram prima, nempe sub 4; & quæratur (vel ex memoriâ, vel ex tabella suprapositā) quoties in 4 contineantur 2; quod quidem bis fit, nec sæpius, (nam ipsius triplum, $2 \times 3 = 6$, majus est numero 4, adeoq; auferri non potest) notato igitur in quotiente numero invento 2, divisoris duplum (quotuplum nempe indicat Quotiens) nempe $4 = 2 \times 2$, è numero 4 suprapositō auferatur, & cum nihil restet utraq; figura (2 divisoris, & 4 dividendi) deleantur, (ut quæ munus suum jam præstiterint;) estq; hæc operatio prima. Deinde, promoto Divisore in locum proximum, sub Dividendi figurâ 8, eadem operatio (mutatis mutandis) repetenda est: nempe quæratur, quoties 2 in 8? & respōnsum 4 ponatur in quotiente (post numerum 2 istic prius positū) & Divisoris quadruplum, $8 = 2 \times 4$, ex 8 (dividendi numero suprapositō) auferatur, & cum nihil restiterit, deletis figuris 2 & 8, perfecta est operatio secunda. Tandem, promoto in locum proximum divisore, ad eandem formam præstanda est operatio tertia; quæratur nempe, quoties 2 in 6? respōnsum 3 in quotiente

2) 486 (2
2

2) 486 (24
22

ente scribatur, & Divisoris triplum $6 = 2 \times 3$, ex numero 6 suprapositō ablatum, nihil relinquit; adeoq;, deletis 2 & 6, cum nullæ superſint aliæ Dividendi figuræ, peracta est tota divisio; & repertus est Quotiens integer 243; qui propterea semissis est numeri 486; quippe toties in 486 reperitur numerus 2. Si autem plures adhuc superfuissent in numero Dividendo loci, plures etiam eâdem plane methodo repetendæ essent operationes, quot opus esset.

2)486(243
222

Si quis interim objiciat, figuram 4, centuriarum loco positam, atq; 8 positam in loco decadum, non tot simpliciter unitates, sed illam 4 centurias, hanc 8 decades significare, adeoq; 2 in 400 non bis sed ducenties, & in 80 non quater sed quadragies contineri. Verum quidem illud est: sed & pariter verum est figuras 2 & 4 in quotiente positas, quanquam cum primum scriberentur, videri possunt tot simpliciter unitates notare, tamen ubi tota perficitur divisio patet illam ducenta, & hanc octoginta, significare; adeoq; non dicimus numerum 2 (divisorem) in numero 486 (dividendo) contineri bis & quater & ter, sed ducenties quadragies & ter. Et quidem in operatione prima, si locorum ratio habeatur, non simpliciter bis duo ex 4, sed ducenties duo ex 400, sive bis duas centurias ex quatuor centuriis; & in operatione secunda, non tam quater duo ex 8, quam quadragies duo ex 80, sive quater duas decades ex 8 decadibus, ablata esse dicendum erit. Et similiter in aliis quibuscunq; divisionibus.

Eodem modo, si 138240 per 3 dividamus; Divisorem 3 (non quidem sub 1, quia ipso divisore minor est, adeoq; 3 in 1 nullies continentur, & propterea in quotiente vel nihil ponendum esset, vel o ciphra, quæ hîc loci nulli esset usui, cum nondum scriptam habeamus figuram significativam, sed) sub figura proxima 3 subscribo; &, cum 3 in 13 (figuris suprapositis) contineantur quater, scripto in quotiente 4, divisoris quadruplum $12 = 3 \times 4$, ex 13 sublatum, relinquit 1, quod residuum deletis 13 superscribo: Tum deletum etiam eò loci divisorem, in proximum transfero; &, cum 3 in 18 contineantur sexies, in quotiente post 4 subjungo 6, & divisoris sextuplum $18 = 3 \times 6$, ex suprascrip-

1
3)138240(46080
333333

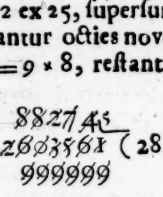
tis

tis 18 sublátum, nihil relinquit: Et, deletis tam 3 quam 18, divisorem in loco sequente sub 2 colloco: verum cum 3 in 2 ne semel contineantur, scriptâ in quotiente ciphra 0, divisorem (istic deletum) in locum adhuc proximum promoveo, sub figura 4: Tum, quia 3 in 24 (figuris suprascriptis) continentur octies, posito in quotiente 8, divisoris octuplum $24 = 3 \times 8$, ex 24 sublatum, nihil relinquit: Deletis igitur 3 & 24, & posito sub 0 divisore 3, invenio 3 in 0 nullies contineri, adeoq; & hic in quotiente ciphram colloco; & peracta est tota divisio. Adeoq; reperio numeri 138240 trientem esse 46080, sive toties in eo numero dividendo contineri divisorem 3.

Residui notatio.

Siquid autem, divisore quoties fieri potest sublato, aliquid Dividendi adhuc restiterit, (quod ipso divisore semper minus esse necesse est, secus enim posset divisor saltem semel adhuc auferri,) post Quotientis numeros integros jam inventos adjungenda erit fractio, cujus numerator erit residuum illud, denominator verò ipse Divisor, (vel saltem alia fractio, quæ tantundem valebit, minoribus numeris scribenda,) ut habeatur Quotiens accuratus.

Ita si numerus 2603561 dividatur per 9. Cum 9 in 26 bis contineantur, scripto in quotiente numero 2, & sublatis $18 = 9 + 2$ ex 26, supersunt 8. Tum, promoto divisore, cum in 80 contineantur 9 octies, scripto in quotiente 8, & sublatis $72 = 9 \times 8$ ex 80 restant superius scribenda 8. Tum, promoto adhuc divisore, cum 9 in 83 contineantur novies, scripto in quotiente 9, & sublatis $81 = 9 \times 9$ ex 83 restant 2. Tum, promoto divisore, cum in 25 reperiantur 9 bis, scripto in quotiente 2, & sublato divisoris duplo $18 = 9 \times 2$ ex 25, supersunt 7. Cumque, promoto divisore, in 76 reperiantur octies novem, posito in quotiente 8, & ex 76 sublatis $72 = 9 \times 8$, restant 4. Deniq; cum, promoto divisore, 9 in 41 reperiantur quater, posito in quotiente 4, & subducto divisoris quadruplo $36 = 9 \times 4$, ex 41, restabunt superius notanda 5, & peracta est divisio. Cum vero divisione peracta supersint adhuc 5, post quotientis numeros integros 289284 subjungo fractionem $\frac{5}{9}$; adeoq; liquet, divisо numero 2603561 per 9, quotientem accuratum esse $289284\frac{5}{9}$; sive numeri



2603561

2603561 partem nonam esse $289284\frac{5}{9}$; vel numerum 2603561, continere numerum 9, vicibus 289284, atq; insuper $\frac{5}{9}$ (quinq; nonas partes) ejusdem numeri 9: ipsum autem numerum $289284\frac{5}{9}$ (quotientem) præcise 9 vicibus contineri in 2603561 numero dividendo. Et similiter in aliis.

Alia operationis forma.

Quod autem, in exsemplis præmissis, singularum subductionum residua deletis Dividendi notis superposuerim, ipsaq; subducta multipla nusquam scripserim; id majoris expeditionis causa factum est. Si cui vero libet omnia explicite contueri, poterit ille ad hanc formam præcedentem operationem peragere cum divisor 9 in suprascriptis 26, bis contineatur, posito in quotiente 2, & subscripto divisori 9 ipsius duplo 18; ex 26 subductis 18 manebunt 8, infra lineam ductam notanda: cui residuo adjungendæ dividendi figuræ adhuc intactæ (vel saltem earum quot opus est,) & promoto divisore, secunda operatio ad eandem formam instituenda, nempe cum 9 in 80 contineantur octies, posito in quotiente 8, & subscripto octuplo, 72, his ex 80 subductis manebunt, 8, ductæ lineæ subscribenda: Et sic deinceps: usq; dum tota operatione peracta, reperientur tandem restare 5. ut videre est.

Atq; hactenus de Divisionis praxi, per Divisorem simplicem (unica figura scriptum) peragendæ.

```
2603561 ( 289284 5/9
  9
 18
 803561
   9
  72
  83561
    9
   81
   2561
     9
    18
    761
      9
     72
     41
      9
     36
      5
```

Divisionis operatio per divisorem compositum.

Si Divisor compositus sit, (pluribus notis scriptus,) operationis methodus, quamquam aliquanto magis intricata, iisdem plane principiis nititur quibus præcedens. Nempe, Divisore sub tot quot opus est dividendi figuris ad sinistram proximis subscripto, ejusq; multiplo quam fieri potest maximo ex iisdem sublato, (notato interim in quotiente istius multipli denominatore

nominatore,) promovendus est Divisor in locum proximum, & sic deinceps quoties opus erit: totaq; operatio ut prius peragenda.

Exsempli gratia. Si 1290208 velim per 32 dividere. Divisorem 32, non sub Dividendi figuris 12 subscribo, quia 32 in 12 ne semel continentur, sed (omissa propterea figura prima) sub duabus sequentibus. Et quæro, quoties in 129 reperiuntur 32? vel, quo commodius illud assequar, per partes inquiro quoties in 12 reperiantur 3? quod cum quater fieri deprehendo (atq; interim, in reliquo 9, quater contineri 2,) in quotiente scribo 4, ipsiq; 32 subscribo ipsius quadruplum 128, quod ubi ex 129 subduxerim restare video 1, cui subjunctis reliquis dividendi figuris nondum tactis, reliquum adhuc video 10208. Tum divisore uno gradu promoto, cum videam 32 in 10 nullies contineri, in quotiente scribo 0, & deleto ibidem divisore, uno adhuc gradu eundem promoveo (immutatis manentibus dividendi figuris 10208, cum inde nihil auferatur,) & quæro, quoties 32 in 102? sive, quoties 3 in 10? reperiuntur autem 3 in 10 ter, & quod superest 1 cum sequenti nota 2 facit 12 unde non dubito quin 2 (reliqua divisoris figura) possit saltem ter auferri; adeoq; in quotiente scribo 3, & divisori 32 ipsius triplum 96: quod ubi ex suprapositis 102 subduxerim video restare 6, eiq; figuræ (alias adhuc intactas) 08 subjungo. Tum, promoto divisore, quæro quoties 32 in 60, vel (per partes) quoties 3 in 6, & invenio bis contineri 3 in 6; at interim cum videam nihil superesse unde reliquam figuram 2 bis auferam, scio totum 32 non nisi semel ex 60 auferri posse; ideoq; in quotiente scribo 1. ipsumq; divisorem 32 ex 60 semel aufero, & restant 28, quibus 8 (figuram intactam) adjungo: Et, promoto divisore, cum 32 reperiam in 288 novies contineri, scripto in quotiente 9, & divisori, subscripto ipsius noncuplo 288 = 32 × 9

```
1290208 (40319
 32
128
 10208
 32
  32
  96
   608
   32
   288
    32
   288
    00
```

×9; ubi hoc ex 288 subduxerim invenio nihil restare; adeoq;, cum nullæ adhuc supersint Dividendi figuræ, totam operationem peractam esse liquet, & quotientem repertũ esse 40319 præcisè.

Ita si 6639642 per 978 dividatur. Operatione ut in præcedentibus peracta, reperietur quotiens 6789. ut videre est.

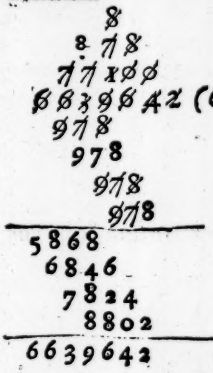
Vel etiam, si libet, residua superne notari possunt; atq; interim singula divisoris multipla seorsim suis locis scribi, ipsis Divisoris repetitionibus non intermista: ad hanc quæ videtur formam.

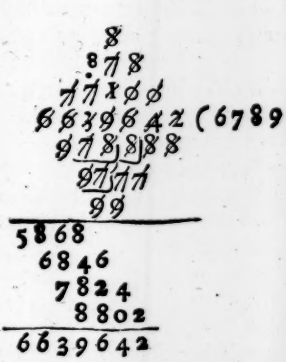
```
6639642 (6789
 978
5868
-----
 7716
  978
 6846
-----
 8704
  978
 7824
-----
  8802
   978
  8802
-----
    00
```

Alia operationis forma.

```
      8
    8 7 8
   7 7 1 0 0
  6 6 3 9 6 4 2 (6789
   9 7 8
    978
     9 7 8
      9 7 8
-----------
 5868
  6846
   7824
    8802
-----------
 6639642
```

```
      8
    8 7 8
   7 7 1 0 0
  6 6 3 9 6 4 2 (6789
   9 7 8 8 8 8
    9 7 7 7
     9 9
-----------
 5868
  6846
   7824
    8802
-----------
 6639642
```





Ubi, cum (propter quotientis primam figuram 6) divisoris (978) sextuplum 5868 ex Dividendi numeris supra positis 6639 subductum sit, residuum superius notatum erit 771. Tum ex 7716 subducto divisoris septuplo 6846, residuum (superne notatum) erit 870. Tum ex 8704 subducto divisoris octuplo 7824, residuum erit 8802. Atq; hinc deniq; subducto divisoris noncuplo, 8802, nihil restabit. Adeoq; perfecta est tota divisionis operatio, & quotiens est 6789. Si autem, per-

acta operatione, placeat omnia hæc multipla in unam summam colligere, (simul cum finali residuo siquod fuerit,) erit ea numero dividendo æqualis: nempe, omnia ablata (simul cum residuo siquod fuerit,) simul addita, restituent numerum propositum. ut patet.

Sicui vero nimis operosum videbitur, tam singula divisoris multipla, quam ipsum divisorem toties repetitum scribere: poterit ille horum utrumvis omittere.

Alia operationis forma.

Nempe, Si singula divisoris multipla subducenda scribere supervacaneum esse duxerit; poterit ille duas illas operationes, multiplicationem scilicet & subductionem junctim perficere, (quod & pleriq; Arithmeticæ practicæ magistri faciendum docent,) ad hanc formam.

Postquam, Dividendo & divisore recte collocatis, inveniatur prima Quotientis figura 6; ducatur numerus ille sigillatim in omnes Divisoris figuras, à sinistra inchoando, numeriq; facti protinus ex Dividendo auferantur, notatis supernè residuis. Sic sexies 9 sunt 54; ablatis 5 ex 6 restat 1, & 41 em ex 6 restant 2: deinde sexies 7 sunt 42; ablatis 4 ex 12 restant 8, & 2 ex 3 restat 1: deinde sexies 8 sunt 48, ablatis igitur 4 ex 81 restant 77, & 8 ex 9 restat 1.

```
  7
  8 7
 1 2 1 1
6 6 3 9 6 4 2 (6
  9 7 8
```

Tum promoveatur Divisor uno gradu dextrorsum, & inventa secunda figura Quotientis 7, ducatur ea ut prius in divisorem, & fiat subductio. Nempe septies 9 sunt 63; ablatis 6 ex 7 restat 1, & 3 ex 7 restant 4: deinde septies 7 sunt 49; sublatis 4 ex 4 restat 0, & 9 ex 101 restant 92: deinde septies 8 sunt 56; sublatis 5 ex 92 restant 87, & 6 ex 6 restat 0.

```
    8
    9
  1 0
  7 4 7
  8 7 2
1 2 1 1 0
6 6 3 9 6 4 2 (6 7
  9 7 8 8
    9 7
```

Tertio, promoveatur Divisor uno adhuc gradu, & inventa Quoti-

Quotientis figura tertia 8, fiat multiplicatio & subductio ut prius. Nempe octies 9 sunt 72; ablatis 7 ex 8 restat 1, & 2 ex 7 restant 5; deinde octies 7 sunt 56, sublatis 5 ex 5 restat 0, & 6 ex 100 restant 94; item octies octo sunt 64, subductis 6 ex 94 restant 88, & 4 ex 4 restat 0:

```
   18
   89
   90
  105
  7478
  8724
 12110
 66396 42 (678
  97888
   977
    9
```

Deniq;, promoveatur adhuc uno gradu in locum infimum, & invēta figura Quotientis ultima 9, fiat multiplicatio & subductio ut prius. Nempe novies 9 sunt 81; quibus ablatis ex 88 restant 7: deinde novies 7 sunt 63; sublatis 6 ex 7 restat 1, & 3 ex 10 restat 7; item novies 8 sunt 72; quibus ablatis ex 72 nihil restat. Adeoq;, tota jam divisione perfecta, habetur quotiens 6789, præcise. Singulas autem operationes seorsim posui, ut eo distinctius appareat quid quaq; operatione accedat. Estq; hæc methodus dividendi apud plerosq; quos vidi Arithmeticos maxime usitata.

```
   18
   89
   901
  1057
  7478
  87247
 121100
 66396 42 (6789
  978888
   9777
    99
```

At mallem ego, operatione parum variatâ, tam multiplicationes quam subductiones particulares, a dextra inchoare, (quamvis divisoris promotionem a sinistra dextrorsum fieri necesse sit;) hoc modo. *Operationis forma alia.*

Scriptis ut prius Dividendo & Divisore, primaq; figura quotientis reperta, 6; ducatur hæc in divisoris singulas figuras a dextra inchoādo. Sic sexies 8 sunt 48, quibus subductis ex 49 (mutuatis scil. 4 ex gradu proximo superiori, figuræ 9 præponendis,) restat 1, & 4 transferenda: Tum sexies 7 sunt 42, quibus additis 4 (nuper mutuatis) fiunt 46; quibus demptis ex 53 (mutuatis scil. 5.) restant 7, & 5 transferenda sunt:

```
   771
 66396 42 (6
   978
```

Tum sexies 9 sunt 54, quæ cum 5 nuper mutuatis fiunt 59, quibus ex 66 subductis restant 7. & perfecta est prima operatio.

Secundò, promoto Divisore, quæratur secunda Quotientis figura 7; fiatq; multiplicatio & subductio ut prius. Nempe septies 8 sunt 56, quibus sublatis ex 56 (mutuatis scil. 5) restat 0, & transferenda 5: septies 7 sunt 49, quibus additis 5 fiunt 54, quibus subductis ex 61 (mutuatis 6) restant 7, & transmittenda 6: septies 9 sunt 63, & additis 6 fiunt 69, quibus subductis ex 77 restant 8.

Tertiò, promoto Divisore, & inventa quotientis figura tertia 8, procedendum ut prius. Nempe octies 8 sunt 64, quibus subductis ex 64 (mutuatis 6,) restat 0, & transmittenda 6: octies 7 sunt 56, & 6 addita constituunt 62, quibus subductis ex 70 (mutuando nempe 7) restant 8, & transmittenda 7; octies 9 sunt 72, quibus additis 7 fiunt 79, eisq; ex 87 subductis restant 8.

Deniq;, promoto Divisore, & reperta quotientis figura ultima 9, fiat multiplicatio & subductio ut prius. Nempe novies 8 sunt 72, quibus ductis ex 72 restat 0 & transmittenda 7: novies 7 sunt 63, & 7 additis fiunt 70, quibus 70 ductis, restat 0 & transmittenda 7: item novies 9 sunt 81, quibus additis 7 fiunt 88, eisq; ex 88 subductis nihil manet. Totaq; divisio est absoluta.

Atq; hæc quidem methodus est eâ quæ præcessit magis expedita, & quæ tam memoriam quam chartam pauciſſimis figuris onerat, minus item errori obnoxia, & siquis forte aliquando error inciderit, facilius detegitur & emendatur; cum enim eodem

dem manente divisoris situ in singulis locis non nisi una fiat subductio, facile erit animadvertere quid in quaq; operatione accedat, & quamlibet operationem seorsim examinare si quid erroris suspectum sit; quod quidem methodo præcedente vix aut ne vix fiet.

De ciphris finalibus.

Siquando (vel in hac vel in alia quavis operationis forma) Divisor Ciphris (una vel pluribus) terminetur; ne fiat inanis tot ciphrarum repetitio, rejectis ciphris illis & simul abscissis totidem ex ultimis dividendi figuris, in numeris reliquis fiat divisio: Ita tamen, ut peracto opere, restituantur tam divisori ciphræ abjectæ quam dividendi residuo abscissæ figuræ, ut in exsemplo apposito.

```
                 1
                1 3 4
                7 4 5 1
20300) 6 8 3 4 9 2 7 (336 14127/20300
       2 0 3 3 3 0 0
         2 0 0
           2
```

Operationis forma alia.

Si deniq; mallet quis Divisoris multipla quam ipsum Divisorem toties describere; quod fortasse (præsertim in Divisionibus majoribus peragendis) non erit incommodum: poterit quidem illud fieri ad hanc formam.

```
        8                        8                  978 | 1
       878                      878                 1956 | 2
      77100                    77100                2934 | 3
978) 6639642 (6789 —  978) 6639642 (6789          3912 | 4
     0000                     5868642              4890 | 5
     5868                      68420               5868 | 6
      6846                      788                6846 | 7
       7824                      8                 7824 | 8
        8802                  6639642              8802 | 9
    6939642
```

Cum enim omnino perinde sit sive Divisorem suo loco sub Dividendi figuris actu scribamus, sive quasi scriptum esset supponamus; licebit ipsum semel tantum loco commodo describere, ejusq; deinceps repetitionem omittere; & (inventis successive Quotientis figuris) debita multipla suis locis describe-

re,

re, & descripta subducere. Sic verbi gratia, divisoris sextuplum 5868 ex 6639 subductum relinquit (superne scribendum) 771. Tum divisoris septuplum 6846 ex 7716 subductum, relinquit 870. Et divisoris octuplum 7824 ex 8704 subductum relinquit 880. Deniq; divisoris noncuplum 8802 ex 8802 subductum nihil relinquit.

Atq; in hac operationis forma, præterquam quod parum memoriæ committitur, hæc saltem habet commoda; nempe, si quando eadem figura in Quotiente sæpius occurrere contingit, non opus erit toties multiplicationem exercere, sed multiplum prius inventum tot quot opus erit locis repetere; quod quidem in majoribus divisionibus non parvum aliquod erit compendium. Item, ubi peracta est operatio, licet omnia isthæc multipla (cum residuo siquod sit) simul addere, quo constet an subductiones recte fuerint peractæ (nempe ex consensu vel dissensu summæ sic inventæ atq; propositi numeri dividendi;) atq; multiplicationem quamlibet, siquid suspectum sit erroris, sigillatim examinare.

Si sit interim metuendum, nequa confusio oriatur ubi Divisor non sit sua sede conspiciendus; potest isti malo satis caveri, totidem vel punctis vel circellis (si opus sit) divisoris loco collocatis quot ipse continet figuras: puta (in exsemplo præmisso) ponantur primùm tres circelli sub dividendi figuris 639; & deinde (cum in proximum locum promovendus sit divisor) deleto eorum primo quartus apponatur, ut jam sub figuris 396 tres conspiciantur, & sic deinceps in singulis divisoris promotionibus uno deleto alius subjungatur.

Deniq;, utile nonnunquam erit, præsertim in Divisionibus grandioribus, (nam in minoribus vix erit operæ pretium) ante inchoatam Divisionis operationem singula Divisoris multipla (decuplo minora) simul descripta habere, (ut in exsemplo præmisso exhibuimus,) unde ut opus erit in Divisionis operationem transferri possint; & quidem in quotientis figuris promptè inveniendis auxilio erit, statim enim sine aliis tentamentis inde patebit quod multiplum auferri poterit; ut in exsemplo præmisso, statim video numerum 6639, divisoris (978) sextuplo majorem esse & septuplo minorem; adeoq; primam Quotientis figuram 6. Et similiter in reliquis.

Atq; hactenus præcipuas Divisionis exercendæ formulas exhibui

hibui, ut ex omnibus eam ſibi quilibet ſeligat quæ ſibi magis accommoda videbitur.

Diviſionis operatio in partibus decimalibus.

Si partes Decimales numeris integris annexæ ſint, (ſive in Dividendo, ſive in Diviſore, ſive etiam in utroq;,) eadem omnino methodus obſervanda eſt ac ſi eſſent numeri plane integri: modò illud tantum curetur, ut operatione peracta tot ſint partium decimalium loci in numero Dividendo, quot in diviſore ſimul atq; Quotiente. Adeoq; ---

1° Si partium decimalium loci (ſive loci infra unitatem deſcendentes) totidem ſint in Dividendo quot in Diviſore, erit in Quotiente nullus. ut 9|8) 66396|42 (6789.

2° Si nullus ſit in Diviſore, tot erunt in Quotiente quot in Dividendo. ut 978) 66396|42 (67|89.

3° Si pauciores in Diviſore quam in Dividendo, tot erunt in Quotiente quot deſiderantur in Diviſore. ut 97 8) 66396|42 (678|9.

4° Si plures fuerint in Diviſore quam in Dividendo, tot ſaltem addendæ ſunt ciphræ numero dividendo (poſt lineam ſeparatricem) ante operationem peractam quot opus eſt ut ipſius loci deſcendentes tot ſint quot ſunt in Diviſore; (vel ſaltem quotienti invento tot ſubjungendæ ſunt ciphræ ſine linea ſeparatrice, aut ipſa linea ſeparatrix in quotiente, ſiqua ſit, tot locis ad dextram promovebitur;) ut 0|978) 66396|420. (67890. vel 978) 6639642|0 (67890.

5° Si poſt peractam aliquam diviſionem (ut ſupra) ſuperfuerit aliquod reſiduum; licebit (additis Dividendo, poſt lineam ſeparatricem, quot opus eſt ciphris) diviſionem ulterius continuare; unde, pro fractionibus ordinariis, provenient partes decimales, lineæ ſeparatrici (in quotiente) poſtponendis. Sic pro 978) 6640131 (6789 $\frac{489}{978}$ prodibit 978) 6640131|0 (6789 5. Et pro 978) 6639805 (6789 $\frac{163}{978}$ prodibit 978) 6639805|000 (6789|166 &c.

Et quidem partes decimales |5 tantundem valent atq; $\frac{489}{978}$ aut $\frac{1}{2}$; & partes decimales 16|65 &c. tantundem valent atq; $\frac{163}{978}$, vel $\frac{1}{6}$. Et ſimiliter in aliis.

Ratio hujuſmodi proceſſuum in partibus decimalibus, per ſe ſatis patet, modo advertatur lineæ ſeparatricis retractionem aut promotionem (ſingulis gradibus) numerum decuplo vel

augere vel diminuere. Adeo ut non sit necesse diutius hic immorari.

De Indice Quotientis.

Hanc saltem universalem (ex Oughtredo) regulam adjicere liceat, (quæ in numeris Divisione *Ortis* suos assignando locos dirigat,) *Index cujusq; particularis figuræ Quotientis invenitur tollendo indicem figuræ dividentis ex indice figuræ divisæ.* Quæ quidem ex iis quæ de Indice numeri Facti in Multiplicatione dicta sunt, satis intelligi poterit, ut prolixa expositione non sit opus.

Divisio speciosa, simul cum speciosa Multiplicatione, mox tradetur.

CAP. XX.

De Multiplicatione & Divisione Algebrica & Speciosa: Et quantitatum ex pluribus denominationibus constantium: Earumq; ad unam aliquam reductione.

Multiplicatio & Divisio simplicium quantitatum.

Sicut Additionis signum + fecimus, & Subductionis — : Ita Multiplicationis signum esto ×; Divisionis autem, lineola inter quantitatem Dividendam & Dividentem (ipsi subjectam) scripta. Adeoq; significat V + A quantitati V quantitatem A adjectam esse: V — A quantitati V quantitatem A ablatam esse: V × A quantitatem V in quantitatem A ductam: & $\frac{V}{A}$ quantitatem V quantitate A Divisam, sive ad quantitatem A applicatam.

Nota tamen Multiplicationis signum ×, (præsertim ubi species quælibet unicâ notâ designatur) sæpissimè omitti: (cum illud nempe sine ullo incommodo fieri possit:) Sic verbi gratia AB pro A×B, & ABC pro A×B×C, & 2ABC pro 2×A×B×C.

Monendum item est (ut de Additione & Subductione, quipde operationibus oppositis, sic etiam) de Multiplicatione & Divisione: Nempe *si plures occurrant vel multiplicationes, vel divisiones, vel partim hæ partim illæ, continuæ faciendæ, perinde est quo ordine perfici-*

perficiantur, modò omnes continue fiant. Adeoq; $\frac{A \times B}{C} = \frac{B \times A}{C}$ $= \frac{A}{C} \times B = B \times \frac{A}{C} = \frac{B}{C} \times A = A \times \frac{B}{C}$. Item $\frac{6 \times 4}{2}$ $= \frac{4 \times 6}{2} = \frac{6}{2} \times 4 = 4 \times \frac{6}{2} = \frac{4}{2} \times 6 = 6 \times \frac{4}{2} = 12$. Et ſic in aliis. Eadem nempe de causâ quâ ſupra oſtendi $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Dimenſionum quantitatis productæ vel Ortæ numerus.

Cum quantitas aliqua componi ſupponitur ex duarum vel plurium quantitatum continua multiplicatione; dicitur ea tot dimenſionum eſſe quot ſunt quantitates illæ componentes. Puta $A \times A$ vel $A \times B$ quantitates ſunt duarum dimenſionum; $A \times A \times A$, vel $A \times A \times B$ vel $A \times B \times C$, ſunt quantitates trium dimenſionum.

Si tamen ejuſmodi quantitat' per quantitatem aliquam dividatur; tot auferri ſupponuntur dimenſiones quot habet quantitas dividens. Sic $\frac{A \times B}{C}$ vel $\frac{A \times A \times B}{C \times C}$ ſunt quantitates unius dimenſionis; $\frac{A \times A \times B}{C}$ vel $\frac{A \times B \times D}{C}$ ſunt quantitates duarum dimenſionum.

Et quidem ſi eadem quantitas ſit ſuperne multiplicator, & inferne diviſor, ſe mutuo perimunt; (puta $\frac{AB}{A} = B$:) quod enim multiplicando acquiritur, id æquali diviſione deſtruitur. Sicut, & $B + A - A = B$, ubi quod acquiritur Additione, ſubductione tollitur.

Ubi autem ſpecies aliquæ ducuntur in figuras numerarias, non ſolemus eâ multiplicatione numerum dimenſionum auctum reputare, (ſaltem niſi cum ipſæ ſpecies numeros ſignificant:) adeoq; $2A$ vel $2 \times A$ aut $A \times 2$ unius eſt dimenſionis, & $2AB$ vel $2 \times A \times B$ duarum. Quia nempe 2 hic loci non pro aliâ ejuſdem generis dimenſione habetur, ſed ſimpliciter pro rationis Duplæ indice; & tantundem valent atq; $\frac{2}{1}A$, $\frac{2}{1}AB$. Et in aliis ſimiliter. Eſtq; $\frac{2}{1}A$, alia homogenea quan-

titas quæ se habet ad A, ut 2 ad 1; sive quæ toties contineat A quoties 2 continet 1.

Quæ quidem ratio etiam aliis characteribus seu symbolis, non minus exprimi poterit quam ipsis figuris numeralibus; ut $\frac{V}{A}$ B, quo innuitur alia quantitas (ipsi B homogenea) quæ ipsam B toties contineat quoties V continet A; vel quæ ad B eandem habeat rationem quam habet V ad A.

Et quidem ubi species aliqua per aliam totidem præcisè dimensionum dividitur, quantitas nullius dimensionis oritur, sed quæ potius pro *Rationis* indicio habenda est. Adeoq; $\frac{A \times B}{C \times D}$ nil aliud indicat quàm eam rationem quam habet quantitas A * B ad quantitatem homogeneam C×D. Nam dividendo quantitatem quamlibet per aliam homogeneam, invenitur Ratio illius ad hanc: uti ex Divisionis natura superius explicata satis patet.

Si verò contingat quantitatis Dividentis dimensiones plures esse quam Divisæ, innuitur quantitas dimensionum pauciorum quam nullius. (Quod eadem ratione supponendum erit, quâ supponimus quantitates negativas seu ablatitias, quæ sint minores quam nihil.) Sic $\frac{A}{B \times C}$, $\frac{A}{B \times C \times D}$, &c. erunt quantitates dimensionum -1, -2. &c. Nam $1-2 = -1$. $1-3 = -2$. &c. Quibus respondent *Gradus* (quos dixi) Descendentes.

Potestatum ejusdem quantitatis indices & characteres.

Siquando quantitas aliqua in seipsam aliquoties multiplicatur; puta, A, A×A, A×A×A, A×A×A×A, &c. ipsa quantitas A Radix seu Latus dici solet, A×A vel AA, quadratum, A×A×A vel AAA Cubus, A×A×A×A vel AAAA Biquadratum ejusdem quantitatis A. Vel ipsius quantitatis A potestas prima, secunda, tertia, quarta, &c. Ita nempe ut cujusq; potestatis index æqualis sit numero dimensionum.

Solent autem Radix, Quadratum, Cubus, Biquadratum, (reliquæq; deinceps potestates,) sic notari, ♃, ♄, ♂, ♃♃, &c. (ut olim,) vel R, Q, C, QQ, &c. vel etiam A, Aq, Ac, Aqq, &c. vel a, a^2, a^3, a^4, &c. (ut fusius diximus Cap. XI.) nempe compendii causa pro a, aa, aaa, $aaaa$, &c. Et propterea

terea (notas illas in has, ubi opus erit, resolvendo) $a^2 = aa$. $a^3 = a^2 a = aaa$. $a^4 = a^3 a = a^2 a^2 = a a^3 = aaaa$. &c. Item $Aq = AA$. $Ac = AqA = AAq = AAA$. $Aqq = AcA = AqAq = AAc = AAAA$. &c. Sic $2Aq \times 3Ac$ est $2AA \times 3AAA$. & ♃ × ♈ = ♂ seu ♃ × ♃ in ♃ × ♃ × ♃. Et contra A) Aqq (Ac, hoc est A) AAAA (AAA. ♃) ♂ (♈, hoc est ♃ × ♃) ♃ × ♃ × ♃ × ♃ × ♃ (♃ × ♃ × ♃. Sic a^3) a^5 (a^2 hoc est *aaa*) *aaaaa* (*aa*. Et sic in aliis.

Quod autem attinet ad signa + & −, in multiplicationis Producto, vel divisionis Quotiente, ponenda; hæc observanda est Regula. *De signis + & −.*

In Multiplicatione & Divisione, si datorum signa sint similia, Producti vel Orti signum erit + (affirmativum:) sin dissimilia, − (negativum.) Nempe + per +, vel − per −, dat +, (sive multiplicando sive dividendo;) & + per −, vel − per +, dat −.

Vel etiam (quod tantundem valet) *Si multiplicatoris vel divisoris signum sit +, Multiplicandi vel Dividendi signum retinetur; sin −, mutatur.* Nempe + per + dat +, & − per + dat −; item + per − dat −, & − per − dat +.

Ratio sive demonstratio hujus, ab ipsa Multiplicationis & Divisionis natura petenda est. (Quales ego malim, ubi fieri potest, afferre, quam demonstrationes a posteriori.) Quam igitur in singulis casibus ostendam.

Multiplicatione supponitur quantitas Multiplicanda toties apponi quoties multiplicator indicat, ut ex supra dictis cap. 18. patet. Adeoq; qui quantitatem quamlibet (sive positivam sive ablatitiam) multiplicat per 3 vel + 3, ille eandem quantitatem (signis immutatis) ter ponit; qui per 2 vel + 2, bis ponit; qui per 1 vel + 1, semel tantum; qui vero per 0, ne semel quidem, sed nullies ponit, (adeoq; quantitas quælibet, per 0 multiplicata, evanescit:) qui autem per − 1, − 2, − 3, &c. multiplicat, tot vicibus pauciùs quam nullies ponit, (cum − 1, − 2, − 3, &c. sint minus quam nihil, seu paucius quam nullum,) hoc est revera toties tollit, (per ea quæ diximus Cap. XV. de signis + & − contrario sensu exponendis;) qui vero tollit, ille tantundem apponit mutato signo, (ut ex legibus Subductionis Cap. XV. patet;) Et propterea qui multiplicat

per 1,2,3, &c. vel alium quemvis mulitiplicatorem affirmativum, is quantitatem multiplicandam toties ponit servato signo; qui vero multiplicat per -1, -2, -3, &c. aut alium quemvis multiplicatorem negativum, ille quantitatem multiplicandam toties vel tollit vel (quod tantundē est) sub contrario signo ponit. Quod erat ostendendum. Adeoq; $A \times 2 = 2A$, $A \times -2 = -2A$, $-A \times 2 = -2A$, $-A \times -2 = +2A$ (nempe $-A$ bis tollitur:) Sic $A \times B = BA$, $A \times -B = -BA$, $-A \times B = -BA$, $-A \times -B = +BA$ (vel $+AB$ quod tantundem est.) Et sic in reliquis.

In Divisione, quæritur quoties divisor, seu quantitas dividens, in quantitate Dividenda continetur; vel (quod tantundem est) in quam quantitatem ducendus est divisor ut fiat æqualis quantitati Dividendæ; ut patet ex iis quæ de Divisione tradita sunt Cap. XI. Et propterea, ubi quantitatis Dividendæ signum est $+$ (affirmativum,) signum Quotientis idem erit atq; divisoris; sin quantitatis Dividendæ signum sit $-$ (negativum,) signum Quotientis erit signo divisoris contrarium: cum enim divisoris in quotientem ducti productum futurum est æquale quantitati dividendæ; non potest illud affirmatum esse, nisi factores signa habeant similia; nec negativum, nisi dissimilia: ut ex modo probatis constat. Adeoq; si dividatur $+$ per $+$, vel $-$ per $-$, quotiens erit $+$: sin $+$ per $-$, aut $-$ per $+$, quotiens erit $-$. Quod erat ostendendum. Adeoq; $2)V(\frac{V}{2}$, $-2)V(-\frac{V}{2}, 2)-V(-\frac{V}{2}, -2)-V(+\frac{V}{2}$. Item $A)V(\frac{V}{A}, -A)V(-\frac{V}{A}, A)-V(-\frac{V}{A}, -A)-V(+\frac{V}{A}$. Sic $A)VA(V. -B)BCD(-CD. -C)BCD(-BD.$ $NA)NV(\frac{V}{A}. A)Aq(A. -A)-AcB(AqB.$ $Aq)-VA(-\frac{V}{A}. a)abc(bc. ab)a^2bc(ac.2\mathfrak{z})\mathfrak{c}(\frac{1}{2}\mathfrak{z}: 3\mathfrak{z})-6\mathfrak{c}(2\mathfrak{z}$. Et pariter in aliis.

Atq; hactenus de quantitatum simplicium Multiplicatione & Divisione dictum est; sequitur ut de Conjunctis agam; eas intelligo quæ ex variis membris constant per signa $+$ & $-$ colligata.

Multiplicatio quantitatum conjunctarum

Quando quantitates invicem multiplicandæ ex variis membris

bris conſtant, ſingula membra multiplicantis in ſingula membra multiplicandæ (ſignis ut modo dictum eſt obſervatis) ducenda ſunt, Facta deinde in unum aggregatum colligenda. Sive autem a dextra, ſive a ſiniſtra incipiamus, perinde eſt. Exſempla ſequuntur.

Exſempla Multiplicationis.

$$\begin{array}{r} A+E=Z \\ B \\ \hline BA+BE=BZ \end{array} \qquad \begin{array}{r} A-E=X \\ B \\ \hline BA-B=BX \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A+E-I=L \\ -C \\ \hline -CA-CE+CI=-CL \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2B+3C \\ A-2D \\ \hline 2AB+3AC-4BD-6CD \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A+E=Z \\ A+E=Z \\ \hline AA+AE \\ +AE+EE \\ \hline AA+2AE+EE=ZZ \\ Aq+2AE+Eq=Zq \end{array} \qquad \begin{array}{r} A-E=X \\ A-E=X \\ \hline -AE+Eq \\ Aq-AE \\ \hline Aq-2AE+Eq=Xq \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A+E=Z \\ A-E=X \\ \hline Aq+AE \\ -AE+Eq \\ \hline Aq-Eq=ZX \end{array} \qquad \begin{array}{r} Z-E=A \\ E \\ \hline ZE-Eq=AE \end{array}$$

$$\begin{array}{r} Z-A=E \\ A \\ \hline ZA-Aq=AE \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +2z^3+3z^2-4 \\ +1z^2-1z-3 \\ \hline -6z^3-9z^2+12z \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2z^2-3z^3+4z^2 \\ \hline 2z^3z^2+3z^2-4z^3 \end{array}$$

$$2z^3z^2+1z^2-13z^3-5z^2+12$$

$$\begin{array}{r} 3C - 1Q + 3R - 2 \\ \hline -2Q - 1R + 6 \\ \hline +18C - 6Q + 18R - 12 \\ -3QQ + 1C - 3Q + 2R \\ \hline -6QC + 2QQ - 6C + 4Q \\ \hline -6QC - 1QQ + 13C - 5Q + 20R - 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} BP + PC \\ \hline AP \\ \hline AP \times BP + AP \times PC \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2Aq + Bq - 3A + 2 \\ \hline -Cq + 2B \\ \hline -2CqAq - CqBq + 3CqA - 2Cq \\ +2BAq + 2Bc - 6BA + 4B \end{array}$$

$$-2Cq \left\{ \begin{array}{l} Aq \\ +2B \end{array} \right. \quad -Cq \left\{ \begin{array}{l} Bq \\ +2B \end{array} \right. \quad +3Cq \left\{ \begin{array}{l} A \\ -6B \end{array} \right. \quad -2Cq + 4B$$

$$\begin{array}{r} 2a^2 + 3ba - bc \\ \hline 3a^2 - 2ba - c^2 \\ \hline 6a^4 + 9ba^3 - 3bca^2 \\ -4ba^3 - 6b^2a^2 + 2b^2ca \\ -2c^2a^2 - 3bc^2a + bc^3 \end{array}$$

$$6a^4 + 5ba^3 \left\{ \begin{array}{l} -3bc \\ -6b^2 \\ -2c^2 \end{array} \right\} a^2 \left\{ \begin{array}{l} +2b^2c \\ -3bc^2 \end{array} \right\} a + bc^3$$

Divisio quantitatum conjunctarum.

In dividendis quantitatibus conjunctis, si saltem Divisor sit quantitas simplex, vix quicquam peculiaris difficultatis est præter simplicis divisionis repetitionem; adeoq; quotientis per partes inventionem. Et quidem parum refert an a dextra an a sinistra incipiamus.

Exempli gratia. Si quantitas $DC - 6BC + 8Cq$, dividenda esset per $2C$; Primum quæro quænam quantitas ducta in $2C$ faciet DC, & responsum $\frac{1}{2}D$ in quotiente pono, quem quotientem in divisorem ductum ($2C \times \frac{1}{2}D = DC$) ubi ex dividendi

$$\begin{array}{r|l|l} 2C) \; DC - 6BC & +8Cq & (\frac{1}{2}D - 3B + 4C \\ \hline DC & -6BC & 8Cq \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}$$

dividendi parte prima DC subduxerim, nihil restat. Similiter cum videam 2 C ducendum esse in − 3B ut fiat − 6BC, scribo in quotiente − 3B, & multiplum (2C × 3B = 6 BC) ex 6BC subductum nihil relinquit. Deniq; cum 2C ducendum in 4C ut fiat 8Cq, posito in quotiente + 4C, & subducto multiplo (2C × 4C = 8CC = 8Cq) nihil manet. Et peracta est divisio, cujus quotiens seu quantitas orta $\frac{1}{2}$ D − 3B + 4C.

Si quid autem, divisione quantum fieri potest continuata, superfuerit, quod per divisorem propositum dividi non possit, vel etiam si ita se habeat Dividendum ut ipsius nulla pars per expositum divisorem dividi possit, (sive simplex sit, sive composita, quantitas dividenda, aut etiam dividens,) residuum illud collocandum est supra divisorem in modum fractionis (sicut in divisione numerosa) & invento quotienti adjungenda. Ut in exemplorum tam præcedentium quam subsequentium aliquot videre est.

A) CD ($\frac{CD}{A}$. B) BD + Dq − 4BE (D − 4E + $\frac{Dq.}{B}$

A + B) DF ($\frac{DF.}{A+B}$

$\frac{1}{2}$ zz) 5 zzz + 4 z − 2 z + 1 ($\frac{1}{5}$ zz + 2 z − $\frac{1}{2z}$ + $\frac{1}{2zz}$

Rq) − ARc + 4 ABRq + CqFR (− AR + 4AB + $\frac{CqF}{R}$

a) 2ba − aa + $\frac{da^2}{a^2}$ (2b − a + $\frac{da}{a}$

Et quidem pleriq; sive Algebristæ sive Analystæ vix ulterius Divisionis Algebricæ aut Speciosæ traditionem prosequuntur; sed quantitatem dividendam dividenti supraponunt, interjecta lineolâ; & siquam animadvertant quantitatem quæ utramq; communiter multiplicaverit eandem utrobiq; expungunt: nec ulterius satagunt curiosam Divisionem (præsertim cum divisor ex pluribus partibus constat) exercere.

Verum, etiam cum Divisor ex pluribus partibus constiterit,

divisio nonnunquam satis feliciter exerceri potest, eadem plane premendo vestigia quibus in aliis Divisionibus inceditur. Quod (post Cartesium) animadvertit Schotenius (tam in ipsius ad Cartesii Geometriam notis, quam in speciali tractatu quem *Principia Matheseos vniversalis* appellat, Arithmeticæ Speciosæ praxin exhibente.) Sed & olim, juxta veterum Algebram, ejusmodi divisionis methodum ostendit *Thomas Diggesius*, Anglus, (vir Equestri familiâ natus, & egregius sui temporis mathematicus, uti ex ipsius editis operibus, sed plerisq; linguæ Anglicanæ, satis patet,) in libro qui inscribitur *Stratioticos*, (qui Londini prodiit Anno 1579.) ubi tam Arithmetica vulgaris, quam veterum Algebra succincte traditur.

Ea vero sic commode præstabitur. Dispositis primo tam multiplicandæ quam multiplicantis partibus, prout negotio magis accommodum videbitur; quæratur quantitas quæ saltem in unum (quod seligere placeat) Divisoris membrum ducta producat membrum aliquod quantitatis dividendæ: quæ quantitas pro quotiente (particulari) habenda est, & in divisorem totum ducenda, & Factum ex quantitate dividendâ auferendum, notato residuo. Atq; idem iterandum erit quoties opus est; ut reliqua etiam quotientis membra reperiantur.

Ita si quantitas ABF + 2CDF — 3AqB — 6ACD dividenda sit per F — 3A. Quoniam F) ABF (AB, scribo in quotiente AB; quæ ducta in divisorem F — 3A facit ABF — 3AqB,

F — 3A) ABF + 2CDF — 3AqB — 6ACD (AB + 2CD
ABF — 3AqB
+ 2CDF — 6ACD
+ 2CDF — 6ACD
00 00

quibus ex dividendo subductis, restare video 2CDF — 6ACD. Deinde, eandem operationem iterando, cum sit F) 2CDF (+2CD, subjungo quotienti priori + 2CD, & ducto 2CD in F — 3A fit 2CDF — 6ACD; quod ubi subductum est, nihil restat; totaq; operatio est absoluta.

Item si dividendum sit Ac — Ec per A — E: cum sit A) Ac (Aq. Ducendo quotientem Aq in divisorem A — E fit Ac — AqE, & facta subductione restat AqE — Ec. Tum quia

A

A) AqE (AE, quotiens AE in divisorem A − E ductus, dat

$$
\begin{array}{l}
A - E)\ Ac - Ec\ (Aq + AE + Eq \\
\quad Ac - AqE \\
\hline
\quad +AqE - Ec \\
\quad AqE - AEq \\
\hline
\quad +AEq - Ec \\
\quad +AEq - Ec \\
\hline
\quad 00 \qquad 00
\end{array}
$$

AqE − AEq; & facta subductione, restat AEq − Ec. Tandem, cum A) AEq (Eq; & Eq in A − E sit AEq − Ec; subductione facta, nihil restat; adeoq; absoluta est operatio, & quotiens Aq + AE + Eq.

Atq; idem proveniet si a dextra incipiamus. Cum enim sit $-e) -e^3 (e^2$, erit quotiens e^2, & e^2 in $a - e$, erit $ae^2 - e^3$; & facta subductione, residuum $a^3 - ae^2$. Tum $-e) -ae^2 (+ae$; & ae in $a - e$ est $a^2e - ae^2$; & subductione facta, residuum est $a^3 - a^2e$. Denique $-e) -a^2e (a^2$; & a^2 in $a - e$ est $a^3 - a^2e$; &, facta subductione, restat nihil. quotiens autem est ut prius, nisi quod qui tunc ultimus nunc primus est terminus.

$$
\begin{array}{l}
a - e)\ a^3 - e^3\ (e^2 + ae + a^2 \\
\quad ae^2 - e^3 \\
\hline
\quad a^3 - ae^2 \\
\quad a^2e - ae^2 \\
\hline
\quad a^3 - a^2e \\
\quad a^3 - a^2e \\
\hline
\quad 00 \qquad 00
\end{array}
$$

Ad eandem formam; si dividenda esset eadem quantitas $a^3 - e^3$ per $a + e$. Cum sit $a) a^3 (a^2$; & a^2 in $a + e$ sit $a^3 + a^2e$;

$$
\begin{array}{l|l}
a + e)\ a^3 - e^3\ (a^2 - ae + e^2 - \frac{2e^3}{a+e} & \\
\quad a^3 + a^2e & \\
\hline
\quad -a^2e - e^3 & (a^2 - ae - e^2 + \frac{2ae^2}{a+e} \\
\quad -a^2e - ae^2 & -ae^2 - e^3 \\
\hline
\quad +ae^2 - e^3 & -ae^2 - e^3 \\
\quad +ae^2 + e^3 & \\
\hline
\quad -2e^3 & 2ae^2
\end{array}
$$

facta subductione, residuum erit $-a^2e-e^3$. Tum cum $a)-a^2e(-ae$; & $-ae$ in $a+e$ fit $-a^2e-ae^2$; facta subductione, restabit $+ae^2-e^3$. Deniq; cum sit $a)\ ae^2(e^2$ & e^2 in $a+e$ fit ae^2+e^3; facta subductione, restabit $-2e^3$: Et quotiens est $a^2-ae+e^2-\frac{2e^3}{a+e}$

Vel, si in ultima operatione, pro quotiente $+e^2\ (=\frac{ae^2}{a})$ sumeretur quotiens $-e^2$, quia nempe $+e)\ -e^2\ (-e^2$; fuisset $-e^2$ in $a+e$, $-ae^2-e^3$; &, subductione facta, restaret $2ae^2$, adeoq; quotiens $a^2-ae-e^2+\frac{2ae^2}{a+e}$. Quod tantundem valet: Nam $+e^2-\frac{2e^3}{a+e}=-e^2+\frac{2ae^2}{a+e}$ hoc est $\frac{ae^2+e^3-2e^3}{a+e}=\frac{-ae^2-e^3+2ae^2}{a+e}$

Sed idem fere eveniret si præcedens operatio (ubi residuum est $2e^3$) ulterius continuetur; & sumatur quotiens $\frac{-2e^3}{+e}=-2e^2$: nam $-2e^3$ in $a+e$ est $-2ae^2-2e^3$; quod, ex $-2e^3$ subductum relinquit $+2ae^2$ adeoque erit $a^2-ae+e^2-2e^2+\frac{2ae^2}{a+e}$

Quod ideo moneo, ut appareat, (præsertim ubi necessario fractione terminetur) quotientem posse variis formis exhiberi (nam & multis adhuc modis variari potest.) sed qui tantundem valeant; ut quilibet eam quæ sibi magis accommodam videatur seligat; & quidem nunc hanc nunc illam ut præsens negotium postulaverit.

Posset interim eadem operatio peragi eodem plane successu, si a dextra incipiamus. Nempe $e)\ -e^3(-e^2$; & $-e^2$ in $a+e$ facit $-ae^2-e^3$; & (subductione facta) residuum a^3+ae^2. Tum $e)+ae^2(+ae$: & ae in $a+e$ facit a^2e+ae^2: ergo residuum a^2-a^2e. Deniq; $e)-a^2e(-a^2$;

&

& $-a^3$ in $a+e$ facit $-a^3-a^2e$: & residuum $2a^3$. Adeoq; quotiens $-e^2+ae-a^2+\frac{2a^3}{a+b}$.

$$
\begin{array}{l|l}
a+e)\ a^3-e^3 & (-e^2+ae-a^2+\frac{2a^3}{a+e} \\
\quad -ae^2-e^3 & \\
\quad a^3+ae^2 & \\
\quad +a^2e+ae^2 & (-e^2+ae+a^2-\frac{2a^2e}{a+e} \\
\quad a^3-a^2e & \quad a^3-a^2e \\
\quad -a^3-a^2e & \quad a^3+a^2e \\
\quad 2a^3 & \quad -2a^2e
\end{array}
$$

Vel, si in ultima operatione sumatur quotiens $+a^2\ (=\frac{a^3}{a})$ erit residuum $-2a^2e$ & quotiens $-e^2+ae+a^2-\frac{2a^2e}{a+e}$. Sed utrovis horum modorum procedatur, quotiens tantundem valet atq; prius.

Ubi autem tanta oritur varietas, judicio opus est ut quis eam seligat quotientis formam quæ præsenti negotio magis sit accommoda: vel etiam, sine alia divisione, ad instar fractionis exhibeat, $\frac{a^3-e^3}{a+e}$.

Aliud libet exsemplum ex *Diggesio* (supra citato) afferre,

$$
\begin{array}{l}
6z+8x)\ 60\text{ſ}+80zz+72\text{ꝛ}+96z\ (10\text{ꝛ}+12x \\
\qquad\qquad 60\text{ſ}+80zz \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 72\text{ꝛ}+96z \\
\qquad\qquad\qquad 72\text{ꝛ}+96z \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 00 \quad 00
\end{array}
$$

& simul huic negotio finem imponere. Nempe quantitatem $60\text{ſ}+80zz+72\text{ꝛ}+96z$ per $6z+8x$ sic dividit. Quoniam $6z)\ 60\text{ſ}\ (10\text{ꝛ}$; quotientem inventum ducit in divisorem, & productum $60\text{ſ}+80zz$ ex dividendo subducit; & restant $72\text{ꝛ}+96z$. Tum quia $6z)\ 72\text{ꝛ}\ (12x$;

 quo-

quotienti priori adjungit + 12 ♎ : & ducto hoc quotiente in divisorem, productum aufert ex dividendo & nihil restat. Adeoq; quotiens est 10 ♎ + 12 ♎.

Sed & apud Clavium in *Algebra* operationem non absimilem reperio: quem, si libet, consule.

Atq; hactenus Multiplicationem & Divisionem Algebricam & Speciosam absolvimus.

Multiplicatio quantitatis plurium denominationum.

Multiplicatio & Divisio quantitatum ex pluribus Denominationibus aggregatarum, vix aliud est quam Multiplicatio & Divisio Speciosa. In hoc saltem differunt, quod harum denominationum ad invicem ratio supponitur cognita, ut fieri possit ab una ad aliam reductio; Specierum autem seu Symbolorum (in Arithmetica Speciosa) ratio ad invicem vel ignoratur, vel ita acsi esset ignorata tractatur.

Cum autem ejusmodi quantitas plurium denominationũ per aliã unius tantũ denominationis multiplicanda occurrit, incipienda est operatio ab infima sive minima denominatione, & sic ad majores ascendendũ: transmisso semper in superiores quantum opus est. Exempli gratia. *Si quis singulis diebus expendit 14 libras 10 solidos & 8 denarios monetæ Anglicanæ, quantum expendit ille singulis septimanis?* Respondebitur, Expensam hebdomadis septuplam esse expensæ diurnæ (cum quælibet hebdomas contineat septem dies.) Adeoq; expensa diurna multiplicanda est per 7. Nempe denarii $8 \times 7 = 56$. cum autem 12 *den:* = 1 *sol:* erunt 56 *d* = 4 *s* + 8 *d.* ideoq; subscriptis 8 *d*, reservo 4 *sol:* reliquis solidis mox annumerandos. Tum solidi $10 \times 7 = 70$, quibus additis 4 huc transmissis fiunt 74: sunt autem 20 *sol:* = 1 *lib.* ergo 74 *sol:* = 3 *lib.* + 14 *sol.* Ergo subscriptis 14 *sol.* reservo 3 *libras* mox reliquis adjungendas. Deniq; libræ $14 \times 7 = 98$ quibus additis 3 fiunt 101 *libr:* quibus subscriptis, patet expensam hebdomadis esse $101^{lib.}$, $14^{sol.}$, $8^{den.}$

$14^{lib.}$	$10^{s.}$	8^{d}
		7.
3	4	
101.	14.	8

Reductio plurium denominationum ad unã.

Si autem vel Multiplicator sit numerus grandior, vel etiam ex pluribus denominationibus constet: expedit plerumq; (aut etiam aliquando prope necessarium erit,) quantitates illas plurium denominationum ad quantitates unius denominationis reducere, & tum demum multiplicationem perficere, & peracta

acta tandem multiplicatione, pristinas eas (si opus erit) denominationes restituere.

Exsempli gratia, *Si viris aliquot singulis debentur* 20 *libræ*, 13 *solidi*, & 9 *denarii*; quantum *debebitur eorum* 283 *viris?* Priusquam multiplicationem propositam aggrediar, commodum erit totam monetæ propositæ summam ad unam *denariorum* denominationem reducere: quod ipsum multiplicatione peragitur, hoc modo. Quoniam singulæ libræ (monetæ Anglicanæ) continent 20 solidos; numerum librarum expositum multiplico in 20, ut habeam numerum solidorum in illis 28 libris contentorum, quibus adjungendi 13 solidi (in quæstione expositi) ut habeatur numerus omnium solidorum; nempe 573. Deinde, quoniam singuli solidi continent 12 denarios, numerum illum solidorum (573,) multiplico in 12, ut habeam numerum denaridorũ inibi contentorum: quibus adjungendi adhuc denarii 9 (in quæstione expositi) ut habeatur numerus omnium denariorum, nempe 6885^{d}: $= 28^{lib}. 13^{s}. 9^{d}$.

Et tum demum, post hanc reductionem factam, multiplico 6885 (numerum denariorum) per multiplicatorem propositum 283; & producuntur denarii 1948455.

Deniq;, si velim intelligere quot libræ & solidi in hoc denariorum numero continentur; restituentur illæ denominationes dividendo. Nempe quia $12^{d} = 1^{s}$. denariorum numerum 1948455 divido per 12, & prodeunt solidi 162371, atq; insuper 3 denarii post peractam divisionem residui. Deinde, cum $20^{s} = 1^{lib}$: numerum solidorum 162371 divido per 20, & prodeunt libræ 8118,

$28^{lib}.\ 13^{s}\ 9^{d}$
20
560
13
573 *sol.*
12
1146
573
9
6885 *den:*
283
20655
55080
13770
1948455

$\cancel{7}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{1}\,|\,3^{d}$
12) $\cancel{1}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{5}$ ($162\overset{2}{3}71^{s}.\ 3^{d}$.
$\cancel{1}\cancel{2}\ \cancel{3}\cancel{6}$
$\cancel{7}\cancel{2}\ \cancel{8}\cancel{4}$
$\cancel{2}\cancel{4}\ \cancel{1}\cancel{2}$

atq;

atq; insuper 11 solidi residui. Adeoq; 1948455^{d} = 8118$^{lib.}$ 11$^{s.}$ 3$^{d.}$ summa quæsita.

```
      1 1s
20) 1 6 2 3 7 1 (8118lib.  11s.  3d.
    2 2 2 2 0
```

Item. Si ex scaturigine quodam singulis horis effluant aquarum pondo 34 cum unciis 7. quæritur quantum effluet 26 diebus & horis 15? Reduco primum aquæ quantitatem assignatam ad Uncias, multiplicando 34 (numerum librarum seu pondo) per 12 (quia nempe 1 *lib.* = 12 *unc.*) & adjungo uncias 7. Item tempus assignatum in horas reduco, multiplicando 26 numerum dierũ per 24 (quia 1 *dies* = 24 *hor.*)

```
  34lib.  7unc        26d.  15h.
  12                  24
  68                 104
  34                  52
   7                  15
 415 unc.           639 horæ.
```

```
   415 unc.
   639 hor.
  3735
 1245
2490
265185 unciæ.
```

```
          unc.
      2 1 1 0 9        lib.  unc.
12) 2 6 5 1 8 5   22098.   9.
    2 4
      2 4
        1 08
          96
```

& adjungo horas 15. Et, peracta reductione, multiplico 415 numerum unciarum singulis horis effluentium, per 639 numerum horarum in tempore proposito; & producitur 265185 numerus unciarum toto isto tempore effluentium. Quem deniq; unciarum numerum divido per 12 (tot enim unciæ continentur in una libra) & prodeunt 22098 *lib.* 9 *unciæ.* quæsita quantitas aquæ toto isto tempore effluentis.

Divisio quãtitatis plurium denominationum.

Quæ autem de quantitatum ex pluribus denominationibus constantium Multiplicatione dicta sunt, ea fere & de earundem Divisione intelligenda erunt. Nisi quod hic potius a denominatione suprema incipiendum sit, & quod illic superest ad proximè inferiorem reducendum.

Exsempli

Exsempli gratiâ; si defuncti facultates, 183 *lib.* 10 *sol.* 9 *den.* inter quatuor ipsius liberos sint æqualiter partiendæ; quæritur quantum cuiq; cedet. Primo dividantur libræ 183 per 4, & habebitur quotus 45, cum residuis 3 libris. Secundo, pro 3 libris, substitutis 60 solidis, (quia $1^{lib.} = 20^{sol.}$ adeoq; $3^{lib.} = 60^{sol.}$) & adjunctis 10 solidis (in quæstione expositis) habentur 70 solidi, qui per 4 divisi, quotum præbent 17, & supersunt 2. Deniq;, cum 2 *solidi* valeant 24 denarios; qui, adjunctis 9 in quæstione expositis, fiunt 33; hi per 4 divisi quotum exhibent 8; cui, propter 1 residuum (cum jam ad infimam denominationem perveniatur) adjungo fractionem $\frac{1}{4}$. Adeoq; quotiens perfectus, ex omnibus aggregatus, est $45^{lib.}\ 17^{s.}\ 8\frac{1}{4}{}^{d.}$ Cedent igitur unicuiq; ex liberis, libræ 45, solidi 17, & denarii 8 cum quadrante.

Vel etiam, reducto primum tam Dividendo quam divisore ad unam denominationem, operatio postea instituatur more superius tradito. Verbi gratia. Si quæratur, *In Annis Iulianis 24, diebus 34, horis 2, & 32 minutis; quot sint Menses periodici, seu Lunationes.* Quoniam Annus Julianus constat diebus 365 & 6 horis, hoc est (multiplicando 365 per 24 & addendo 6) horis 8766; Anni 24 constabunt horis 210384, (ut multiplicando patebit:) quibus si addantur dies 34, horæ 2, & 32 minuta; hoc est 818 horæ & 32 minuta: habentur horæ 211202 & 32 minuta: hoc est (multiplicando 211202 per 60 & addendo 32) minuta 12672152: quæ tantundem valent atq; Anni Juliani 24, $34^{d.}$, $2^{h.}$, $32'$. Deinde Mensis periodicus statuitur, dierum 29, cum 12 horis & 44 minutis, hoc est, (ut ex adjuncto calculo patet,) minutorum 42524. quod quæritur igitur, hoc est, Quoties in minutis 12672152, (tempore propositi,) continentur minuta 42524, (tempus unius mensis periodici.)

Numero igitur illo per hunc diviso, habetur Quotiens 298 præcise. Tot igitur menses periodici exposito tempore continentur. Quod erat investigandum.

```
      d   h
     365.  6.
      24
    1460
     730
       6
    8766  h.
      24
   35064
  17532
  210384   h.
     818.   32'
  211202.   32
      60.
 12672120
      32
 12672152  m.
```

```
      d   h   '
     34.  2.  32.
     24
    136
     68
      2
    818.  32'
```

```
      d   h   '
     29. 12. 44.
     24
    116
     58
     12
    708  h.
     60
   42480
     44
   42524  m.
```

```
          3401
         416730
42524) 12672152 (298
         85048
         382716
          340192
```

Atq; ad hujusmodi formas præstandæ sunt multiplicationis & divisionis operationes, ubi quantitates ex pluribus denominationibus conflantur. Ubi interim judicio opus erit, ut præparatoriæ reductiones ita instituantur ut præsenti negotio maxime sit accommodum, & res tota quam fieri potest minimo labore

labore peragatur. Quod quidem frequente exercitio ediscetur, & usu fiet familiare.

De Multiplicatione autem & Divisione notandum est universim (cui simile de Additione & Subductione superius tradidimus,) *ubi plures occurrunt numerorum Multiplicationes, vel Divisiones, vel simul utræq;, continue faciendæ, perinde est quo ordine instituantur, modo omnes continue fiant;* tantundem enim utcunq; prodibit. Exempli gratia. $2*3\times4 = 2*4\times3 = 3\times2\times4 = 3\times4\times2 = 4\times2\times3 = 4\times3\times2 = 24$. Item $ABC = ACB = BAC = BCA = CAB = CBA$. Et $\frac{4*3}{2} = \frac{3\times4}{2} = \frac{4}{2}\times 3 = \frac{4}{2}\times4 = \frac{4}{2}\times4*3 = 6$. Item $\frac{AB}{CD} = \frac{BA}{CD} = \frac{BA}{DC} = \frac{A}{C}\times\frac{B}{D} = A\times\frac{B}{CD} = \frac{A}{CB}\times B = \frac{C)\,AB}{D} = \frac{D)\,BA}{C} = D)\,\frac{AB}{C} = C)\,\frac{BA}{D} = C)\,\frac{B}{D}\times A = C)\,\frac{A\times B}{D}$: Item, *Perinde est sive per duos pluresve divisores continue fiant divisiones, sive per productum ex divisoribus illis invicem multiplicatis;* puta $C)\,\frac{B}{D} = \frac{B}{CD}$. $3)\,\frac{24}{2} = {}_{2}\frac{24}{\times3} = \frac{24}{6} = 4$. &c. At interim *Cavendum est, nequis ex Divisoribus* (aut quod ab illis fit) *alium quam divisorem multiplicet*: Si enim vel multiplicatorem vel quotum multiplicet divisor, eo ipso ex divisore fit multiplicator & totius operationis processum immutat. Nam omnino aliud aliud est $C)\,\frac{B}{D} = \frac{B}{D\times C}$ atque $\frac{B}{D}\times C = \frac{B\times C}{D}$. Sic aliud est $2)\,\frac{12}{3} = {}_{3}\frac{12}{\times2} = 2$, atq; $\frac{12}{3}\times2 = \frac{12\times2}{3} = 8$. Quorum omnium demonstrationes ex superius traditis Multiplicationis & Divisionis principiis facile est colligere.

Atq; hactenus de Multiplicationis & Divisionis praxi dictum esto. Sequitur, ut de utriusq; Examine seu Probatione verba faciamus.

CAP. XXI.

De Multiplicationis & Divisionis Probationibus; earumq; Probationum fundamentis. Familiores aliquot quæstiuncule solvuntur.

QUæ de Additionis & Subductionis probationibus superius dicta sunt, non pauca & hic locum obtinent. Nempe non adhibentur illæ tanquam demonstrationes certitudinis regularum juxta quas proceditur; nam de illis satis constat ex principiis eis quibus innituntur: sed ad explorandum numquis error subrepserit in exercitio, quo a regulis deviatum sit. Non igitur ad probandas regulas, sed ad explorandum num operatio præstita regulis sit conformis, instituuntur hæ probationes. Et quanquam posset etiam examen institui repetendo ipsam operationem, & ad regulam ubiq; exigendo; tamen illud felicius ut plurimum instituitur operationis formâ mutatâ; quippe hoc pacto minus est periculi in eundem errorem iterum incidendi.

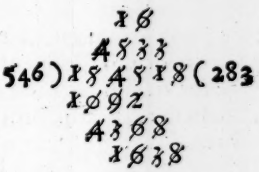
Sicut Additio per Subductionem (operationem sibi contrariam;) sic Multiplicatio per (huic oppositam) Divisionem examinare sive probare solent. Quod enim Multiplicatione conficitur id Divisione dissolvitur. *Vbi enim duorum numerorum invicem multiplicatione, alius producitur; si hic per eorum alterutrum dividatur, reliquus prodit.* Puta, si quantitas A ducta in B fit AB; hæc ipsa AB divisa per B fiet A. (nempe $\frac{AB}{B} = A$.) Ratio est, quia subsequens divisio per B destruit id quod præcedente multiplicatione per eandem quantitatem B efficiebatur, adeoq; ipsa quantitas A quæ prius fuerat, jam iterum quasi ex postliminio redit. Eodem modo si eadem AB dividatur per A prodibit B; (nempe $\frac{AB}{A} = B$:) quia scilicet tam ex ductu A in B, quam ex ductu B in A, eadem prodibit quantitas, puta AB = BA. sic $\frac{6 = 2 \times 3}{2} = 3$, & $\frac{6 = 2 \times 3}{3} = 2$.

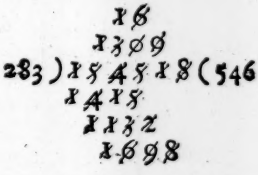
Atq; idem in grandioribus numeris similiter obtinet. Si enim

nim ex ductu 283 in 546, vel (quod tantundem est) ex ductu 546 in 283, proveniat 154518. Ut explorem num rite peracta sit operatio, hunc productum divido per multiplicatorum utrumvis, & si reliquum divisione provenientem comperio, argumento est operationem rite peractam fuisse; sin minus, certum est alicubi fuisse erratum. Et similiter in aliis quibusvis multiplicationibus, veritatem peractæ operationis examinare licet.

```
  283
  546
 1698
 1132
 1415
154518
```

```
  546
  283
 1638
 4368
 1092
154518
```





Ut autem per Divisionem Multiplicatio, sic per multiplicationem Divisio examinabitur. Nam *si Quotiens in Divisorem ducatur (vel hic in illum) prodibit numerus pridem Dividendus.* Nam quod Dividendo fuerat dissolutum, multiplicando (per eundem numerum) iterum restituitur. Puta, si A) AB (B, hoc est $\frac{AB}{A} = B$, multiplicando B in A, prodibit AB. Ita, si 3) 12 (4, hoc est $\frac{12 = 3 \times 4}{3} = 4$; ducto 3 in 4 (Divisore in Quotientem) prodibit, $3 \times 4 = 12$. Et similiter in numeris grandioribus; si dividendo 154518 per 546 prodeat 283, vel eundem numerũ 154518 dividendo per 283 proveniat 546; vice versa, multiplicando 546 in 283, vel hunc in illum, restituetur

tuetur numerus pridem dividendus 154518. Ut in calculo mox ante apposito videre est.

Si autem, post peractam Divisionem, aliquod superfuerit Residuum; curandum est ut in probatione per multiplicationem instituenda, hoc etiam Residuum addatur: Secus enim non prodibit Dividendus integer, sed mancus. Nam, verbi gratia, si numerus 387 per 24 divisus exhibeat quotientem 16, & supersint 3; hoc residuum indicat, quod in dividendo illo contineatur divisor vicibus 16, (vel quotiens vicibus 24,) atq; insuper numerus 3. Adeoq;, præter Divisorem (vel Quotientem) toties positum (quod multiplicando præstatur) adjungendus erit numerus ille 3.

```
      ~~1~~ ~~4~~ 3
24 ) ~~3~~ ~~8~~ ~~7~~ ( 16
     ~~2~~ ~~4~~        24
     ~~1~~ ~~4~~ ~~4~~   64
                 32
                   3
                 387
```

Ratio totius processus (si illa ex jam dictis nondum satis intelligatur) sic reddi poterit. Cum numerus multiplicandus toties in Producto contineatur, quoties Unitas in Multiplicatore, (nam toties est ille ponendus quoties jubet multiplicator;) si Divisione quæratur, quoties in Producto contineatur Multiplicandus? prodire debet (si operatio recte peracta fuerit) pro divisionis Quotiente, numerus idem qui prius fuerat multiplicator. Et contra, cum Divisionis Quotiens ostendat, quoties in Dividendo contineatur Divisor, (vel præcise, vel quanto cum residuo;) si Divisor ille toties (multiplicando) ponatur, (&, siquod erat, adjiciatur residuum,) emergere debet numerus Dividendus; quippe ille in quo Divisor toties ut dictum est continetur.

Præter has autem Multiplicationis & Divisionis probationes, per operationem contrariam instituendas; potest utraq; per eandem operationem probari. Cum enim (ut ex superius traditis patet) duorum numerorum invicem multiplicatorum, perinde est uter dicatur Multiplicator; (puta, perinde est, in exsemplis nuper appositis, sive 283 per 546, sive numerus hic per illum, multiplicetur:) *Ubi peracta est operatio, si de ἀκριβείᾳ dubitetur; qui prius erat numerus multiplicandus, jam fiat multiplicator, & vice versa;* Et, si idem utrobiq; fit numerus Productus, argumento erit processum fuisse legitimum; sin minus, erroneum.

Sic

Sic ductis 283 in 546, vel 546 in 283, prodibit utrobiq; 154518, ut supra patet.

Pariter in Divisione; Cum non minus ostendat Divisor, quoties in Dividendo contineatur Quotiens; quam Quotiens, quoties in eodem Dividendo contineatur Divisor; (quippe qui ita se habeat ad Dividendum, ut Factores in multiplicatione ad Factum;) Si de peracta divisione occurrat dubium; *qui prius prodiit Quotiens jam fiat Divisor*, & si jam prodeat pro Quotiente numerus ille qui tum fuerat Divisor, argumento est operationem rite peractam esse; sin secus, erratum esse. Verbi gratia; si dividatur 154518 per 546 prodibit quotiens 283; de quo si dubitetur, numerus idem 154518 dividatur per quotientem 283, & prodibit numerus 546, qui prius fuerat divisor, (ut supra patet,) unde liquet operationem rite peractam esse. *Residuum autem, siquod est, idem esse debet utrobiq;*. Puta, cum diviso numero 387 per 24, quotiens sit 16, & residuum 3; si 387 dividantur per 16, quotiens erit 24, & residuum item 3: ut ex adjuncto calculo patet.

16) 387 (24
32
67

Atq; hæ quidem sive Multiplicationis sive Divisionis probationes, huc usq; traditæ, in quacunq; Multiplicatione aut divisione locum habent; sive in numeris integris, sive in Fractionibus Decimalibus, aliisve; sive in operationibus Algebricis & Symbolicis vel Speciosis; sive item una, sive plures sint denominationes. Quippe idem est in omnibus processûs fundamentum.

Quod autem de Probationibus Additionis & Subductionis superius monuimus; idem de Multiplicationis & Divisionis Probationibus pariter sciendum est: Eas nempe non omnes ejusdem esse generis; quippe aliæ certiores sunt, & fallaciæ minus obnoxiæ, (quales sunt, quas jam exposuimus,) sed laboriosæ magis, (& quæ quidem tantundem operis in examinandis quantum in peragendis operationibus postulant,) aliæ vero magis expeditæ, sed quæ nonnunquam fortasse fallant.

Atq; huc quidem referri potest ea methodus examinandi Divisionis operationem, per additionem multiplorum omnium subductorum, quæ (cum residuo si quod sit) restituent numerum

numerum Dividendum. Puta, si (in priori exsemplo) dividamus 154518 per 283, unde quotiens emergit 546; si omnia multipla (infra dividendum subscripta) simul addantur, prodibit numerus Dividendus; quod ni fiat, erroris indicium est. Est autem hæc probatio admodum lubrica; quippe quæ solas subductiones examinat non item multiplicationes; & siquis prius, Divisorem in singulas quotientis notas ducendo, error irrepscrit, idem adhuc intactus manet, neq; hac probatione omnino detegitur, quippe quæ multiplicationes illas, sine examine, pro veris habet.

```
        1 6
      1 3 0 9
283 ) 1 5 4 5 1 9 ( 546
      1 4 1 5
        1 1 3 2
          1 6 9 8
      ---------
      1 5 4 5 1 8
```

Sicui autem nimis laboriosum videbitur, probationibus superius traditis uti; adeoq; tantundem operis insumere in operis examinatione seu probatione, quantum in ipsa operatione: Poterit breviorem illam probationem adhibere, quam *Novenariam* vocant, (qualem supra ostendimus in probatione Additionis & Subductionis;) quæ sic instituitur.

Numeri Multiplicandi notis omnibus indiscriminatim additis (neglecta locorum consideratione,) indeq;, quoties fieri possit, abjectis 9, residuum si quod sit seorsim notetur (vel, si nihil supersit, ciphra;) Deinde & Multiplicantis notis omnibus similiter additis, & abjectis novenis omnibus, residuum item notetur: Hæc duo residua invicem ducantur, & abjectis inde 9 quoties fieri potest, Residuum, siquod sit, notetur: Deniq; si hoc residuum idem sit atq; Residuum quod proveniet ex omnibus numeri Producti seu Facti notis, ita ut prius additis, abjectis novenis omnibus, indicium est (saltem probabile) operationem rite peractam esse; sin secus, certissimum est alicubi erratum esse. Exsempli gratia: In Multiplicatione apposita, Multiplicandi notæ addantur 2 4 8 = 10, 10 − 9 = 1, 1 + 3 = 4. Hoc residuum scribatur ad crucis sinistram. Deinde in Multipli-

```
      2 8 3
      5 4 6
    -------
    1 6 9 8
  1 1 3 2
1 4 1 5
-------------
1 5 4 5 1 8
```

```
    6
4 X 6
    6
```

catore

catore, $5+4=9$, quibus abjectis, reliqua nota 6, ſcribatur ad crucis dextram. His Reſiduis invicem ductis, eſt $4\times6=24$, unde bis abjectis 9, reſtant 6, (vel $2+4=6$.) Hoc Reſiduum ſuperne ſcribatur. Deinde numeri producti notæ ſic addantur, $1+5=6$, $6+4=10$, $10-9=1$, (vel $1+0=1$,) $1+5=6$, $6+1=7$, $7+8=15$, $15-9=6$ (vel $1+5=6$.) atq; hoc Reſiduum inferne ſcribatur. Deniq; quoniam duo Reſidua, ſuperne & inferne notata, deprehenduntur eadem; conjicio operationem rite peractam; ſin fuiſſent diverſa, certum eſſet admiſſum eſſe errorem.

In Diviſione, pari modo procedendum eſt. Addantur indiſcriminatim notæ Diviſoris, &, abjectis novenis omnibus, notetur reſiduum. Quotientis item notæ addantur, & abjectis novenis, notetur Reſiduum. His reſiduis invicem ductis, (& facto additis, ſiquod fuerit, Reſidui Diviſionis notis,) &, abjectis novenis, notetur & hoc Reſiduum. Deniq;, facta ſimili notarum Dividendi additione, & novenorum abjectione, quod tandem reſtat æquabitur (ſi operatio rite ſit peracta) Reſiduo proxime notato: Sin minus, erratum eſt. Sic in appoſita diviſione. Diviſoris notæ $1+6=7$, (quod notetur ad ſiniſtram.) Quotientis notæ $2+4=6$, (quod notetur ad dextram.) Factum ex his $7\times6=42$, unde quater abjectis 9, reſtant 6, (vel $4+2=6$.) tum (quia poſt peractam diviſionem reſtabant 3) $6+3=9$: quibus abjectis manet 0, quod ſuperne noto. Deniq; in Dividendo $3+8+7=18$, unde bis abjectis 9, manet 0, ($1+8=9$, $9-9=0$) quod cum idem ſit atq; Reſiduum ſuperne notatum, conjicio operationem fuiſſe rite peractam.

16)387(24
32
64
64
0
7X6
0

Quod autem de Reſiduo Diviſionis dictum eſt; nempe ipſius notas addendas eſſe facto ex reſiduis Diviſoris & Quotiētis; pariter obtinet & in multiplicatione, ſi præter puram Multiplicationem accedat aliquod additamentum.

16
24
64
32
3
387
0
7X6
0

Puta 16 per 24 multiplicandum, & simul addendum 3, ut habeatur facti additiq; aggregatum 387: Ex multiplicandi notis emergit 7, ex multiplicantis 6, quorum factum $7 \times 6 = 42$, hoc est $4 + 2 = 6$, & (propter additamentum 3) $6 + 3 = 9$: & $9 - 9 = 0$; Sed & $3 + 8 + 7 = 18$, & $18 - 9 - 9 = 0$. unde conjicitur operationem rite peractam esse.

Fundamentum quo nititur hæc probatio, idem est quod supra docuimus de consimili Probatione Additionis & Subductionis. Nempe quòd, ubi nulla locorum habetur ratio, tantundem valent 1 & 10, item 2 & 20, & pariter in similibus: At idem est substituere 1 pro 10, atq; abjicere 9; item substituere 2 pro 20, atq; abjicere bis 9; & sic in reliquis.

Monendum autem est (quod & de Additionis & Subductionis simili probatione monuimus) probationem hanc nonnunquam fallacem esse, neq; errorem semper detegere, (præsertim si is ob neglectam debitam locorum considerationem obtingat, quem frustra quis putet hinc detectum iri, cum nulla hic locorum habetur ratio:) Quamvis enim, ubi numeri non conveniunt, certum sit erratum esse; non tamen certum est operationem recte procedere ubi conveniunt.

At interim (ne penitus abjiciendam putemus hanc probationem) probabile est (utut non certum) errorem siquis fit (præterquam qui ex indebito notarum situ oritur) hinc detectum iri, saltem nisi datâ industriâ fraus instituatur; raro enim (& quidem rarius quam quis putet) Errores siqui sunt tam feliciter (vel potius infeliciter) conspirant ut se mutuo tegant. Et propterea cum hæc probatio non adeo magno constet labore, non inutiliter adhiberi poterit.

Et quidem in prolixis præsertim Divisionibus, operæ pretium esse potest eam sæpius in ipso operationis curriculo adhibere (quod quidem fieri potest post quamlibet Divisoris promotionem) ne error in principio operis totum insecuturum laborem plane frustraneum reddat.

Sed & minus universalis est hujusmodi Probatio Novenaria; quippe quæ solis numerosis operationibus convenit, non item Speciosis sive Symbolicis, aut Algebricis; ut nec (nisi correctiones aliquoties adhibeantur) ubi plurium denominationum quantitates occurrunt. Cum enim ortum ducat hæc probatio ex graduum sive locorum dispositione in continua proportione decupla

decupla; ubi hæc dispositio non est, neque locus est huic probationi. Si verò Arithmeticis placuisset primitùs, pro decupla, aliam quamvis proportionem adhibuisse; potuissent etiam & illi, quæcunq; fuerit, hujusmodi probationem aptasse: Non quidem abjiciendo singula novena, uti jam; sed eum numerum, quoties fieri possit, abjiciendo, qui unitate minor sit quam nomen istius qua proceditur continuæ proportionis: Puta, si (pro decupla) adhibuissent noncuplam, abjicienda essent (non novena, sed) octona omnia; si octuplam, septena; si septuplam, sena; si sextuplam, quina; & similiter de quavis aliâ.

Atq; hactenus de Probationibus tum Multiplicationis tum Divisionis dixisse sufficiat: quibus vel utendis vel negligendis suo quilibet utatur arbitrio.

Iisdem autem, cum his probationibus, principiis nituntur hujusmodi quæstionum solutiones; (quibus se exercendo tyrones Multiplicationis & Divisionis naturam & consensum melius persentiscent.)

Quæstiuncularum solutiones.

Quis numerus est, qui per 4 divisus, quotientem dabit 3. Nempe 4 & 3 (Divisore & Quotiente) invicem ductis, prodibit 12, numerus quæsitus Dividendus. Vel, quod eodem recidit, si numerus quæsitus, Dividendus, dicatur A; quoniam (juxta quæstionis tenorem) $\frac{A}{4} = 3$; si pars utraq; multiplicetur per 4, erit $A = 3 * 4 = 12$.

$\frac{4}{3}$ 12 4)12(3

$\frac{A}{4} = 3.$

$A = 3 * 4 = 12.$

Item *Cujus numeri triens est* 235. Hoc est, Quis numerus per 3 divisus, quotientem dabit 235. Eadem methodo, ductis invicem 235 & 3, prodibit numerus quæsitus 705; qui nempe per 3 divisus quotientem imperatum exhibebit. Vel etiam quia 3)A(235, erit $A = 235 * 3 = 705$.

235 3)705(235
3
705 $\frac{705}{3} = 235$

$\frac{A}{3} = 235$

$A = 235 \times 3 = 705$

Item (in numeris grandioribus) *Quot aurei distribuendi sunt inter milites* 2646, *ut quisq; habeat* 283? Hoc est, quis numerus dividendus est per 2646, ut prodeat 283; vel, per 283, ut prodeat quotiens 2646? Ductis invicem 2646 & 283, prodibit numerus quæsitus 748818.

$$\begin{array}{r} 2646 \\ 283 \\ \hline 7938 \\ 21168 \\ 5292 \\ \hline 748818 \end{array}$$

2646) 748818 (283

283) 748818 (2646

$$\frac{748818}{2646} = 283$$

$$\frac{748818}{283} = 2646$$

Contra vero, si quæratur *Quis numerus est qui in* 4 *ductus faciet* 12? Factum 12 dividatur per 4 (alterum ex factoribus) & prodibit reliquus Factor quæsitus 3. Vel, si numerus quæsitus dicatur A; cum sit (juxta quæstionis tenorem) $A \times 4 = 12$, dividendo utramq; æquationis partem per 4, erit $A = \frac{12}{4} = 3$.

4) 12 (3 $\quad 3 \times 4 = 12$

$A \times 4 = 12 \quad A = \frac{12}{4} = 3$

Item *Cujus numeri triplum est* 705? Hoc est, quis numerus in 3 ductus faciet 705? Si numerus factus 705 dividatur per factorem datum seu cognitum 3, prodibit Factor quæsitus 235. Vel, quia $A \times 3 = 705$, erit $A = \frac{705}{3} = 235$.

$$\begin{array}{r} \cancel{1}\cancel{1} \\ 3)\,\cancel{7}\cancel{0}\cancel{5}\,(235 \\ \cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\quad 3 \\ \hline 705 \end{array}$$

$A \times 3 = 705.$

$A = \frac{705}{3} = 235.$

Item, *Inter quot milites distribuendi sunt* 748818 *aurei, ut quilibet habeat* 283. Divisis 748818 per 283, prodibit militum numerus quæsitus. Et pariter in similibus.

```
        1
       136
      18209
283) 748818   (2646
     566        283
     1698      ------
      1132      7938
       1698    21168
              5292
              ------
              748818
```

Si autem quæratur, Verbi gratia, *Quinam numeri sint invicem ducendi ut factus sit* 24? Vel *Quis per quem dividendus, ut quotiens sit* 24? Hujusmodi quæstiones nugaces essent; quippe ex datis in quæstione nihil certi elicitur: posset enim modis innumeris responderi: puta 1×24, 2×12, 3×8, 4×6, $2 \times 2 \times 6$, $4 \times 2 \times 3$, $2 \times 8 \times 1\frac{1}{2}$, $\frac{48}{2}$, $\frac{72}{3}$, $3)\frac{144}{2}$, $2)\frac{24}{3} \times 6$, &c. Nam ex solo facto in multiplicatione, de Factoribus neutiquam constabit; ut nec, in Divisione, ex solo Quotiente constabit de Dividendo aut Divisore. Sed de his hactenus.

Atq; hactenus quidem de quatuor Arithmetices (ut vocantur) Speciebus, seu potius Partibus, Additione, Subductione, Multiplicatione, & Divisione, dicta sufficiant. Multa autem quæ de his operationibus apud Arithmeticæ practicæ magistros passim occurrunt, & speciatim operationum aliquot in nonnullis compendia, variosq; modos has operationes peculiaribus subjectis applicandi, (puta, in re nummaria, de fænore, de mercatura, in re astronomica, de tempore, de motu, eorumq; reductionibus, &c.) sciens prætereo. Quippe infiniti esset laboris, & quidem supervacanei, ea omnia quæ id genus dici possent sigillatim prosequi. Nec quidem id nostri operis est; sed potius operationum fundamenta tradere, ipsosq; fontes aperire, unde scientifice & demonstrative possint veræ procedendi rationes intelligi. Quas qui rite intelligit, non modo majori fructu & voluptate ipsas operationes exercebit, easq; in usum proferet, quam si cæco ductu incedat, & quasi Andabatarum more pugnet; sed & multo firmius quæ novit memoria retinebit. Quas enim sæpius audimus quærelæ, Rerum Mathematicarum cognitionem, Arithmetices præsertim, citissime deperditam iri nisi assidua exercitatione retineatur; non aliunde ori-

untur, quam quod pleriq; Arithmetices praxin, ſive operandi methodum, memoriter tantum edocti, ipſas operandi rationes penitus ignorent; quas quidem vulgares Arithmeticæ practicæ Magiſtri plerumq; vel ipſi neſciunt, vel ſaltem plus ſatis reticent; eiſq; edocti Mechanicam potius (regulas minime intellectas perſequendo) exercent, quam Arithmeticam. Qui autem ipſius praxeos rationem ſatis perſentiſcunt, (nec tantum cæco itinere, regularum memoriter edoctarum ductum implicita fide ſecuti, incedunt,) judicio magis quam memoria ducti, difficilius ea quæ intimis hauſerunt medullis evulſum iri patientur.

CAP. XXII.

Multiplicationis exercitium in Parallelogrammis Rectangulis menſurandis, & invicem comparandis. Diviſionis in Parallelogrammis Rectangulis exercitium.

PRiuſquam Multiplicationis & Diviſionis (quarum praxis ſuperius oſtenſa eſt) negotium dimittam; nec inutile forſan erit, nec injucundum, pauca ſubtexere quibus utriuſq; utilitas innoteſcat, atq; interim Geometriæ cum Arithmetica ſumma conjunctio percipiatur. Quamvis enim Arithmetica, quæ de Numeris agit, Geometricas menſuras per ſe non attingat; ſed, propriis principiis nixa, neq; Geometriæ auxilio indigens, regulas abſtractas tradit, omni numerabili pariter applicabiles; (objectum quippe ſimplicius & latius nacta quam Geometria:) cum tamen objectum Geometriæ, viz. menſura, intra objecti Arithmetices terminos cadat, (quippe cujus partes numerantur;) non abs re erit, Arithmetices exercitium in re Geometrica paucis oſtendere.

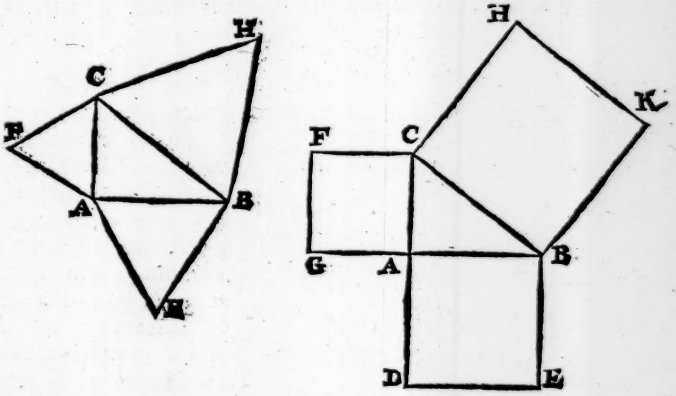
Hoc autem, dum de Additione & Subductione verba fecimus, parcius egimus, quia non magni forſan res videri poſſit, lineam lineæ adjungere, vel etiam demere, dum utraq; data ſit. Puta, ſi lineæ datæ A B adjungere oporteat lineam datam B C; vel datæ A C datam B C auferre. Cui tamen operi perficiendo

A B C

aptata

aptata videmus tria successive problemata; nempe Prop. 1.2.3. primi Euclidis. Illæ autem propositiones, cum sint pure Geometricæ, possunt in traditione Arithmetica tuto omitti.

Quod autem de Angulorum, Superficierum, aut solidorum, Additione vel Subductione dici possit; Vel erit penitus Geometricum, neq; ad calculum omnino spectans; nempe si Anguli, superficies, aut corpora, immutata adjungantur; ut, si dato Quadrato A B E D, vel A C F G, addendum esset Triangulum ABC; ubi nihil requiritur aliud, quam ipsorum in dato situ fabricam Geometricam: Vel, sicubi calculo opus sit, non solum Additione aut Subductione opus erit, sed ut plurimum



Multiplicatione item vel divisione: ubi nempe proportionum ratio habenda est; ut, si quæratur Quadratum BCHK, æquale quadratis ABED & ACFG simul sumptis; vel Triangulum BCH, æquale similibus ABE, ACF, simul sumptis: aut si quæratur Quadratum ABED, æquale quadrato BCHK dempto quadrato ACFG; vel Triangulum ABE, æquale triangulo BCH dempto triangulo ACF, ubi præter figurarum additionem & ablationem, earum item aggregati vel residui transformatio requiritur. Ideoq; de hujusmodi Additionibus vel Ablationibus, priusquam de Multiplicatione & Divisione dixerimus

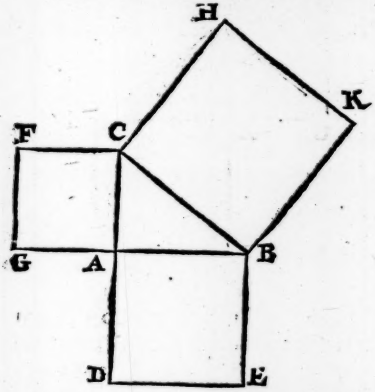
mus, non ita opportunum erat verba facere.

Ut vero quæ de Multiplicatione & Divisione jam tradidimus, Geometricis mensuris applicentur, præmittenda sunt e Geometria quædam ad terminorum explicationem necessaria. Et quoniam ex mensura Parallelogrammi Rectanguli (quod, brevitatis gratia, simpliciter Rectangulum dici solet) reliquarum figurarum dimensiones deduci solent; de Parallelogrammo præmittendæ sunt quædam Definitiones, hoc est, Terminorum explicationes.

Definitiones aliquot Geometricæ.

Parallelogrammum appellant figuram planam quadrilateram, cujus opposita latera, seu laterales lineæ, sunt rectæ parallelæ, hoc est, *æquidistantes, sive æqualem ubiq; habentes inter se distantiam.* Quales sunt quæ in Schematis mox apponendis conspiciuntur.

Parallelogrammum vero tunc *Rectangulum* dicitur, *quando ipsius omnes anguli sunt recti.* (Vel etiam, *Cujus angulus aliquis est rectus*: Nam si Parallelogrammum habeat vel unum angulum rectum, reliquos item omnes rectos esse facile est demonstratu.)



Angulus autem *Rectus* tunc esse dicitur, *quando linea recta in rectum angulum faciens ita recte incidit ut neutrò magis inclinet.* Ut in figura pridum apposita, recta C A in rectam GAB ita recte incidens ut non magis hac quam illac inclinet, facit angulos CAB, CAG, rectos. Et similiter anguli ad FGH &c. recti sunt.

Siquà vero inclinet magis, angulum *obliquum* facit: Nempe *Acutum* (quippe *angulo recto minorem*) *eà qua propendet* seu magis inclinat; vel *Obtusum* (*angulo recto majorem*) *ea unde reclinat* sive diverget magis. Puta, si recta C A, quæ jam erecta est, supponatur versus A B nutare seu propendere, adeoq; ab AG reclinari, pro duobus angulis jam rectis, fierent duo obliqui, CAB acutus, & CAG obtusus; qui tamen simul sumpti duobus illis rectis sunt æquales; nam quanto unus propter inclinationem

clinationem minuitur, tanto alter propter reclinationem augetur; quodq; huic accedit illi aufertur. Similiter, angulus ABC acutus est, quippe recto minor; ABK obtusus, quippe recto major. Et similiter alias.

Parallelogrammum autem *Rectangulum*, *si latera habeat omnia invicem æqualia, Quadratum dicitur*; quale est, in figura tertia, ADBE: *Sin minus Oblongum*; quale est figura prima AB.

Parallelogrammum vero *Obliquangulum* (hoc est, *cujus anguli sunt obliqui*) *si latera habeat omnia invicem æqualia*, *Rhombus dicitur*; ut in figura tertia, GDBC: *Sin secus*, *Rhomboides*; ut figura secunda CD.

Contineri vero vel *comprehendi* dicitur *Parallelogrammum Rectangulum* (sive quadratum sit, sive oblongum,) *duabus rectis lineis quæ rectum comprehendunt angulum.* Definiente Euclide 1 d 2. Non quidem eo sensu quo ipse alibi negat, *duabus rectis lineis spacium comprehendi*; (non enim duabus sed quatuor rectis hoc sensu parallelogrammum continetur, hoc est, ambitur sive undiquaq; concluditur;) sed quia duabus illis parallelogrammi rectanguli spacium sive area determinatur, quippe altera longitudinem, altera latitudinem determinat. At in Parallelogrammis Obliquangulis, secus est: non duabus rectis circa angulorum obliquorum quodvis positis determinabitur istius parallelogrammi magnitudo; sed major, minorve erit, prout obliquitas minor majorve fuerit; adeoq; præter rectarum longitudinem, anguli etiam sive obliquitatis determinatione opus erit, ut determinetur Parallelogrammi magnitudo. Et propterea, neq; in hac definitione, nec (quantum memini) apud Euclidem alibi, Parallelogrammum Obliquangulum duabus ejusmodi circa ipsius quodvis angulum positis contineri dicitur. Si cui vero sic libeat loqui, anguli præterea mentionem

facere oportet ut magnitudinem determinet.

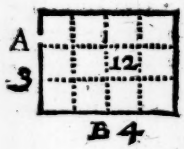
Parallelogrammi Rectanguli mensuratio.

His præmissis, *Ad Parallelogrammi Rectanguli aream sive magnitudinem inveniendam, nil aliud requiritur quam ut duarum rectarum quibus contineri dicitur, altera in alteram ducatur, sive multiplicetur.* Exsemplo res evadet perspicua.

Sint expositi Parallelogrammi Rectanguli latera circa rectorum angulorum quodlibet, duæ rectæ, quarum altera sit trium, altera quatuor pedum, (vel palmorum, calamorum, orgyiarum, spithamarum, aut quarumlibet aliarum mensurarum æqualium.) Rectanguli magnitudo sive area reperitur ductu linearum unius in alteram, longitudinis puta in latitudinem, vel contra: eodem plane modo quo totidem numerorum series essent computandæ. Si enim, verbi gratia, tot puncta, vel (si libet) tot milites ordinatim digesti, eâ lege disponantur, ut, in qualibet serie transversa, quaterni, in qualibet directa, terni conspiciantur: manifestum est ter quaternos, vel quater ternos, ita esse dispositos. Multiplicatis igitur 4 per 3, vel 3 per 4, emerget omnium numerus 12 $= 3 \times 4$. Et pariter in simili quavis cujusvis numeri dispositione faciendum erit.

. . . .
. . . .
. . . .

Eodem modo Parallelogrammum 3 pedes latum, & 4 pedes longum ex ductu latitudinis in longitudinem, reperietur pedum quadraticorum $12 = 3 \times 4$. Cujus quidem rei ratio sic facile percipietur. Si enim parallelogrammi istius tam altitudo sive latitudo A, pedum trium, quam basis sive longitudo, pedum 4, dividi supponantur in suos respective pedes; atq; a cujusq; pedis termino ducantur rectæ lateribus parallelæ, quibus tota figura in particulas quadratas dirimatur, quarum quælibet sit tam longa quam lata pedem unum, (hoc est, quælibet contineat pedem quadratum;) manifestum erit, ex ipso Schematis inspectu, in qualibet serie transversa (propter longitudinem quatuor pedum) quatuor quadraticos pedes contineri, ipsasq; series (propter altitudinem trium pedum) numero tres esse; adeoq; pedes quadraticos omnes esse ter quaternos, hoc est $12 = 4 \times 3$. Et quidem, pari ratione, manifestum



stum erit (propter A = 3) singulis seriebus erectis tres pedes quadraticos contineri, ipsasq; series (propter B = 4) numero quatuor; adeoq; pedes quadraticos omnes esse quater ternos, hoc est 12 = 3 × 4. Et similiter in aliis quibusvis Parallelogrammis rectangulis mensurandis (sive quadrata sint sive oblonga) ex ductu longitudinis in latitudinem, sive (quod tantundem valet) basis in altitudinem (vel hujus in illam,) habetur area.

Atq; hinc colligere licet, *Pedem quadraticum unum, continere Digitos sive Uncias*, 144. Cum enim longitudo Pedis unius sit unciarum 12; Et propterea Pedis quadratici tam longitudo quam latitudo sit 12 unc. ex ductu hujus in illam emergit area 12 × 12 = 144 unciarum quadraticarum. Adeoq;, utut pes linealis contineat non nisi 12 uncias lineales; pes tamen quadraticus continet uncias quadraticas 144. Eodem modo cum apud nos *communis Virga mensoria officinarum* (*a Yard* dicta) *contineat longitudine pedes tres; eadem mensura quadratica continebit pedes quadraticos* 9 = 3 × 3.

Hæc si per symbola libeat explicare; pro latitudine seu altitudine ponatur A, pro longitudine seu basi B; erit igitur Area seu magnitudo A B, sive A × B. Ergo si A = 3, & B = 4, erit A B = 3 × 4 = 12.

A = 3
B = 4
AB = 12

In quadratis autem, ubi longitudo latitudini est æqualis, erit A B = A A = Aq. Adeoq;, cum longitudo pedis unius sit 12 unciarum; & propterea pedis quadratici tam basis quam altitudo 12 unc: ideoq;

A = P = 12 U
B = P = 12 U
AB = PP = Pq = 144 U U = 144 Uq.

AB = PP = Pq = 12 U × 12 U = 144 U U = 144 Uq. Hoc est, Pq = 144 Uq, vel unus Pes quadraticus æqualis 144 Unciis quadraticis. Et eodem modo, in Virga quadratica, cum tam basis quam altitudo sit pedum 3, erit area Vq = 9 Pq. Et similiter alibi.

A = V = 3 P
B = V = 3 P
AB = Vq = 9 Pq

Hac methodo, *In mensurandis*, verbi gratia, *Asserculis ligneis*; si Asseris unius latitudo A sit duum pedum, longitudo B pedum 20; erit area sive magnitudo AB = 40 P q; hoc est pedum quadraticorum quadraginta.

A = 2 P
B = 20P
AB = 40Pq

Similiter, *Si Camera mensuranda* sit longa pedes 18, lata pedes 12, erit totius, area seu magnitudo, pedum quadraticorum 216 = 12 × 18.

A = 12 P
B = 18 P
AB = 216Pq

De Parallelogrammis Rectangulis invicem comparatis.

Pariter, cum *terræ Jugerum Anglicanum* (*Acra*, vulgo dicta) *statuta lege censeatur instar Parallelogrammi Rectanguli, Perticas 4 lati, longi vero 40: continebit area Perticas quadraticas* 160 = 4 × 40. Vel etiam, cum Perticæ longitudo sit pedum 16½; adeoq; 4 Perticæ sint pedes 66; & perticæ 40, pedes 660: Idem terræ Jugerum sive *Acra valebit pedes quadraticos* 43560 = 66 × 660.

A = 4 Pert.
B = 40 P.
AB = 160 P q.

A = 66 Ped.
B = 660 P.
AB = 43560 P q.

Hinc etiam patet, *varia esse posse parallelogramma, quorum magnitudo sit æqualis, ambitus autem admodum inæqualis; & contra*, ambitus æqualis, at magnitudo inæqualis; & quidem eousq; ut *quorum ambitus major est, eorum area seu magnitudo sit minor*. Exempli gratia.

Sit Rectanguli primi latus quodlibet sex pedum; erit area, pedum 36 = 6 × 6. Secundi latitudo, pedum 4, longitudo pedum 9; erit area, pedum 36 = 4 × 9. Tertii latitudo pedum 3, longitudo 12; erit area 36 = 3 × 12. Quarti latitudo pedum 2, longitudo 18; erit area 36 = 2 × 18. Quinti deniq; latitudo 1, longitudo 36; erit area item 36 = 1 × 36. Est igitur eadem singulorum area seu magnitudo; nempe pedum quadraticorum 36: at eorum ambitus longe diversi; quippe primi, pedum 24 = 6 + 6 + 6 + 6; secundi, 26 = 4 + 9 + 5 + 9; tertii, 30 = 3 + 12 + 3 + 12; quarti, 40 = 2 + 18 + 2 + 18; quinti, 74 = 1 + 36 + 1 + 36, nempe plus quam triplo major quam primi.

Deinde

Deinde, sit Rectangulum primum (ut prius) longum & latum pedes 6, Secundum, latum pedes 5, longum pedes 7: Tertium, latum 4, longum 8: Quartum, latum 3, longum 9: Quintum, latum 2, longum 10: Sextum, latum 1, longum 11. Erunt hæc omnia Isoperimetra, quippe perimeter; sive ambitus ubiq; pedum: $24 = 6+6+6+6 = 5+7+5+7 = 4+8+4+8 = 3+9+3+9 = 2+10+2+10 = 1+11+1+11$. At magnitudines longe diversæ: quippe primum est pedum quadraticorum $36 = 6 \times 6$; secundum, $35 = 5 \times 7$; tertium, $32 = 4 \times 8$; quartum, $27 = 3 \times 9$; quintum, $20 = 2 \times 10$; sextum deniq; $11 = 1 \times 11$, plus triplo minus quam erat primum.

Deniq; sit expositum Parallelogrammum rectangulum, cujus latitudo sit pedis 1, longitudo, 11; adeoq; ambitus $24 = 1+11+1+11$, area vero pedum quadraticorum $11 = 1 \times 11$. Ad quod comparentur alia quatuor, quorum primum sit latum pedes 2, longum 9; secundum, latum 3, longum 8; tertium, latum 4, longum 7; quartum latum 5, longum 6, erit singulorum ambitus minor quam parallelogrammi expositi, (quippe pedum 22, cum illius fuerit pedum 24:) area vero major; nempe primi, pedum quadraticorum 18, secundi 24, tertii 28, quarti 30, expositi vero non nisi 11.

Ex quibus omnibus abunde patet, *quam lubricum sit figurarum magnitudinem ex solo ambitu æstimare.*

Porro, Hinc liquet etiam, *ex Parallelogrammis Rectangulis Isoperimetris* (hoc est, quorum ambitus sunt invicem æquales,) *Quadratum esse omnium maximum; Oblongorum vero illud majus est quod proprius ad Quadratum accedit*, hoc est, cujus laterum differentia minor est. quod sic probatur. *Rectangulorum Isoperimetrum, quodnam est maximum.*

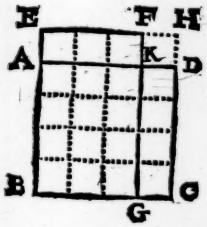
Sit quadrati cujusvis latus A; erit ipsius quadrati area $A \times A = Aq$. Deinde fiat Rectangulum oblongum, quadrato illi

A	A + C	A + C	A
½A	+ A − C	in: A − C	× A
½A	½A + C	Aq + AC	Aq
½A	½A − C	− AC + Cq	
4A	4A ≃ 0	Aq − Cq	A + C
			m in: A − C
			diff. 2C

iſoperimetrum: Quod ut fiat, tantundem addendum eſt longitudini, quantum latitudini aufertur; illud autem quantumcunque ſit dicatur C; fietq; longitudo A + C, latitudo A − C; adeoq; Rectangulum Quadrato Iſoperimetrum, quippe utriuſvis ambitus 4 A, ut laterum utrobiq; additione patet. Erit Oblongi hujus area (ductu longitudinis in latitudinem inventa) A q − C q, (ut multiplicando patet;) adeoq; minor quam area quadrati, A q; quod erat primo probandum. Sed & tanto minor eſt quantum eſt quadratum quantitatis C, (ut patet;) hoc eſt, quadratum ſemidifferentiæ laterum, (nam ſi ex A + C, auferatur A − C, reſiduum ſive differentia eſt 2 C, ut ſubducendo patet:) & propterea quo majus eſt C q, eo plus ab A q deficit oblongum, & proinde minus eſt; & contra: quod erat ſecundo probandum.

Poteſt quidem hoc ipſum Geometrice demonſtrari; at ego demonſtrationem Arithmeticam hanc ideo adhibui, quòd ea præſenti negotio magis ſit accommoda, (dum Arithmetices uſum in rebus Geometricis oſtendo,) & quidem per ſe magis univerſalis. Geometricam vero demonſtrationem ſiquis poſtulet, hanc habeat.

Sit quadratum quodvis A B C D, (puta longum & latum 4 pedes,) eiq; iſoperimetrum Rectangulum oblongum B E F G, (puta longum pedes 5, latum 3,) tanto nempe magis longum quanto eſt minus latum quam eſt Quadratum illud. Eſt autem rectangulum A K G B utriq; illorum commune; cui ſi addatur rectangulum K C, abſolvitur quadratum A C; ſin addatur rectangulum K E, abſolvitur oblongum G E. At Additamentum K C majus eſt additamento K E, (ut mox probabitur,) adeoq; (propter commune A G) quadratum A C majus oblongo G E, (quia ſi æqualibus addantur inæqualia, aggregata erunt inæqualia, illud autem majus ubi plus additur.) quod autem K C majus eſt, & quanto majus, quam K E, ſic oſtenditur. Rectangulum K C æquatur toti E D (quia longitudines A D, D C, æquales ſunt, quippe latera quadrati, & latitudines K F, K D, æquales,



æquales item ex hypothesi, quippe tantundem additur quadrati longitudini quantum latitudini auferitur; & anguli utrobique recti,) majus igitur est K C quam K E, (quippe æquale toti E D = K E + K H,) eorumque differentia est K H quadratum (propter K F, K D, rectas æquales,) hoc est, quadratum rectæ K F, vel K D, semidifferentiæ laterum. Et propterea, in rectangulis Parallelogrammis Isoperimetris, cujus laterum differentia minor est, illud est majus: & cujus laterum differentia nulla est (nempe quadratum) id omnium maximum. quod erat demonstrandum.

Divisionis exercitium in Parallelogrammis rectangulis.

Verum ut Multiplicationis ope, quæ jam tradidimus, peracta sunt omnia, ita & Divisione pariter similia fere problemata absolvi possunt. Verbi gratia.

Cum supra ostensum est, pedem quadraticum valere 144 uncias quadraticas, (quippe 12 × 12 = 144.) Si *asserculus ligneus* sit 8 uncias latus; quæritur quam longus sit oportet, ut habeatur pes quadraticus. Dividendo 144 (aream datam) per 8 (datam latitudinem) habetur longitudo quæsita $18 = \frac{144}{8}$. quippe area A B per latitudinem A divisa exhibet longitudinem quæsitam B. Sin data esset longitudo 18, area 144 per eam divisa exhiberet latitudinem $8 = \frac{144}{18}$. Vel

8) 144 (18
A) A B (B

18) 144 (8
B) A B (A.

Eodem modo. Cum *Jugerum Anglicanum* (ut supra dictum est) contineat Perticas quadratas 160 = 4 × 40. In agro (parallelogrammo) cujus latitudo est perticarum 8, quæritur, quanta sit oporteat longitudo, ut habeatur Jugerum terræ? Dividendo 160 per 8, habetur longitudo quæsita $20 = \frac{160}{8}$. Vel, data longitudine 20, dividendo habetur latitudo 8. Hoc est

8) 160 (20
20) 160 (8

A) A B (B
B) A B (A.

Pari modo, Si *Planities Cameræ* pedes 12 lata, longa vero 20; tegenda sit asserculis ligneis latis pedes 2: quanta sumenda est asserculorum (conjunctorum omnium) longitudo, ut operi sufficiant? Primo, ducta latitudine 12, in longitudinem 20, habetur area

12
20
2) 240 (120

pedum

pedum quadraticorum $240 = 12 \times 20$. Deinde, dividendo aream 240, per asserculorum latitudinem 2, habetur longitudo quæsita 120.

Item. Si tapeti *holoſericæ* longæ pedes 24, latæ 8; inducendus sit a tergo pannus vilior latitudinem habens pedum 6: quæritur quanta longitudo requiritur ut operi sufficiat? Primo, ducendo 24 in 8 habetur area tota $192 = 24 \times 8$. Deinde aream totam 192 per 6 latitudinem panni dividendo, habetur longitudo quæsita, $32 = \frac{192}{6}$. Et similiter alibi.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \\ \hline 6)192(32 \end{array}$$

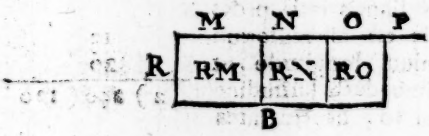
Atq; hactenus tum Multiplicationis tum Divisionis exercitium, in mensurandis Parallelogrammis Rectangulis quantum opus est, ostendimus.

CAP. XXIII.

Euclidis Elementum ſecundum Arithmeticè demonſtratur.

EAdem qua supra methodo; ex solo parallelogrammi rectanguli calculo, totum fere Elementum secundum Euclidis facile demonstratur Arithmetice. Exempli gratia,

1 e 2. *Si sint duæ rectæ* (puta R, B,) *quarum altera* (B) *secetur in quotcunq; partes* (puta M, N, O,) *rectangulum duabus illis rectis comprehensum* ($R \times B = RB$,) *æquale est iis rectangulis quæ rectis insectæ* (R) *& singulis sectæ segmentis comprehenduntur.* Hoc est, Si $B = M + N + O$, est $RB = RM + RN + RO$. Quod ex multiplicationis calculo patet. Vel, si ponantur R, B, M, N, O, æquales numeris 4, 10, 5, 3, 2. erit $4 \times 10 = 4 \times 5 + 4 \times 3 + 4 \times 2$. ut ex calculo item patet.

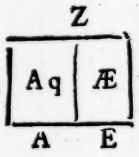


$$\begin{array}{l} B = M + N + O \\ R \quad R \\ \hline RB = RM + RN + RO \end{array} \qquad \begin{array}{l} 10 = 5 + 3 + 2 \\ 4 \quad 4 \\ \hline 40 = 20 + 12 + 8 \end{array}$$

2 e 2. *Si recta linea* (Z) *secetur utcunq;* (in A & E,) *rectangula quæ tota et utroq; segmento comprehenduntur* (ZA + ZE) *æquantur quadrato totius,* (Zq.) Hoc est, si $Z = A + E$, est $Zq = ZA + ZE$. Vel si tota sit 5, segmenta 3, 2: erit $5 \times 5 = 5 \times 3 + 5 \times 2$.

$$\begin{array}{l} Z = A + E \\ Z \quad Z \\ \hline Zq = ZA + ZE \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 = 3 + 2 \\ 5 \quad 5 \\ \hline 25 = 15 + 10 \end{array}$$

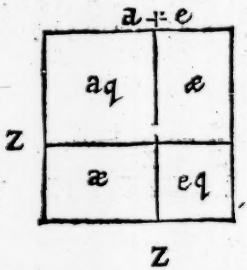
3 e 2. *Si recta* (Z) *secetur utcunq;* (in A, E,) *Rectangulum tota et uno segmentorum comprehensum* (ZA,) *æquatur rectangulo segmentis comprehenso* (AE) *una cum prædicti segmenti quadrato* (Aq.) Hoc est, Si $Z = A + E$; erit $ZA = AE + Aq$: vel (in numeris) si $5 = 3 + 2$, erit $5 \times 3 = 3 \times 3 + 2 \times 3$.



$$\begin{array}{l} Z = A + E \\ A \quad A \\ \hline ZA = Aq + AE \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 = 3 + 2 \\ 3 \quad 3 \\ \hline 15 = 9 + 6 \end{array}$$

4 e 2. *Si recta* (Z) *secetur utcunq;* (in A, E.) *Quadratum totius* (Zq) *æquale est quadratis segmentorum* (Aq + Eq) *una cum rectangulo segmentis comprehenso, bis sumpto,* (2 AE.) Hoc est, si $Z = A + E$; est $Zq = Aq + Eq + 2\,AE$. vel (in numeris) si $5 = 3 + 2$. erit $5 \times 5 = 3 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 3 \times 2$.

$Z = A + E$	$5 = 3 + 2$
$Z \quad A + E$	$5 \quad 3 + 2$
$Aq + AE$	$9 + 6$
$+ AE + Eq$	$+ 6 + 4$
$Zq = Aq + 2AE + Eq$	$25 = 9 + 12 + 4$

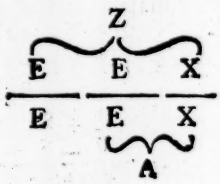


5 e 2. *Si recta* (Z) *ſecetur in ſegmenta æqualia* (S,S,) *& inæqualia* (A, E, vel S + V, S − V,) *rectangulum ſegmentis totius inæqualibus comprehenſum,* (AE,) *una cum quadrato rectæ inter puncta ſectionum* (Vq;) *æquatur quadrato dimidiæ.* (S q.) Hoc eſt, Si $Z = 2S = A + E$, ſitq; $S + V = A$, $S - V = E$, (adeoq; $A - S = V = S - E$.) Erit $AE + Vq = Sq$ Vel (in numeris) ſi $12 = 6 + 6 = 8 + 4$; adeoq; $8 - 6 = 2 = 6 - 4$. Erit $8 \times 4 + 2 * 2 = 6 \times 6$.

S	6
$S \quad V + E$	$6 \quad 2 + 4$
$S + V \quad E$	$6 + 2 \quad 4 = 6 - 2$
A	8
$S + V = A$	$6 + 2 = 8$
$S - V = E$	$6 - 2 = 4$
$Sq + SV$	$36 + 12$
$- SV - Vq$	$- 12 - 4$
$Sq - Vq = AE$	$36 - 4 = 32$
$Sq = AE + Vq$	$36 = 32 + 4$

6 e 2

6 e 2. *Si recta* (2 E) *bifariam secetur; eiq; adjiciatur in directum recta quædam* (X:) *Rectangulum quod tota cum adjecta* (2 E + X quæ dicatur Z) *& ipsa adjectâ* (X) *comprehenditur* (Z X;) *simul cum quadrato dimidiæ* (Eq:) *æquatur* (Aq) *quadrato compositæ ex dimidia & adjecta;* (E + X, quæ dicatur A.) Hoc est, si E + E + X = Z, & E + X = A: erit ZX + Eq = Aq. Vel (in numeris) si 3 + 3 + 4 = 10, & 3 + 4 = 7: erit 10 × 4 + 3 × 3 = 7 × 7.

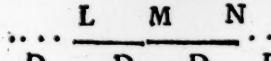


Z = 2E + X		E + X = A
× X × X		E + X = A
ZX = 2EX + Xq		Eq + EX
+ Eq + Eq		+ EX + Xq × A
ZX + Eq = Eq + 2EX + Xq	=	Eq + 2EX + Xq = Aq

10 = 6 + 4		3 + 4 = 7
× 4 × 4		3 + 4 = 7
40 = 24 + 16		9 + 12 7
+ 9 + 9		+ 12 + 16 × 7
40 + 9 = 9 + 24 + 16	=	9 + 24 + 16 = 49

Sed & hæc cum præcedente sic conjunctim efferri potest. *Si ab assignato in eadem recta* (utcunq; continuata) *puncto* M, *sumantur tum æquales utrinq; rectæ* M L, M N, *tum punctum* D *ubivis: rectangulum* L D N *æquabitur differentiæ quadratorum rectarum* M D, M L *vel* M D, M N. Quod sic ostenditur.

M L = M N dicatur S; M D dicatur V. Duarum igitur D L, D N, (ubicunq; sumatur D) altera erit S + V (summa duarum S, V,) altera S ~ V (differentia duarum S, V,) ut ex schematis inspectu patet. Ideoq;



$$LD \times DN = \left\{ \begin{matrix} S + V \\ \text{in} \\ S \sim V \end{matrix} \right\} = Sq \sim Vq = MLq \sim MDq.$$

Ubi notandum est S ~ V interpretandum esse nunc per S − V, nunc per V − S, prout S vel V major fuerit, (hoc est, prout D vel intra vel extra puncta L, N, fuerit assignatum,) & proinde Sq ~ Vq illic erit Sq − Vq, hic Vq − Sq. Ut multiplicando patebit.

S + V	V + S
S − V	V − S
Sq + SV	Vq + VS
− SV − Vq	− VS − Sq
Sq − Vq	Vq − Sq
MLq − MDq	MDq − MLq.

7 e 2. *Si recta* (Z) *secetur utcunq;* (puta, in A, E:) *quadrata totius* (Zq) *& unius ex segmentis* (puta Aq) *simul sumpta,* (Zq + Aq,) *æquantur rectangulo bis comprehenso a tota & dicto segmento* (2ZA) *una cum quadrato reliqui segmenti* (Eq.) Hoc est, si Z = A + E, erit Zq + Aq = 2ZA + Eq; & Zq + Eq = 2ZE + Aq. Et similiter in numeris, quod experienti patebit.

Z = A + E	A + E = Z
× Z = A + E	2E 2E
Zq = Aq + 2AE + Eq	2AE + 2Eq = 2ZE
+ Eq + Eq	Aq + Aq
Zq + Eq = Aq + 2AE + 2Eq	Aq + 2AE + 2Eq = 2ZE + Aq

Z = A + E	A + E = Z
+ Z = A + E	2A 2A
Zq = Aq + 2AE + Eq	2Aq + 2AE = 2ZA
+ Aq Aq	+ Eq + Eq
Zq + Aq = 2Aq + 2AE + Eq	2Aq + 2AE + Eq = 2ZA + Eq

8 e 2. *Si recta* (Z) *secetur utcunq;* (in A, E,) *rectangulum quater comprehensum a tota & uno ex segmentis* (puta 4ZA) *una cum quadrato reliqui*

reliqui ſegmenti (Eq) *æquantur quadrato compoſitæ a tota & prædicto ſegmento* (Q: Z + A.) Hoc eſt, Si Z = A + E; erit 4ZA + Eq = Q: Z + A: = Zq + 2ZA + Aq. Et (eadem ratione) 4ZE + Eq = Q: Z + E. Et in numeris pariter.

Z = A + E	2A + E = Z + A
× 4 A × 4 A	2A + E = Z + A
4ZA = 4Aq + 4AE	4Aq + 2AE
+ Eq + Eq	+ 2AE + Eq
4ZA + Eq = 4Aq + 4AE + Eq	= 4Aq + 4AE + Eq = Q: Z + A.

Z = A + E	A + 2E = Z + E
× 4E × 4E	A + 2E = Z + E
4ZE = 4AE + 4Eq	Aq + 2AE
+ Aq + Aq	+ 2AE + 4Eq
Aq + 4ZE = Aq + 4AE + 4Eq	= Aq + 4AE + 4Eq = Q: Z + E.

9 e 2. *Si recta* (Z) *ſecetur tum in ſegmenta æqualia* (S, S,) *tum inæqualia* (A = S + V, E = S − V;) *quadrata inæqualium ſegmentorum* (Aq + Eq) *ſunt dupla quadratorum e dimidia & e recta inter puncta ſectionum,* (2Sq + 2Vq.) Hoc eſt, Si Z = S + S = A + E. & A = S + V, E = S − V. erit Aq + Eq = 2Sq + 2Vq.

Aq = Q: S + V: = Sq + 2SV + Vq
Eq = Q: S − V: = Sq − 2SV + Vq
Aq + Eq = = = 2Sq + 2Vq

10 e 2. *Si recta* (2E) *ſecetur bifariam, eiq; recta quædam* (X) *indirectum adjiciatur; quadratum compoſitæ ex tota & adjecta* (Q: 2E + X: = Zq) *& quadratum adjectæ* (Xq) *ſimul ſumpta, ſunt dupla quadratorum dimidiæ* (2Eq) *et compoſitæ ex dimidia et adjecta,* (2Q: E + X: = 2Aq.) Hoc eſt, Si 2E + X = Z, & E + X = A; erit Zq + Xq = 2Eq + 2Aq.

Zq = Q: 2E + X: = 4Eq + 4EX + Xq	Q: E + X: = Eq + 2EX + Xq = Aq
+ Xq + Xq	+ Eq + Eq
Zq + Xq = 4Eq + 4EX + 2Xq dupl.	2Eq + 2EX + Xq = Aq + Eq;

Sed & hanc cum præcedente ſic conjunctim efferre licet.

Si

Si ab aſſignato, in eadem recta (utcunq; continuata) puncto M, *ſumantur tum utrinq; æquales rectæ* L M, M N, *tum punctum* D *ubivis: duo ſimul quadrata rectarum* L D, D N, *dupla ſunt duorum ſimul quadratorum rectarum* D M, M N, *vel* D M, M L. Hoc eſt DLq + DNq = 2 MDq + 2 MNq = 2 MDq + 2 MLq. quod ſic oſtenditur. ML = MN dicatur S. MD dicatur V. Duarum igitur DL, DN, (ubicunq; ſumatur D) altera erit S + V (ſumma duarum S, V,) altera S ~ V (differentia duarum S, V.) ut ſchematis inſpectu patet. Ideoq;

L M N
.... ———— ....
D D D D

Q: S + V = Sq + 2SV + Vq
+Q: S ~ V = Sq − 2SV + Vq
DLq + DNq = 2Sq + 2Vq = 2MLq + 2MDq.

Ubi notandum eſt S ~ V interpretandum eſſe nunc per S − V, nunc per V − S, prout S vel V major fuerit, hoc eſt, prout D fuerit intra vel extra puncta L, N. Sed quadratum utrobiq; tantundem erit, ut multiplicando patet.

S − V	V − S
S − V	V − S
Sq − SV	Vq − SV
− SV + Vq	− SV + Sq
Sq − 2SV + Vq =	Vq − 2SV + Sq

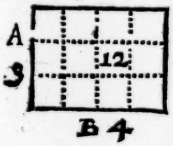
Atq; hactenus decem primores propoſitiones ſecundi Elementi Euclidis demonſtravimus Arithmeticè. Reliquæ quæ ſuperſunt quatuor, Arithmetice item demonſtrari poſſunt, ſed aſſumptis in auxilium aliis quam quæ adhuc expoſuimus principiis Geometricis, quibus itaq; impræſentiarum ſupersedendum duxi. Sed & aliæ paſſim apud Euclidem (alioſq;) propoſitiones occurrunt Geometricæ, quæ hujuſmodi calculo Arithmetico facillime demonſtrantur. Sufficit autem præſenti noſtro inſtituto ſpecimen in paucis exhibuiſſe.

CAP.

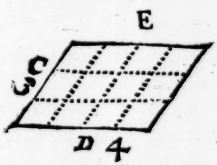
CAP. XXIV.

Geodæſia Parallelogrammi Rectanguli; Obliquanguli; cujuſvis. Menſuratio Trianguli Rectanguli; Obliquanguli; cujuſvis. Menſuratio cujuſvis figuræ rectilineæ. Menſuratio figuræ regularis. Menſuratio circuli, ejuſq; portionum, ſectorum, & ſegmentorum. De circuli quadratura, & ratione perimetri ad diametrum. De figuris miſtis. De figurarum metamorphoſi.

OStendimus (in Capite 22) methodum Parallelogramma Rectangula menſurandi, & inter ſe comparandi. Nempe *Parallelogrammi Rectanguli cujuſvis area, æqualis eſt quantitati quæ ex duarum rectarum circa angulum rectum, invicem ductu emergit.* Ut, ſi latitudo A = 3 ducatur in longitudinem B = 4, emergit area AB = 12. Adeoq;, verbi gratia, Rectangulum latum 3 pedes, & longum 4, continet pedes quadratos 12. quod etiam liquet in Parallelogrammo appoſito in 12 ſpacia quadrata diviſo, quorum ſingula latera ſint (puta) pedalia. *De Geodæſia Parallelogrammi Rectanguli.*



At interrogabitur forſan, Cur hoc ad Parallelogrammum Rectangulum reſtringatur; cum idem videatur dicendum de Obliquangulo. Puta, ſi lineæ C, D, circa angulum acutum, (vel etiam C, E, circa angulum obtuſum,) invicem multiplicentur, quarum altera ſit 3, altera 4 pedes longa; emergit numerus 12: ipſumq; Parallelogrammum Obliquangulum in totidem ſpacia dividitur æqualia, quorum item latera ſingula contineant (puta) pedem unum; non minus quam ſi eſſet parallelogrammum Rectangulum. *De Parallelogrammis Obliquangulis.*

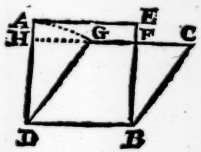


Reſpondeo; *Poſſe quidem Parallelogrammum, etiam Obliquangulum, in totidem ſpacia æqualia & ſimilia dividi, quot indicat mutua multiplicatio laterum duorum circa ipſius quemvis angulum conſtitutorum; eorumq; ſpaciorum latera eſſe æqualia, (puta unius pedis ſingula) non minus quam ſi parallelogrammum ſuiſſet Rectangulum. Sed nego ſpacia illa*

eſſe

esse pedes quadratos, aut quidem totidem quadratis pedibus æqualia, ut ut quatuor lineis pedalibus terminentur singula. Rhombi nempe sunt, non quadrata, propter obliquitatem angulorum, cum quadrata omnia (ex definitione) sint rectangula. Sed & *quadratis minora* sunt, propter eandem obliquitatem: quod ipsum evenit in aliis parallelogrammis omnibus, sive æquilatera sint, sive inæquilatera, hoc est, sive sint Rhombi sive Rhombidea; minora nempe sunt quam si essent rectangula, quamvis iisdem lineis terminata. Quod sic demonstro Geometrice: (quippe cum de solo situ agitur, qui ad Geometriam peculiariter attinet, demonstratio Arithmetica vix locum habet.)

Sit parallelogrammum Rectangulum A B, eiq; isoperimetrum Obliquangulum D C, ita ut latus D B sit utriq; commune, & D G ipsi D A æquale, (reliquaq; latera sibi oppositis parallela & æqualia.) Quamvis autem latera B C, D G, parallelogrammi obliquanguli, sint sigillatim æqualia lateribus B E, D A, parallelogrammi Rectanguli, (& reliqua reliquis;) est tamen ipsum parallelogrammum Obliquangulum D C, minus Rectangulo A B, æquale quippe Rectangulo H B. Producatur enim latus C G ad H: eritq; G H = F H, (quia tam C G quam F H æquantur ipsi B D, oppositio lateri in utroq; parallelogrammo; &, eadem ratione, H D = F B, & D G = B C, (sedet anguli ad B C, F, æquales angulis ad D, G, H,) æquale est igitur triangulum D H G, triangulo B F C, (eiq; congruit;) quorum priori si addatur commune segmentum B D G F, fit parallelogrammum rectangulum H B; sin posteriori, fit obliquangulum C D, quod igitur ipsi H B æquale est, & propterea minus quam A B, quod erat demonstrandum. Et similiter procederet demonstratio in parallelogrammo quovis obliquangulo.



Patet igitur 12 Rhombos Parallelogrammi propositi Obliquanguli A B, minores esse totidem Quadratis Rectanguli, C D, utut tam hæc quam illi quaternis lineis pedalibus terminentur.

Fig. pag. præced.

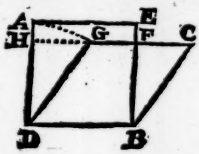
Si quæratur insuper, Quid impediat quo minus mensuras exprimere liceat per Rhombos æquè ac quadrata? Respondeo, Magnitudines explicandas esse per mensuras certas, (secus enim

nim de magnitudine non constabit,) ideoq; per Quadrata potius quam per Rhombos. Cum enim quadratorum omnium anguli recti sint, adeoq; invicem æquales, dato illic latere de magnitudine constabit; Rhomborum autem anguli cum possint magis minusve obliqui esse, dato latere non tamen de magnitudine constabit, quæ quidem major minorve erit, prout obliquitas minor majorve fuerit. Non igitur Rhombis sed Quadratis potius determinandæ sunt figurarum magnitudines.

Addo tamen, si non de Rhombis utcunq; sumptis, sed de Rhombis in certo quovis obliquationis angulo, agatur; non minus certa est Rhombi mensura quam Quadrati. Verbi gratia, in oblongo C D obliquangulo non minus certum est tot pedales Rhombos, in eodem, cum ipso oblongo, inclinationis angulo, contineri, quot in oblongo Rectangulo AB continentur Quadrata pedalia; (propter latera utrobiq; sigillatim æqualia.) Et quidem propositiones illæ omnes quæ superius (ex Euclide) demonstrantur de Quadratis & Rectangulis, non minus valent de Rhombis & Rhomboidibus in eodem quocunq; inclinationis angulo. Quod quidem notare magno esse potest usui Geometris.

Patet autem, ex jam dictis, methodus mensurandi Parallelogramma Obliquangula. Non quidem ex ductu DB in BC, sed DB in BF vel in D H. Cum enim, ut modo demonstratum est, Parallelogrammum Obliquangulum C D, æquale sit Rectangulo HB; eadem erit utriusq; area seu magnitudo. At ex ductu DB in EF, vel in DH, habetur area Rectanguli HB (per ea quæ dicta sunt Capite præcedente;) ergo & Obliquanguli C D.

Parallelogrammi Obliquanguli Geodæsia.



Hoc est, *Si in Parallelogrammo quolibet, (sive Rectangulo sive Obliquangulo,) a latere quovis ad oppositum ducatur perpendicularis, eaq; in eorum utrumvis multiplicetur, prodibit Parallelogrammi area.*

Atq; hujus quidem operationis ratio, præterquam quod jam fuerit demonstrata, hinc satis intelligi potest, si advertamus, quod, si in parallelogrammo quovis (puta GB) unum aliquod ex lateribus pro longitudine habeatur (puta D B,) ejusdem

dē latitudo æstimanda erit non ex linea utcunq; transversim ductâ (ita enim latitudo esset plane incerta, & modo major modo minor dicenda, prout illius transversæ lineę ad arbitriū sumptæ minor majorve fuerit obliquitas) sed ex linea directe sive perpendiculariter transeunte; puta non ex linea inclinata D G vel BC, sed BF vel DH. Et quidem si supponatur asserculus, in illa forma constitutus, longitudinem habere D B quantamcunq; ejus latitudo non æstimanda erit (ne quidem usu communi) quanta est DG, sed quanta est B F, aliave ejusmodi recta perpendiculariter ducta. Quæ quidem ut transeuntium omnium est brevissima, ita sola certa est; cum quæ oblique transeunt, pro variata obliquitate, variant etiam longitudinem.

Atq; hæc de magnitudine parallelogrammi dixisse sufficiat. Nempe, si *Parallelogrammum comparare libeat (non præcise ad quadratum, sed) ad Quadrangulum æquilaterum, (sive quadratum fuerit sive Rhombus,) quod exposito Parallelogrammo sit æquiangulum, hoc est, pariter inclinatum; ducenda sunt invicem duo latera ad eundem quemlibet angulum constituta: Si vero Parallelogrammum, utcunq; inclinatum, ad solum Quadratum comparare placeat; ducendum est latus quodvis in rectam ab eo latere ad latus oppositum perpendiculariter ductam.* Qui quidem duo rectarum invicem ductus, in parallelogrammo Rectangulo, tantundem valent; in Obliquangulo, non item.

Quæ autem de Multiplicatione jam dicta sunt, & de Divisione (mutatis mutandis) intelligenda sunt. Quippe *quod Multiplicatione conficitur, id Divisione dissolvitur.* Ut igitur ex datis longitudine & latitudine, (sive in Parallelogrammo rectangulo, sive obliquangulo,) habetur area multiplicando: sic ex data area cum longitudine, habetur latitudo; vel ex data area cum latitudine, habetur longitudo, dividendo. Atq; de Parallelogrammis hactenus.

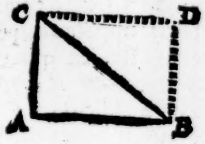
Cum autem Geodæsiam jam sim aggressus, hoc est, mensurationem Planorum; operæ pretium erit etiam alia breviter attexere quæ eò spectant, ut totum illud plana mensurandi negotium, saltem prout præsentis instituti ratio postulat, absolvam. Illud vero, quantum supereſt, mensuratione Trianguli fere totum perficitur.

Mensuratio Trianguli.

Est autem *Triangulum* (intellige *figuram planam tribus rectis terminatam*) vel *Rectangulum, cujus alter angulus est rectus* (nam plures

res esse recti non possunt;) vel *Obliquangulum, cujus omnes anguli sunt obliqui*: Hoc autem, vel *Obtusangulum, cujus unus aliquis angulus* (quippe plures non possunt) *obtusus est*; vel *Acutangulum, cujus anguli omnes sunt acuti.*

Aggrediar primo, Triangulum Rectangulum. Est autem *omne Triangulum rectangulum, Parallelogrammi rectanguli dimidium.* Si enim Parallelogrammum rectangulū quodvis (puta A D) diagonali linea (CB) secetur, dividitur illud in duo triangula (ABC, BCD,) ut patet; quorum utrumq; est rectangulum, (propter angulos ad A & D rectos;) sed & invicem æqualia, (propter angulos æquales rectos ad A & B, & latera respective æqualia;) & proterea utrumlibet parallelogrammi dimidium. Et contra, si Triangulum Rectangulum quodlibet (puta ABC) duplicetur, ita nempe ut latera secundi circa angulum rectum sint homologis lateribus prioris parallela, & latus reliquum utriq; triangulo commune, fiet rectangulum parallelogrammum. Si enim sumatur latus CD æquale & parallelum lateri AB, & similiter BD lateri AC, (quæ propterea convenient in angulo recto ad D,) habebitur triangulum expositio simile & æquale, complens parallelogrammum rectangulum. *Trianguli Rectanguli.*



His positis; cum ex jam dictis innotescat area parallelogrammi AD, innotescet etiam area trianguli A B C, quod nempe istius est dimidium. Est autem area parallelogrammi AD, quantitas producta ex ductu lateris A B in AC, puta AC × AB; adeoq; area trianguli (quippe illius semissis) $\frac{1}{2}$ AC × A B. Vel, si altitudo AC dicatur A, & basis A B dicatur B, erit area Parallelogrammi AB, area Trianguli $\frac{1}{2}$ AB. Ideoq;

In Triangulo Rectangulo, si laterum circa angulum rectum, ducatur alterum in alterius dimidium, emergit area Trianguli. Quippe dimidium areæ parallelogrammi. Atq; hinc quidem *ex datis trianguli rectanguli lateribus circa angulum constitutis* (quarum alterum Basim, alterum Altitudinem exhibet,) *multiplicando cognoscitur ejusdem area.*

A
B
2) AB.

Contra vero; *Ex cognitis area & laterum eorum uno, innotescit alterum*

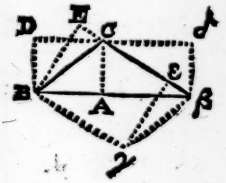
terum dividendo. Nempe, si duplum areæ (AB) per altitudinem dividatur, habetur Basis; sin per basin, habetur altitudo. Puta A)AB(B. B)AB(A. Atq; de Triangulo Rectangulo hactenus.

A)AB(B

B)AB(A

Trianguli Obliquanguli.

Trianguli Obliquanguli (sive Acutangulum sit, sive Obliquangulum,) calculus a Trianguli Rectanguli calculo dependet. Demissa enim ab angulo quovis in latus oppositum perpendiculari emergunt duo Triangula Rectangula; ex quarum calculo cognoscitur area Trianguli expositi. Exempli gratia, In triangulo B β C, ab angulo C demissa perpendiculari CA, (unde fiunt ad A anguli utrinq; recti) emergunt triangula rectangula CAB, CAβ. Si igitur CA dicatur A, AB dicatur b, Aβ dicatur β, & Bβ dicatur B = b + β: erit (per modo demonstrata) $\frac{1}{2}$ A b area trianguli CAB $\frac{1}{2}$ Aβ area trianguli CAβ ideoque $\frac{1}{2}$ Ab + $\frac{1}{2}$ Aβ = $\frac{1}{2}$ AB area totius CBβ = CAB + CAβ. Hoc est,



Si trianguli cujusvis Altitudo (sive perpendicularis a vertice ad basin) ducatur in semissem Basis, (vel Basis in semissem altitudinis,) emergit area trianguli

b + β = B

$\frac{1}{2}$ A $\frac{1}{2}$ A

$\frac{1}{2}$ A b + $\frac{1}{2}$ A β = $\frac{1}{2}$ A B

Notandum autem est, *quod in triangulo Obtusangulo, si ab utrovis acutorum angulorum demittatur perpendicularis* (ut nempe angulus ille acutus, puta B, habeatur pro vertice trianguli, & laterum breviorum alterum, C β, pro basi,) *perpendicularis illa* (puta BE) *cadet extra expositum triangulum in basin productam;* (quod Geometrice, si opus est, facile est probatu:) invariata tamen præcedentis regulæ veritate; quæ quidem hic Subductione colligitur, sicut in præcedente exemplo Additione. Quod sic ostenditur.

Trianguli BEβ rectanguli (propter angulum rectum ad E, demissa perpendiculari factum,) area habetur ex ductu altitudinis BE in $\frac{1}{2}$ Eβ, semissem basis; Trianguli vero BEC (pari de

de cauſa) ex ductu ejuſdem altitudinis BE in $\frac{1}{2}$EC ſemiſſem baſis ſuæ; Horum itaq; triangulorum differentia, quod eſt ipſum triangulum BCβ expoſitum, eſt $\frac{1}{2}$Eβ × BE − $\frac{1}{2}$EC × BE, quod tantundem eſt atq; $\frac{1}{2}$Eβ − $\frac{1}{2}$EC (hoc eſt $\frac{1}{2}$Cβ) in BE. (Nam Eβ − EC = Cβ, ideoque $\frac{1}{2}$Eβ − $\frac{1}{2}$EC = $\frac{1}{2}$Cβ, vel $\frac{E\beta - EC}{2} = \frac{C\beta}{2}$.) Itaq; & hoc pacto emerget area æqua-

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}E\beta - \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}C\beta \\ \times BE \\ \hline \frac{1}{2}E\beta \times BE - \frac{1}{2}EC \times BE = \frac{1}{4}C\beta \times BE \end{array}$$

lis ſemiſſi altitudinis in baſin ductæ.

Sed & idem aliter oſtenditur; (Atq; eadem opera, non modo Triangulum rectangulum, quod modo dictum eſt, ſed & *Triangulum quodvis rectilineum eſſe Parallelogrammi dimidium.*) Si Triangulum expoſitum BCβ (ſive Rectangulum, ſive acutangulum, ſive obtuſangulum) ſuper baſi Bβ conſtitutum (ita nempe ut perpendicularis a vertice cadat intra Triangulum) inſcribatur Parallelogrammo Rectangulo ſuper eadem baſe, eandem item altitudinem habenti cum ipſo triangulo, nempe Dβ. Cum enim triangula rectangula CAB, CAβ, ſint ſigillatim æqualia ſemiſſibus parallelogrammorum AD, Aδ; erit & aggregatum illorum, hoc eſt, Triangulum BCβ, ſemiſſi totius Dβ parallelogrammi (ex duobus AD, Aδ, aggregati) æquale.

Sin extra triangulum cadat perpendicularis (quod in triangulo Obtuſangulo fieri poſſe diximus) illud idem oſtenditur hoc pacto. Completo parallelogrammo BC$\beta\gamma$ (ductis nempe Bγ, $\beta\gamma$, lateribus trianguli BC, βC, parallelis) erunt duo triangula BCβ, $\beta\gamma$B, invicem ſimilia & æqualia, & propterea utrumvis, parallelogrammi ſemiſſis: At parallelogrammum illud æquatur rectangulo, altitudine BE vel γE, & baſi Cβ vel Bγ, comprehenſo (ut ſupra oſtenſum eſt) ergo Triangulum ejuſdem ſemiſſi æquatur: nempe ſemiſſi quantitatis factæ ex ductu baſis Cβ in altitudinem BE, vel quantitati factæ ex ductu ſemiſſis baſis in totam altitudinem, vel ſemiſſis altitudinis in totam baſin; quæ omnia tantundem valent; quippe

$\frac{C\beta \times BE}{2} = \frac{1}{2} C\beta \times BE = C\beta \times \frac{1}{2} BE$.

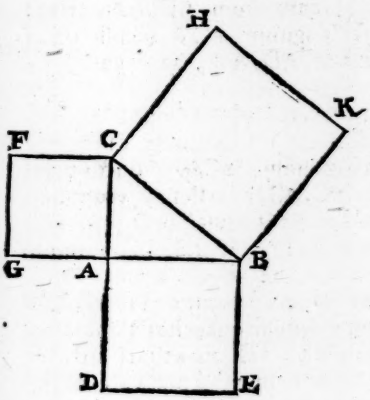
Trianguli cujuſvis.

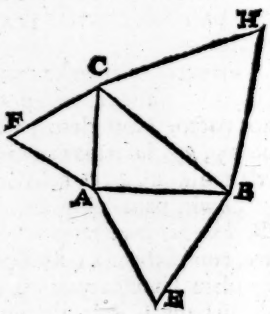
Patet igitur univerſim methodus menſurandi *Triangulum quodvis* (ſive Rectangulum ſive Obtuſangulum ſive Acutangulum.) Nempe, *a quovis ipſius angulo demiſſa in latus oppoſitum* (productum, ſi opus,) *perpendiculari; harum rectarum* (ſcil. perpendicularis, & dicti lateris,) *ſi altera in alterius ſemiſſem ducatur, prodibit area Trianguli.* Contra vero; *Si areæ duplum per earum rectarum alteram dividatur, habetur reliqua:* puta ſi per baſin, habetur perpendicularis ſive altitudo; ſi per altitudinem, habetur baſis. Atq; de Triangulis menſurandis hactenus.

Menſuratio figuræ cujuſvis rectilineæ.

Expoſita jam methodo menſurandi quodvis ſive Parallelogrammum ſive Triangulum; eadem opera & figuras alias rectilineas quaſcunq; menſurare docuimus: ſaltem ſi illud addatur *Figuram quamvis rectilineam vel in Parallelogramma dividi poſſe, vel ſaltem in Triangula*: Ex quorum igitur calculo, propoſitæ figuræ calculus ſtatim innoteſcit.

Exſempli gratia. Figurarum appoſitarum altera in tria Quadrata & unum Triangulum dividitur; Altera, in quatuor Triangula. Quæ ſi ſeorſim menſurentur; illorum aggregatum priori, horum poſteriori figuræ æquatur. Atq; eodem prorſus modo faciendum erit in figuris quibuſvis mulctangulis, præſer-



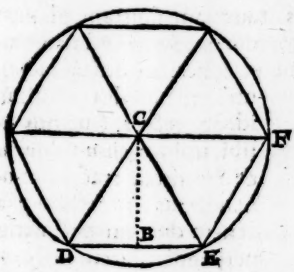


tim

tim irregularibus; resolutâ scilicet figurâ multangulâ in tot parallelogramma vel triangula quot figuræ ratio postulat, & prout calculo magis videbitur expedire; quod cujusq; prudentiæ permittendum erit.

Si vero figura mensuranda, quotcunq; demum, habuerit latera, Regularis sit; hoc est, *quæ tum omnia latera invicem æqualia, figuræ regutum omnes angulos item æquales habeat:* calculus sic commode poterit institui. *Invento figuræ regularis centro,* (quod & circuli sive inscripti sive circumscripti centrum est, ut ex principiis Geometricis liquet, & a singulis lateribus æqualiter distans;) *recta a centro in latus quodvis perpendicularis, si in semiperimetrum multiplicetur, figuræ regularis aream exhibebit.* *Mensuratio laris.*

Exsempli gratia. Sit Sexangulum regulare (puta æquilaterum & æquiangulum) circulo inscriptum. A centro C ad latus quodvis DE agatur perpendicularis C B; hæc ducta in semissem perimetri sexanguli, vel hujus semissis in perimetrum, exhibet totius aream. Nam, ductis cruribus CD, CE, formatur triangulum CDE, cujus area est C B × ½ DE, vel ½ C B × DE, (ut ex calculo trianguli superius tradito liquet.) Item, ductis insuper ab eodem centro C ad reliquos sexanguli angulos totidem rectis, constituentur tot triangula quot sunt figuræ latera; eruntq; ea singula triangulo CDE æqualia *(propter tum æquales rectas a centro, quippe quæ sunt radii circuli ambientis; tum æquales item rectas in ambitu figuræ, ut quæ supponitur æquilatera:) toties itaq; repetenda erit præcedens mensuratio, quot sunt figuræ latera, quia tot erunt triangula invicem æqualia; puta CDE = CEF, &c. figuram integram complentia. Hoc est, in exposita figura sexangulari, area trianguli C D E sexies repetita, exhibet totius aream, puta 6 C B × ½ D E vel ½ C B × 6 DE, vel C B × 3 DE; ducto nempe ½ C B semisse perpendiculi, in perimetrum 6DE; vel perpendiculari C B in semissem perimetri 3DE. Atque similiter faciendum erit in alia quavis figura regulari

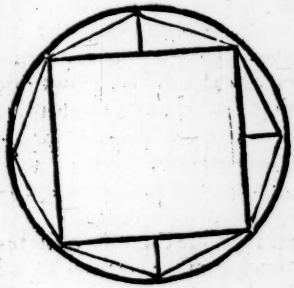


* per 4 e 1.

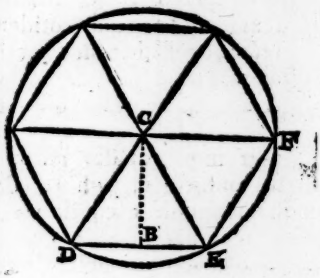
regulari sive plurium sive pauciorum laterum.

Mensuratio circuli, ejusq; portionum.

Quod autem de figura regulari rectilinea dictum est, idem & de circulo dicendum est. Est enim *circulus figurarum planarum omnium maxime regularis*; omnes enim a centro ad circumferentiam lineæ quorsumcunq; ductæ æquales sunt, & æquales ad circumferentiam constituunt angulos. *Omnes q; figuræ regulares, quò plura habent latera, eo propius ad circulum accedunt*; (ut, in appositio schemate, Octogonum magis quam Tetragonum; & pariter in aliis.) Quod si figura regularis supponatur laterum numero infinitorum, circulus erit. *Perinde enim est sive Peripheriam circuli unicâ lineâ curvâ constare dicamus, sive rectis numero infinitis.*



Si itaq; circulum consideremus tanquam figuram planam omnium maxime regularem, laterum numero infinitorum; omnesq; angulos, linea a centro ad peripheriam ducta factos, utrinq; æquales constitui, ideoq; rectos, (ut nos alibi, ubi *Angulum Contactus & Semicirculi* tractamus ostendimus,) rectamq; a centro ductam perimetro perpendicularem: *Quantitas producta sive ex ductu radii in semicircumferentiam, sive semiradii in circumferentiam, erit area circuli.* Puta $\frac{1}{2}$ CD × DEFD, vel CD × $\frac{1}{2}$ DEFD.



Sectorum.

Cognita autem methodo mensurandi circulum integrum, innotescit etiam methodus mensurandi portionem circuli (arcu & recta una pluribusve comprehensam.) Nempe, sicut $\frac{1}{2}$ CD in totam perimetrum DFD dat aream totius circuli; sic eadem $\frac{1}{2}$ CD in DE, perimetri sextantem, dat aream sextantis circuli

circuli; puta *Sectoris* DCE; eademq; $\frac{1}{3}$CD in DF, perimetri trientem, exhibet aream trientis circuli, puta sectoris DCF. Et similiter de Sectoribus aliis, qui arcu quovis & rectis duabus in centro C coeuntibus terminantur, judicandum erit.

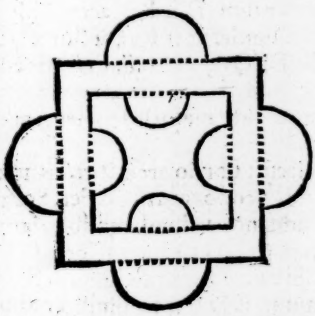
Sin mensurandum esset segmentum DEB, arcu DE rectaq; DBE comprehensum. Cognita mensurâ Sectoris DCE, si inde auferatur area trianguli DEC, quod restat est area segmenti minoris DEB. Atq; hoc quidem segmentum minùs, si ex integro circulo auferatur, relinquet majoris segmenti aream EFDB. *Segmentorum.*

Deniq;, Si alia quæcunq; circuli portio arcu & rectis utcunque positis contenta, mensuranda proponatur: id fiet, Sectori, super arcum illum constituto, addendo vel auferendo triangulum unum aut plura, prout res postulaverit. Puta si quod rectis ED, DC, CF, & arcu FE continetur, mensurandum sit; Sectori ECF, addendum erit triangulum EDC. Et similiter alibi.

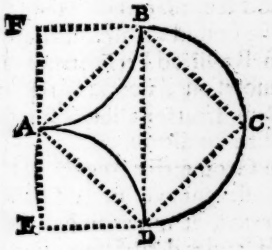
Quod autem de circuli mensura jam dicitur, aut segmentorum, non ita intellectum velim, acsi jam diu quæsitam circuli quadraturam hîc doceam. Utut enim Mathematice verum sit, Aream Circuli parallelogrammo quod semidiametro & semicircumferentiâ continetur æqualem esse, (quod ab Archimede demonstratis convenit:) Ratio tamen Radii ad Perimetrum circuli, ita ut uno cognito alterum innotescat, nondum reperta est numeris explicabilis, ne quidem irrationalibus, (fortasse nec reperienda, de quo alibi a nobis fusius dictum est, in nostra *Arithmetica Infinitorum:*) neq; etiam Geometrice Regulâ & circino exhibenda. Quod cum se inveniisse putaverint post alios, *Josephus Scaliger, Severinus Longomontanus,* & nuperrimè *Thomas Hobbes,* immortales sibi inde singuli laudes deberi somniantes, mirè hallucinati sunt. Quæ autem vulgo recepta est proportio seu ratio perimetri circularis ad suam diametrum, quæq; a vera non multum abest, est tripla sequiseptima, sive ut 22 ad 7, aut $3\frac{1}{7}$ ad 1; quod ab Archimede jam olim demonstratum est, (nempe minorem esse quam $3\frac{1}{7}$, majorem vero quam $3\frac{10}{71}$.) estq; hæc ratio satis accurata quæ vulgaribus mensurationibus applicetur. Siquis autem accuratiorem quærat, poterit ille a *Ludovico van Culen, Willebrordo Snellio,* aliisq; qui rem illam tractarunt, petere; vel, si malit, suo calculo investigare, ut proportionem *De Circuli quadratura.* *Ratio perimetri circularis ad diametrum.*

portionem habeat quamlibet accuratam, modo non Mathematice exactam. Sed de circulo ejuſq; portionibus hactenus.

Menſuratio figuræ miſtæ. Siquando figura menſuranda occurrat mixta, ſive variis lineis circularibus, vel etiam circularibus ſimul et rectis, terminata; inveſtigabitur ipſius area, eandem in figuras ſimpliciores dividendo, & per partes menſurando. Ut, in ſchemate appoſito; ut habeatur area figuræ exterioris, areæ quadrati, addendæ ſunt quatuor ſemicirculorum areæ; Figuræ item interioris area, totidem ſemicirculis ex area quadrati ſubductis inveſtigatur.



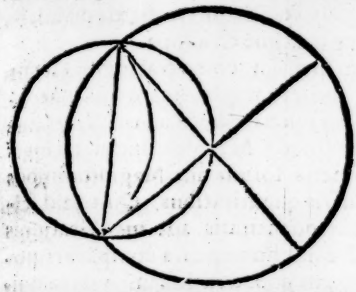
De figurarum Metamorphoſi. Nonnunquam vero ſola figurarum Metamorphoſi res erit facilitanda. Ut, ſi menſuranda ſit figura *Pelicoïdes* dicta (linea ſemicirculari concava B C D, & duabus quadrantalibus convexis, A B, A D, terminata,) æquabitur illius area vel areæ quadrati A B C D, vel Parallelogrammi B D E F. Tantundem enim ſive Quadrato ſive Parallelogrammo ex una parte accedit, quantum ex altera parte aufertur.



Et ſimiliter, Lunula, quæ arcu quadrantali majoris & ſemicirculari minoris circuli continetur, æquatur triangulo, iſti ſive quadranti ſive ſemicirculo, inſcripti. Ut ex Hippocratis Chii *quadratura Lunulæ* notum eſt: & appoſito ſchemate exhibetur. *Nempe in ſequente pagina.* *Fig. Seq.*

Et ſimiliter alias non raro faciendum erit. Quod breviter inſinuaſſe ſufficiat.

Atq; hoc quidem omnino utile eſt in figuris maxime irregularibus, quorum ambitus neq; rectis neq; circularibus lineis terminatur.



terminatur. Sufficit quippe practico Geometræ, si quam fieri potest proxime, hic addendo, illic tãtundem detrahendo, ad huic æqualem rectilineam reducat. Quod quò fiat, consilium in arena capiendum.

Atq; hactenus quidem universæ prope planorum Geodæsiæ fundamenta breviter tradidi. Quo, tum Multiplicationis tum Divisionis exercitium ostenderem; tum Arithmetices in Geometricis utilitatem, & utriusq; simul scientiæ affinitatem patefacerem.

CAP. XXV.

Numerorum invicem comparatio. Aliarum item quantitatum: sed nonnisi invicem homogenearum. Comparantur tum quoad Differentiam, tum quoad Rationem. Harum comparationum ab invicem discrimen. Differentia subductione investigatur: Ratio, Divisione; sed eâ tantum quæ est quantitatum homogenearum. Quantitatum ad heterogeneas Applicatio, quatenus ad Divisionem referenda sit. Rationes omnes invicem homogeneæ: non item omnes Differentiæ. Ratio an ad quantitatem, an potius ad Qualitatem pertineat. Progressio Arithmetica & Geometrica: Continua, & Disjuncta. Proportionalium notatio. Proportio Harmonica.

TRadidimus, in Præcedentibus, celebres illas Arithmeticæ Practicæ sive Species, sive potius Partes; *Additionem, Subductionem, Multiplicationem*, & *Divisionem*: quibus, ut instrumentis, quæ deinceps tradentur sunt peragenda.

Hinc autem oritur duplex Numerorum (vel etiam aliarum quarumlibet quantitatum homogenearum) invicem comparatio. Altera secundum *Differentiam*, altera secundum *Rationem*. *Comparatio invicem*

sive *Proportionem*. Illa Additionis & Subductionis, Hæc Multiplicationis & Divisionis naturæ maxime est affinis.

Aliarum itē quantitatum. Quo autem has numerorum invicem comparationes rectius instituamus, sciendum est Primo; tum quæ nos de Numerorum invicem comparatione jam sumus tradituri, tum quæ Euclides per totum librum quintum de Magnitudinum ad invicem ratione tradit; non Numeris solum aut Magnitudinibus competunt, sed & aliis quibusvis quantitatibus. Quicquid scilicet vel per se vel per accidens quantitatis aut mensurationis capax est, eatenus etiam ad alia sibi homogenea comparari potest, tum quoad differentiam, tum quoad rationem; quippe quibus æquale esse potest aut inæquale.

Sed tantum homogeneorum. Sciendum secundo; res invicem comparandas esse secundum commune quiddam quod utrisq; comparandis inest, aut quidem inesse supponitur; non autem juxta quicquam quod illis vel alteris vel utrisq; est alienum. Et propterea quantitates non nisi *homogeneas* comparandas esse, & quidem prout sunt homogeneæ. Sic lineas lineis comparamus, & superficies superficiebus, corpora item corporibus, & numeros numeris, ponderaq; ponderibus, aliasq; quantitates non nisi quantitatibus sibi homogeneis. Siquis autem contrarium fecerit, putà datæ lineæ ad datam superficiem, vel temporis ad lineam, &c. rationem sive proportionem inquirens, vel etiam unius super alterum excessum: idem erit acsi quæsiverit quot liniæ constituant superficiem, vel quantum temporis æquetur lineæ, sive quot longitudines efficiant latitudinem; quod non minus absurdum esset quam si quæratur Quot colores constituant Sonum, & quot Soni constituant Gravitatem. Hoc ipsum tamen scisciteri videntur nonnulli de rebus hujusmodi parum intelligenter philosophantes, dum lineas ex punctis constare somniant, & ex lineis superficies: Nescientes interim se idem agere atq; si numeros omnes ex ciphris, sive nullitatibus, componi affirmarent: quippe punctum nihil habet longitudinis, nec latitudinis linea.

Tum quoad Differentiam tum quoad Rationem. Sciendum porro, Res homogeneas, & comparationis invicem capaces, comparari posse (juxta illam qua homogeneæ sunt mensuram) dupliciter. Vel enim simpliciter de Differentia sive excessu quæritur; scilicet, num inter se differant & Quantum differunt; An & Quanto alterum altero majus est

aut

aut minus: Vel de Ratione; puta quotuplum vel quantuplum sit hoc illius; num hoc illud contineat semel, bis, ter, &c. aut semel cum semisse, bis cum triente, &c. Utrovis modo comparatorum, alterum *Antecedens* dici solet, alterum *Consequens:* quorum quidem illud Relatum est, hoc Correlatum: Nempe illud, cujus ad alterum relatio exponitur; hoc, cui illud sic relatum perhibetur. Puta si A ad B comparatur; A dicetur Antecedens, B Consequens; dum scilicet A dicitur majus esse quam B, vel minus, vel æquale; aut etiam A ipsius B duplum, triplum, semissis, &c.

Priori quæsito satisfit, si ostendatur res comparatas æquales esse; vel, si inæquales, quanto hæc illam excedit, vel hanc illa. Verbi gratia, Linea bipedalis est bipedali æqualis; & numerus binarius binario; ejusdem item rei (vel etiam æqualium) semisses sunt invicem æquales; & pariter in aliis. Contra vero; numerus octonarius senarium, & hic itidem quaternarium, duabus unitatibus superat; linea tripedalis bipedali est uno pede longior; quadripondium quam tripondium est uno pondo gravius; atq; in aliis pariter. *Earum comparationum ab invicem discrimen.*

Secundo quæsito satisfit, ubi ostenditur Quotuplum sit hoc ad illud, sive quam rationem (ut dici solet) vel proportionem habeant inter se. Hoc modo dicimus, quadripondium bipondii duplum esse; numerum senarium binarii triplum; lineam tripedalem bipedali sesquialteram; unitatem binarii semissem esse, aut subduplam, aut etiam dimidium; binarium item binario æqualem esse, vel in ratione aut proportione simpla; & pariter alibi.

In priori, ubi de Differentia sive Excessu quæritur, Rationis sive Proportionis nulla ratio habetur: In posteriori, de Ratione sive Proportione quæritur, Differentiâ interim minime consideratâ. Sic quaternarius ternarium, & ternarius binarium, eodem Excessu superant; sed non in eadem Ratione: excessus enim utrobiq; est Unitas; at ratio illic Sesquitertia, hic Sesquialtera. Contra vero, quaternarius binarium, & binarius unitatem, eadem Proportione superant; sed non eodem Excessu: Est enim proportio sive ratio utrobiq; Dupla; at excessus istic quidem Duarum unitatum, hic autem Unius.

Prioris quæsiti solutio, Subductione investigatur. Si subducatur enim numerus ex numero, quod restat est Excessus *Differentia Subductione investigatur.*

ceſſus ſive differentia. Ita ſi ex 12 auferantur 10, reſtant 2; duabus itaq; unitatibus, hoc ille major eſt, hic illo minor numerus. Si ex tripondio bipondium auferatur, exceſſus reperitur eſſe Unius pondo. Nempe, ſi peracta ſubductione nihil vel ſuperſit vel deficiat, Æquales ſunt illæ quantitates: ſin ſecus, inæquales; quippe Major illa, ubi aliquid redundat; Minor, cui aliquid deeſt, quo minus alteri ſit æqualis.

Ratio inveſtigatur Diviſione.

Poſterioris ſolutio Dividendo inveſtigatur. Diviſionis nempe quotiens oſtendit rationem Dividui ad Diviſorem. Sic ſi 12 per 6 dividantur, prodibit Quotiens 2; cui cognominis ratio *Dupla*, illa eſt quam habet numerus 12 ad 6. Item quadrupondium eſt bipondii duplum; quia ſi 4 pondo per 2 pondo dividantur, prodibit quotiens 2: quippe toties hoc illo pondus continetur. Et propterea, *Ubi quotientes invicem æquantur, ibi & quantitates in eadem ratione conſtitutæ* intelligantur. quippe *Ratio* ex *Quoto* æſtimatur; adeoq; & ex horum æqualitate æqualitas earum.

Sed eâ tantum quæ eſt quantitatum homogenearum.

Verum interim notandum eſt; de illa tantum Diviſione jam agi, qua quantitas per aliam quantitatem ſibi homogeneam dividitur: (quippe homogenearum tantum quantitatum eſt ad invicem ratio.) Qua Quotiens ſemper ſit numerus, vel quid numero homogeneum, quod quæſtioni *Quot* vel *Quoties* reſpondeat. Sic ratio 4 A ad A (ſive ſint illæ duæ lineæ, vel duæ ſuperficies, vel duo pondera, vel duæ aliæ quæcunque quantitates homogeneæ,) eſt quadrupla, quia A) 4A (4; nempe quantitas 4A, quantitatem A, continet quater. Sic ratio 3A ad 2A eſt ſeſquialtera, ea nempe quæ eſt 3 ad 2, quia 2A) 3A ($1\frac{1}{2}$; nempe major minorem continet $\frac{1}{2}$ vicibus, ſive ſemel cum ſemiſſe, ſive toties quoties 3 continent 2. Sic ratio rectanguli VB ad AB eſt $\frac{V}{A}$, quia AB) VB ($\frac{V}{A}$; nempe rectangulum VB toties continet rectangulum AB, quoties recta V continet rectam A. Sic ratio 6 ad 2 eſt tripla, quia 2) 6 (3. Ratio 6 ad 4 eſt ſeſquialtera, ſive ea quæ 3 ad 2, quia 4) 6 ($\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Sic 3) 2 ($\frac{2}{3}$. A) V ($\frac{V}{A}$. Et in aliis ſimiliter.

Atq; hinc eſt, quod ratio alterna non ubiq; obtinet; ſed ſolum in quatuor proportionalibus homogeneis. (Quod notant interpretes ad 16 e 5.) Puta, ſi pondus A ad pondus B, ut linea α ad lineam β: non tamen dici poteſt, pondus A ad lineam α, ut pondus B ad lineam β. Ob cauſam jam aſſignatam.

Ideoq;

Ideoq; quotieſcunq; de proportione alterna, ſeu permutata agitur, (aliave quæ hanc involvat;) hæc ſemper ſubintelligenda cautio, etiamſi non deſertis verbis adjuncta fuerit. Qua de re plura deinceps dicentur ubi propoſitionem illam Euclidis 16 e 5 tractabimus.

Ea vero Diviſio ſive Applicatio, qua, verbi gratia, rectangulum AB applicari dicitur ad latus vel altitudinem A ut proveniat baſis B, vel contra; nempe A) AB (B, vel B) AB (A; vel etiam qua ſolidum ABC applicatur ad planum BC ut proveniat latus A, vel ad rectam A ut proveniat planum BC; nempe BC) ABC (A, vel A) ABC (BC; aliæq; hujuſmodi; nonniſi καταχρηστικῶς Diviſiones vocantur: nec præſenti negotio ſunt accommodæ. Quod enim prodit, *Quotiens* proprie non eſt, nec quæſtioni *quot* aut *quoties* reſpondet. Quippe quæ de *numero* quærit (aut quod numero eſt homogeneum) non de magnitudine, aliave quantitate numero heterogenea. Nec quidem Applicationes illæ, ad Diviſionem, alio nomine videntur referendæ, quam prout quantitates illæ ſingulæ ad inſtar numerorum conſiderantur. Non enim quæritur, quoties linea A in ſuperficie rectangula AB continetur; aut quoties vel A linea, vel BC planum, continetur in ſolido ABC: (quippe hoc omnino eſſet incongruum.) Sed, quoties *numerus* puta quadratorum in area parallelogrammi AB, contineat *numerum* longitudinum in latere A, ut proveniat *numerus* longitudinum in latere reliquo B. Item, quoties *numerus* cuborum in ſolido ABC contineat, vel *numerum* longitudinum in recta A, ut habeatur *numerus* quadratorum in baſi BC; vel *numerum* quadratorum in baſi BC, ut habeatur *numerus* longitudinum in recta A.

De quantitatum ad heterogeneas Applicatione, quid ſentiendum.

Sed & ubi magnitudo aliqua numero dividitur, puta 2) $A\left(\frac{A}{2} = \frac{1}{2}A\right.$, non tam diviſio eſt (ſaltem quæ præſenti negotio conveniat) quam multiplicatio; (nempe quantitas A non tam dividitur per 2, quam multiplicatur per $\frac{1}{2}$;) quippe non quæritur, quoties *numerus* 2 contineatur in *magnitudine* A (quod abſurdum eſſet) ſed datæ quantitati A, alia in data ratione quæritur; quod *Multiplicationis* eſt, potius quam *Diviſionis*; quippe quæ in Multiplicatione Ratio datur, in Diviſione quæritur.

Atq; hinc patet, *Rationes omnes, quarumcunq; ad invicem quantitatum*

Rationes omnes invicem homogeneæ.

Atq; hinc patet, *Rationes omnes, quarumcunq; ad invicem quantitatum, esse inter se homogeneas.* quippe in genere numeroso omnes. Utut enim, verbi gratia, Linea & Pondus, sint res plane heterogeneæ, nec rationem ad invicem habeant; Ratio tamen Lineæ ad Lineam, & Ponderis ad pondus, sunt plane homogeneæ; puta ratio lineæ bipedalis ad pedalem, & Bipondii ad pondo, homogeneæ sunt, imo eadem ipsa ratio, puta dupla: nam si instituatur Divisio erit utrobiq; quotiens 2. Et quidem dum quærenti, Quotuplum sit hoc illius, respondetur, Duplum, Triplum, Quadruplum, Sesquialterum, Sesquitertiũ &c. tantundẽ est atq; si quærenti, quot vicibus hoc illud contineat, respondeatur, Duabus, tribus, quatuor, una cum semisse, una cum triente, &c. Atq; hoc perinde sive de lineis sive superficiebus sive aliis quibusvis quantitatibus invicem homogeneis quæratur. Et quidem ubi non distincte indicatur quoties, sed per circuitum, eodem tamen res recidit. Nam si dicatur eandem esse rationem, verbi gratia, solidi VBq ad ABq, quæ est rectæ V ad rectam A; de numero tamen respondetur, nempe toties VBq continere solidum ABq, quoties recta V continet rectam A; utut non distincte dicatur quoties vel hoc vel illud fiat.

Sed non item omnes differentiæ.

Atq; hinc quidem amplum emergit discrimen, inter duas quas diximus quantitatum homogenearum comparationes: quamvis enim tam quæ quoad Differentiam, quam quæ quoad rationem, instituitur comparatio, non fit nisi inter homogeneas: quæ tamen ex comparatis homogeneis emergit Ratio, cum Ratione quæ ab aliis invicem homogeneis, sed ad priores illas heterogeneis, emergit, comparari possit ut quid homogeneum; quod interim in comparatione quoad Differentiam non obtinet. Exempli gratia; Si comparatur quoad rationem quadripondium ad bipondium, ratio est dupla; si linea quadripedalis ad pedalem, ratio est quadrupla: quæ rationes invicem comparari possunt; nempe hæc illius dupla est. At, si quoad differentiam instituatur comparatio; quadripondii & bipondii, differentia est Bipondium; Lineæ quadripedalis & pedalis, differentia est linea tripedalis: Harum vero Differentiarum nulla poterit comparatio institui (vel quoad differentiam vel quoad rationem) cum linea tripedalis, & bipondium, sint quantitates plane heterogeneæ: altera in genere Lineæ, altera in genere Ponderis.

Causa

Causa hujus discriminis hæc est; Quoniam ubi comparatio instituitur quoad Differentiam, Residua sive Excessus ejusdem semper sunt generis cum comparatis (quippe totum & pars sunt invicem homogenea;) adeoq; si hæc bina comparata, sint binis illis heterogenea, etiam horum differentia heterogenea erit differentiæ illorum, & propterea comparationis incapax. Ubi autem comparatio fit quoad Rationem, quæ emerget ratio comparatorum genus non raro deserit, & transit in genus numerosum, cujuscunq; sint generis quæ comparantur; & propterea, utut bina comparata binis comparatis aliis heterogenea sint, ratio tamen rationi homogenea est, ut comparationi locus fit. Et quidem cum duplum & dimidium, triplum & trions, &c. perinde pro rationum nominibus habenda sint; dimidii autem & trientis notæ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, numeris (fractis) accenseantur; quidni & dupli, triplive notæ $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, vel 2, 3. Atq; hac potissimum de causa, ego totam Rationum doctrinam Arithmeticæ potius quam Geometricæ speculationis esse autumo; totumq; Euclidis Elementum quintum Arithmeticum esse, utut speciatim de Magnitudinibus efferantur propositiones, quæ interim non minus recte de Quantitatibus simpliciter quibusvis efferri possent. *Discriminis causa.*

Fortasse autē dicendum insuper erit, comparationem quæ est quoad differentiam, simpliciter ad *Quantitatem* πλικότητα, referendā esse; at quæ quoad Rationē, ad *Qualitatē* ποιότητα. Eo enim respicere videtur quæ apud Euclidem exstat Rationis definitio, Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ χέσις 3 d 5. Cur enim ποιὰ χέσις reddatur *quædam habitudo*, (quod solent interpretes,) non video; mallem *habitudo qualitativa*. Ut enim figuræ *Magnitudo* (quanta sit) ad Quantitatem referri solet; at *Species* figuræ, lineæve (qualis sit,) quæ in terminorum, partiumve homologarum ratione ad invicem maxime consistit, ad *Qualitatem* (quartam nempe istius speciem:) quidni & in præsenti negotio similiter faciendum sit; ut nempe comparatio quæ est quoad Differentiam dicatur comparatio *Quantitativa*; at quæ secundum Rationem, *Qualitativa*. Unde, ex rationum identitate, non tam oritur *Æqualitas* (quæ quantitatum est affectio) quam *Similitudo*, quę qualitates magis quam quantitates respicit. *Differentia Quantitatem respicit, ratio Qualitatem.* *Æqualitas, quantitatum est; similitudo qualitatum.*

Ex dictis itaq; patet, quid sit quantitates invicem homogene-

as, tum quoad Exceſſum ſive Differentiam, tum quoad Rationem ſive Proportionem, invicem comparare. Nempe illic quæritur, quanto ſit hoc illo majus, vel contra; cui Subducendo ſatisfaciendum eſt: hic, quotuplum vel quantuplum ſit hoc illius, vel hujus illud; cui ſatisfaciendum eſt Dividendo. Illic exceſſus prodit, ſive differentia; hic quotus, ſive ratio.

Progreſſio duplex.

Ex duplici autem hac ſive Numerorũ, ſive quantitatum quarumlibet homogenearum, comparatione; duplex oritur, quæ tradita eſt, *Progreſſio*; quarum altera *Arithmetica* dicitur, altera *Geometrica*: (nominibus, credo, merè ad placitum impoſitis; cum utravis perinde Arithmeticam Geometriamve ſpectet; quæ tamen cum hactenus obtinuerint, per me immota ſunto.) *Progreſſionem* autem diceremallem quam vel *Proportionem* vel *Proportionalitatem*, (quamquam non ignorem voces has non minus quam illam, & forſan ſæpius, apud authores hoc ſenſu occurrere;) ea potiſſimum de cauſa ut vocum ὁμωνυμία vitetur. Nam *Proportio* non raro vel apud Mathematicos non tam ἀναλογίαν, quam λόγον, *rationem* ſignificat, & quidem jam fere obtinet ut *ratio* & *proportio* Mathematicis promiſcue uſurpentur, aliis vero ſcriptoribus *rationis* vox hoc ſenſu rarius occurrat, ſed eo ſenſu in communi loquela *proportionis* vox ut plurimum uſurpetur quo apud Mathematicos *Ratio*. *Proportionalitas* autem, utut de progreſſione Geometrica minime diſpliceat, ut quæ tantundem valeat, an tamen ad progreſſionem Arithmeticam ita commode referenda ſit haud mihi conſtat. Quippe *Proportionalitas*, vi vocis, *proportionum* tantum, hoc eſt *rationum*, comparationem videtur innuere, non item *differentiarum*. Quod vero nonnullis placet, ut & *differentia* vocetur *ratio Arithmetica*, (& Ratio ſimpliciter ſumpta, *ratio Geometrica*,) non mihi admodum placet, cum λόγον (ſive *rationem* ſive *proportionem*, libeat interpretari,) non niſi de ea, quam vocant *rationem Geometricam*, apud Euclidem uſurpari video, neſcio an apud Veterum quemvis alium; quod & de *proportionis* voce perinde intelligendum videtur. Cum vero mos ille loquendi jam obtinuerit, nos etiam eadem nonnunquam utemur formula; *Arithmetice proportionalia* appellando, quæ ſunt in progreſſione arithmetica, conſtituta.

Progreſſio Arithmetica.

Progreſſio Arithmetica dicitur, ubi numeri plures (aliæve quantitates invicem homogeneæ) æqualibus differentiis (ſive exceſſibus ſive defectibus) procedunt. Ut 2, 4, 6. 8. &c. &

3;

3. 5. 7. 9. &c. & contra 9. 7. 5. 3. &c.

Progressio Geometrica, ubi plures numeri (aliæve quantitates invicem homogeneæ) eadem (vel æquali) ratione sive proportione progrediuntur. Ut 2. 4. 8. 16. 32. &c. & 3. 9. 27. 81. 243. &c. & 8. 12. 18. 27. &c. & contra 32, 16, 8, 4, &c. & pariter in similibus. Ut enim progressio Arithmetica, æqualitatem Differentiarum spectat; sic Geometrica, Rationum sive æqualitatem sive identitatem dicas: Unde illic *communis excessus* sive *differentia*, hic *communis ratio* sive *proportio*, progressionis *speciem* determinat. *Progressio Geometrica.*

Harum autem Progressionum utraq; (tum Arithmetica tum Geometrica) est vel *Continua*, vel *Disjuncta*, (sive discreta, discontinua, interrupta;) Illa, ubi quantitates continue positæ æqualibus aut differentiis aut rationibus ubiq; procedunt. Hæc, ubi eadem quidem differentia aut ratio identidem redit, sed non continue. In illa, quilibet terminus intermedius tum antecedens est tum consequens, communis sive differentiæ sive rationis; In hac, non item. Sic 3, 5, 7, 9, 11, vel 11, 9, 7, 5, 3, sunt in progressione arithmetica continua (vel, si libet, Arithmetice proportionales continue,) quia quilibet numerus illic antecedentem, hic consequentem, binario superat. At 3, 5; 9, 11. vel 9, 11; 5, 7. sunt in progressione arithmetica disjuncta sive interrupta constituti; nam eodem excessu secundus primum, & quartus tertium superet, at non item tertius secundum. Et pariter 5, 3; 11, 9; 17, 15; 19, 17. sunt in eadem progressione arithmetica, sed interrupta. Eodem modo, 2. 4. 8. 16. 32. &c. vel 32. 16. 8. 4. &c. sunt in progressione Geometrica continua; quippe illic numerus consequens antecedenti suo est ubique in ratione dupla, hic dimidia sive subdupla. At 2. 4 :: 3. 6 :: 4. 8. sunt quidem in eadem progressione Geometrica, sed interrupta; quippe secundus primum, & quartus tertium, & sextus quintum eadem ratione superant; sed non item tertius secundum, vel quintus quartum. Similiter, de 4. 1 :: 12. 3. dicendum est, qui quidem numeri sunt geometricè proportionales, sed non continue. *Progressio est vel continua vel disjuncta.*

Et quidem (quod semel dictum esto) hujusmodi sive numerorum sive quantitatum designatio A. B :: C. D, in sequentibus sæpissime intelligatur quantitates designare proportionales (Geometrice intellige) saltem discontinue, nempe qua ratio- *Proportionalium notatio.*

ne A ad B, eadem & C ad D. Hujusmodi autem A.B.C.D ∷ notabit easdem esse continue proportionales. Progressio autem Arithmetica, ubi opus est, sic poterit notari A, B, C, D; vel, si continua fuerit, A, B, C, D ∷

Atq; hactenus tum duplicem quantitatum invicem comparationem satis aperuisse videamur; tum utriusq; progressionis, Arithmeticæ scilicet & Geometricæ, naturam, quas in sequentibus capitibus fusius prosequar.

Progressionem autem sive *proportionalitatem Harmonicam* vel *Musicam* dictam, cum ad scopum nostrum minus videatur pertinere, omittendam censui. *Ea vero est* (siquis quæ sit scire desiderat) *quando in quatuor terminis est ut primus ad quartum, sic differentia primi & secundi ad differentiam tertii & quarti.* Puta si A. D :: B ⎽ A. D ⎽ C. Erunt illæ quantitates A, B, C, D, harmonice proportionales. Sic numeri 5, 8, 12, 30. quia 5. 30 :: 8 ⎽ 5 = 3. 30 ⎽ 12 = 18. Vel etiam, *tres quantitates Harmonice proportionales sunt, si ut prima ad tertiam, sic differentia primæ & secundæ, ad differentiam secundæ & tertiæ.* puta A. C :: B ⎽ A. C ⎽ B. erunt, hoc casu tres A, B, C, Harmonice proportionales; vel, si libet, quatuor A, B, B, C. Sic numeri 3, 4, 6, vel 3, 4, 4, 6. Nam 3. 6 :: 4 ⎽ 3 = 1. 6 ⎽ 4 = 2. Quod innuisse sufficiat.

Proportio Harmonica.

CAP. XXVI.

Progressio Arithmetica variorum problematum familiarium solutione explicatur.

DE Arithmetica Progressione continua, solent hujusmodi proponi Problemata, aliaq; multa his similia.

Problemata Progressionem Arithmeticam spectantia.

1 Dato termino primo, & communi terminorum excessu; terminum ultimum, aliumve in progressione quemlibet, investigare.

2 Dato termino primo, communi item excessu, & numero terminorum; summam terminorum omnium invenire.

3 Dato termino primo, cum excessu communi, & alterius cujusvis termini valore; invenire quoto loco in serie terminus ille

ille reperitur. Vel (quod perinde est) dato termino primo, & ultimo, cum excessu communi; invenire numerum terminorum.

4 Dato terminoprimo, & ultimo, cum numero terminorum; communem excessum investigare.

5 Dato numero terminorum, cum terminorum omnium aggregato, & excessu communi; primum terminum invenire.

Per terminum primum jam intelligo (quod & deinceps intelligatur) terminum minimum; & per ultimum, maximum. Quamvis enim progressio, sive crescendo sive decrescendo fieri possit; ego tamen tanquam crescentem considero, atq; eo sensu quæ dicenda sunt intellecta velim. Et propterea, siquis ea decrescenti seriei accommodare velit, id fiet mutatis tantum his vocibus primo & ultimo. Nempe quæ jam de primo crescentis dicuntur, illic de termino ultimo decrescentis seriei intelligenda erunt; quæ hic de ultimo, illic de primo. Quod semel dictum esto, ne sæpius opus sit utrumque casum seorsim proponere.

Exempli gratia. 1. Siquis iter conficiens ambulaverit primo die 3 milliaria, secundo 5, tertio 7, & sic deinceps, diurnum iter quotidie augendo binis milliaribus; Quæritur quot milliaria ambulaturus est die Decimo? *Solvuntur.*

Quoniam singuli dies post primum, addunt incrementum duorum milliarium; multiplicetur numerus dierum post primum, nempe 9, in communem excessum 2; & productum $18 = 9 * 2$, addatur itineri primi diei, eritque $21 = 18 + 3$ numerus quæsitus: tot nempe milliaria confecturus est die decimo.

2 Si quæratur insuper, Quot toto itinere ambulaverit?

Additis termino primo & ultimo (ita ut jam dictum est invento,) ducatur summa in numerum terminorum: producti dimidium est numerus quæsitus. Puta $3 + 21 = 24$; & $24 * 10 = 240$; hujus numeri semissis, 120, est numerus milliarium toto decem dierum itinere confectorum.

3 Si quæratur, Quoto itineris die ambulaverit 15 milliaria?

Ex numero assignato 15, auferatur terminus primus 3; & residuum per communem excessum dividatur: quod prodit, indicat quot diebus post primum ambulaverit. Nempe $15 - 3 =$ 12,

12, & 2) 12 (6. Septimo igitur die, (sive post primum sexto,) ambulantur milliaria 15.

4 Si ambulaverit primo die 3 milliaria, decimo 21; & quæratur communis excessus.

Demantur ex termino maximo minimus: quod restat dividatur per numerum terminorum post primum; Quod prodit est communis excessus. Nempe 21 — 3 = 18. & 9) 18 (2. ergo communis excessus est, duorum milliarium.

5 Si totum iter milliarium 120, diebus 10 confectum, quotidiano incremento duorum milliarium; & quæratur primi diei iter.

Dividantur 240, duplum numeri milliarium toto itinere confectorum, per numerum dierum 10; prodeunt 24, summa milliarium dierum primi & ultimi conjunctim. Ducantur insuper 9, numerus dierum post primum, in communem excessum 2, & prodeunt 18, excessus totus termini ultimi supra primum. Quibus demptis ex primi & ultimi aggregato 24, restant 24 — 18 = 6. Horum semissis, 3, est iter primi diei.

Porro; Ponamus alium exire die quinto, & æquabili itinere progredi. Quæritur, quot illum oporteat milliaria quotidie conficere, ut eodem tempore cum præcedente idem iter confecerit.

Cum ex 10 diebus, ponantur elapsi 4, restant 6. Cum igitur diebus 6 confecturus sit iter milliarium 120; facta divisione 6) 120 (20, prodit numerus milliarium quolibet die conficiendorum, nempe 20, ut eodem die cum præcedente idem confecerit iter.

Exemplum aliud esto hujusmodi; cum notum sit horologium hora post meridiem prima sonitum 1 edere, secunda 2, tertia 3, & sic deinceps: Quæratur, quot edat sonitus, duodecim succedentium horarum spacio. Vel etiam, quot ab hora tertia, ad horam nonam. Aliaq; similia. Quibus quæsitis, eodem quo supra modo satisfaciendum erit.

Item, Si ponamus 20 lapides ita collocatos, ut primus absit uno milliari, secundus duobus, tertius tribus, & sic deinceps; oporteat autem aliquem hos omnes lapides sigillatim afferre: Quæritur, quot ille milliaria confecturus sit prinsquam omnes attulerit.

Cum ad primum lapidem eundo & redeundo, duo milliaria eundum

cundum fit; ad secundum, 4; ad trium, 6; &c. Communis excessus est 2; idemq; terminus primus: numerus autem terminorum 20. Cumq; etiam idem sit terminus primus & communis terminorum excessus; ducto excessu communi in numerū terminorum, habetur terminus ultimus $40 = 20 \times 2$. cui si addatur terminus primus 2, erit $40 + 2 = 42$ extremorum aggregatum; quod ductum in numerum terminorum, dat $42 \times 20 = 840$ duplum totius itineris; (vel aggregatum ductum in seminumerum terminorum, aut aggregati semissis in numerum terminorum, dat ipsum iter; puta $42 \times 10 = 21 \times 20 = 420$;) conficienda igitur sunt milliaria 420, quò omnes illi lapides figillatim afferantur.

Et pari modo alia hujusmodi problemata de Progressione Arithmetica, & excogitari & dissolvi facile poterunt; vel etiam ex vulgaribus Arithmeticæ practicæ libris depromi; quibus se exercere poterunt tyrones. Nobis recensendis pluribus immorandum esse non duxi. Sed nec in jam traditis singularum operationum rationes aperui, cum non sint admodum intricatæ, quin possint, ex operationum Arithmeticarum superius expositarum natura satis intellectâ, vel a tyrone, modo advertente, satis percipi; unde & ipse inibi se exerceri non gravatim feret: sed præsertim quod sequente capite tum horum tum aliorum plurimorum problematum huc spectantium traditionem demonstrativam aggressurus sum.

CAP. XXVII.

Progressio Arithmetica fusius traditur.

QUo Progressionis Arithmeticæ doctrinam plenius aperiam, libet eam sequentibus propositionibus succincte, sed & perspicue tradere.

Siquem autem male habeat, quod hic aliquoties Æquationum vel ordinationes, vel etiam Analyses, adhibeam, priusquam illarum traditionem dederim, (adeoq; methodi leges violatas censetur;) poterit ille tum hoc, tum sequens caput, tum etiam Cap. 32, & 33, vel penitus omittere, vel saltem intermittere

mittere, donec Æquationum doctrinam tradidere; & quasi essent postposita reputare.

Quod autem aggredior quo rectius fiat, hæc sunto quibus sum usurus symbola.

Terminus minimus, quem primum appello, sit A; maximus, quem ultimum appello, sit V. communis excessus E. Numerus Terminorum, T. Terminorum quorumvis ab invicem distantia, D. Extremorum (maximi & minimi) aggregatum Z = A + V. eorundem differentia X = V − A. Terminorum omnium summa vel aggregatum S. Singuli autem, a minimo inchoando, dicantur *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, &c. a maximo vero inchoando, dicantur α, β, γ, δ, ε, &c. Numeros, qui cujuslibet termini distantiam a primo indicant, *Indices* appello, puta 0, 1, 2, 3, &c. His præmissis, sequuntur propositiones.

Distantia a primo.										Distantia ab ultimo.
0	*a*	A		3	V − 9	E	ξ	9		
1	*b*	A +	E	5	V − 8	E	ε	8		
2	*c*	A + 2	E	7	V − 7	E	δ	7		
3	*d*	A + 3	E	9	V − 6	E	η	6		
4	*e*	A + 4	E	11	V − 5	E	ζ	5		
5	*f*	A + 5	E	13	V − 4	E	ε	4		
6	*g*	A + 6	E	15	V − 3	E	δ	3		
7	*h*	A + 7	E	17	V − 2	E	γ	2		
8	*i*	A + 8	E	19	V −	E	β	1		
9	*k*	A + 9	E	21	V		α	0		
		S		120	S					

1 Si continuæ progressionis Arithmeticæ primus terminus seu minimus sit A, erit secundus A + E, tertius A + 2 E, quartus A + 3 E, & sic deinceps quilibet terminus continue augendus est communi excessu semel addito. Nempe illud postulat Arithmeticæ progressionis definitio. Puta *a* = A. *b* = A + E. *c* = A + 2 E. &c.

2 Constat igitur terminus quilibet, ex termino primo seu minimo, cum communi excessu toties addito, quot terminus ille gradibus a primo distat; (ipso primo non computato,) sive (quod tantundem est) cum excessu communi, in Indicem ducto. Sequitur hæc ex præcedente. Cum enim pro quolibet distantiæ gradu excessus semel additur; toties addendus erit, quot

quot ſunt diſtantiæ gradus. Puta, terminus ſextus $f = A + DE = A + 5E$.

3 Dato igitur termino primo, cum communi Exceſſu, & termini cujuſvis aſsignati Indice, ſive diſtantia a primo; A, E, D; invenitur terminus aſsignatus. nempe $A + DE$. per præced. quod enim illic theorematice affirmatur, hic problematice proponitur.

4 Si terminus ultimus ſit V; erit penultimus $V - E$; antepenultimus $V - 2E$; quartus a fine $V - 3E$; & ſic deinceps quilibet terminus continue minuendus eſt communi exceſſu ſemel detracto. Id enim poſtulat definitio. Quanto enim quilibet locus progrediendo augetur, tanto retrocedendo quilibet minuitur. Puta $\alpha = V$. $\beta = V - E$. $\gamma = V - 2E$ &c.

5 Conſtat igitur terminus quilibet ex termino maximo, dempto toties exceſſu communi, quot terminus ille gradibus ab ultimo diſtat. (ipſo interim ultimo non cõputato.) per præced. Puta, ſextus a fine $\zeta = V - DE = V - 5E$.

6 Dato igitur termino maximo, cum exceſſu communi, & termini cujuſvis aſſignati diſtantia ab ultimo; V, E, D; invenitur terminus aſſignatus. Nempe $V - DE$. per præced.

7 Dato termino quovis, cum exceſſu communi, & cujuſvis aſſignati termini majoris a dato diſtantia, (puta f, D, E;) invenitur terminus aſſignatus. (ut *i*.) Nempe toties addendo exceſſum communem termino dato, quot aſſignatus a dato gradibus diſtat. Puta $i = f + DE = f + 3E$. Nam per def. vel prop. 1. pro ſingulis gradibus ſemel addendus eſt communis exceſſus.

8 Dato termino quovis, cum exceſſu communi, & cujuſvis aſſignati minoris diſtantia a dato; (puta f, D, E;) invenitur aſſignatus. (ut *c*.) Nempe toties auferendo exceſſum communem, quot aſſignatus a dato gradibus diſtat. Puta $c = f - DE = f - 3E$. Nam per def. vel prop. 14. pro ſingulis gradibus ſemel auferendus eſt communis exceſſus.

9 Dato igitur exceſſu communi, cum terminorum quorumvis ab invicem diſtantia; E, D; datur illorum terminorum differentia. (puta $f - c$: vel $i - f$.) nempe DE. per prop. 7 & 8. Puta $i - f = DE = 3E$. per prop. 7. & $f - c = DE = 3E$. per prop. 8. tranſpoſitis ſcilicet utrobique æquationum terminis.

10 Data vero terminorum quorumvis differentiâ, cum eorundem ab invicem diſtantia; (puta $f - c$, D;) datur communis exceſſus E. Dividendo ſcilicet differentiam per diſtantiam. Nam cum ſit, verbi gratia, $f - c = DE$, per præcedentem; erit $\frac{f-c}{D} = E$.

11 Item data terminorum quorumvis differentia, cum communi exceſſu; ($f - c$, E:) datur eorundem diſtantia D, Dividendo ſcilicet differentiam per communem exceſſum. Nam cum ſit (per prop. 9) $f - c = DE$; erit $\frac{f-c}{E} = D$.

12 Porro; Termini duo quilibet, cum duobus aliis ejuſdem progreſſionis quibuſlibet, in eadem ab invicem diſtantia poſiti, habent & eandem differentiam. Cum enim per prop. 9. differentia ſit DE; ſi utrobiq; æqualis ſit, non modo E communis exceſſus, ſed & diſtantia D; erit eadem utrobiq; differentia DE. Puta ſi a, b, c, d, e, f, &c, erit $c - a = f - d$.

13 Et contra; Si eadem ſit utrobiq; differentia, eadem eſt & utrobiq; diſtantia. Nam ſi tum exceſſus communis E, tum differentia DE, ſit utrobiq; æqualis; erit utrobiq; æqualis D. Puta a, b, c, d, e, f, &c, & $c - a = f - d$; erunt a, c, & f, d æqualiter remoti.

14 Ergo etiam; Si ex terminis quotvis in continua progreſſione arithmeticâ conſtitutis, ſeligantur quotlibet in eadem continue ab invicem diſtantia; erunt & hi in continua progreſſione arithmetica conſtituti. Puta ſi $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, &c, k, &c, erunt item tum a, c, e, &c, g, i, &c tum b, d, f, h, k, &c; tum a, d, g, k, &c; tum a, e, &c, i, &c; in continua progreſſione arithmetica conſtituti. Nam

$a, b, c, d, e, f, g, h, i, k$, &c
a, c, e, g, i, &c
b, d, f, h, k, &c
a, d, g, k, &c
a, e, i, &c

æqualibus continue differentiis continue creſcunt, per prop 12.

15 Et contra; ſi ex terminis ita continue progredientibus, ſelecti quotlibet continue item progrediuntur; æqualibus ab invicem diſtantiis ſumpti ſunt, per prop 13.

16 Dato exceſſu communi, cum numero terminorum, E, T: invenitur extremorum differentia, X. Eſt enim extremorum diſtantia unitate minor, quam numerus terminorum;

D

$D = T - 1$. ut patet. Ergo, per 11. $X = V - A = DE = TE - E$.

17 Et, Data extremorum differentiâ, cum numero terminorum; X, T: habetur communis excessus, E. Nempe, cum sit per præced $X = DE = TE - E$. Erit $\frac{X}{D} = \frac{X}{T-1} = E$.

18 Et Data extremorum differentia, cum communi excessu; X, E: habetur terminorum numerus, T. Cum enim sit $DE = X$, erit $\frac{X}{E} = D = T - 1$. Et $\frac{X}{E} + 1 = D + 1 = T$.

19 Dato termino primo seu minimo; cum communi excessu, & numero terminorum; A, E, T: habetur terminus ultimus, V. Cum enim, per 16. $X = V - A = TE - E$; erit $V = A + TE - E$, vel $V = A + DE$.

20 Dato termino maximo, cum communi excessu, & numero terminorum, V, E, T; invenitur minimus, A. Nempe sublata, ex maximo, extremorum differentiâ, manet minimus. Cum ergo per 16. $X = DE = TE - E$. Erit $V - X = A = V - TE + E = V - DE$.

21 In continua progressione arithmetica, si ex summa duorum quorumvis terminorum auferatur progressionis terminus primus; quod restat, est progressionis terminus ille cujus a primo distantia æquatur ipsorum a primo distantiis simul sumptis. Sive, cujus Index æquatur eorum Indicibus simul sumptis. Nam, per prop. 2. quilibet terminus constat ex primo cum tot excessibus quot gradibus a primo distat: Ergo duo additi continent primum bis, cum tot excessibus quot sunt utriusq; distantiæ gradus simul additi. Hinc si semel auferatur primus; manet primus terminus semel cum tot excessibus quot sunt utriusq; distantiæ gradus simul additi; hoc est (per eandem prop. 2.) terminus ille cujus distantia est eorum distantiis simul additis æ-

dist: c + dist: f = dist: h.

$c + f - a = h$

$c = A + 2E$
$f = A + 5E$

$c + f = 2A + 7E$
$c + f - A = A + 7E = h$

qualis. Puta terminus tertius $c = A + 2E$, sextus $f = A + 5E$, horum aggregatum $c + f = 2A + 7E$; hinc sublato A, restat $A + 7E$ terminus octavus, b; cujus a primo distantia 7, æqualis est distantiis tertii & sexti simul sumptis $2 + 5$.

22 Eodem modo; summa trium, quatuor, quinq; aut plurium terminorum; abjecto primo tot vicibus una minus; æquatur termino illi cujus Index est eorum omnium Indicibus simul sumptis æqualis. Puta si dist. b + dist. d + dist. e = dist. i; erit $b + d + e - 2a = i$. Probatur ut præcedens.

dist. b + dist. d + dist. e = dist. i.

$b + d + e - 2a = i$

$b = A + E$
$d = A + 3E$
$e = A + 4E$

$b + d + e = 3A + 8E$
$b + d + e - 2A = A + 8E = i$

23 Ergo, si primus progressionis terminus sit 0 ciphra, vel nihil: duorum pluriumve terminorum summa, æqualis est isti termino cujus Index est eorum Indicibus simul sumptis æqualis. Sequitur ex prop. 21, 22. quia sublatio primi termini $A = 0$, nihil immutat. Puta in progressione 0, 3, 6, 9, 12, 15, est $6 + 9 = 15$, quippe cujus Index æquatur eorum Indicibus simul sumptis, $5 = 2 + 3$.

24 Item, in ejusmodi progressione (cujus primus terminus est 0) terminus quilibet æquatur illi communis excessus multiplo, qui est Indici, sive a primo distantiæ cognomine. Cum enim per prop. 2. Sit terminus quilibet $A + DE$; si sit $A = 0$, erit $A + DE = DE$.

25 In continua progressione Arithmetica, si duorum terminorum differentiæ, addatur terminus primus; emergit terminus cujus distantia a primo est eorum distantiarum item a primo differentiæ æqualis: sive, cujus Index æquatur Indicum illorum differentiæ: vel qui tantundem distat a primo quantum illi ab invicem. Sequitur ex prop. 21. Si enim, verbi gratia

tia, dist. $b - c$ dist: $c =$ dist: f, hoc est, dist. $b =$ dist: $c + f$. erit (per prop. 21.) $b = c + f - a$; ergo $b - c + a = f$.

26 Si igitur primus terminus sit 0; duorum quorumvis differentia est terminus ille cujus index sive distantia a primo est illorum indicum differentiæ æqualis. Quoniam hoc casu $b - c = b - c + a = f$.

27 Item, hoc casu, terminus ille, cujus index æquatur duorum indicum differentiæ, est multiplum excessus communis, indici suo (sive duorum illorum indicum differentiæ) cognomine. Cum enim indicum differentia ostendat terminorum distantiam; sitq; per prop. 9. differentia terminorum, D E (multiplum excessus cognomine distantiæ, sive indicum differentiæ;) erit terminus ille, cujus index huic indicum differentiæ æquatur, item D E; quippe quæ est terminorum illorum differentia, per præced.

28 In continua progressione Arithmetica, extremorum aggregatum æquatur aggregato duorum quorumvis terminorum æqualiter ab extremis utrinque remotorum; (Intellige, quorum unus a primo tot abest gradibus, quot alter ab ultimo.) Nam, per prop. 2. & 5; tanto unus minimum superat, quanto alter a maximo deficit; propter æqualem utrobique distantiam. Puta $c = A + 2E$, & $\gamma = V - 2E$; ergo $c + \gamma = A + 2E + V - 2E = A + V$. Et sic ubique.

$$\begin{array}{r} c = A + 2E \\ \gamma = V - 2E \\ \hline c + \gamma = A + V \end{array}$$

29 Sin terminus omnium medius ab utroq; extremo æqualiter distet, (quod ubi numerus terminorum est impar contingit) terminus ille bis sumptus æquatur extremorum aggregato. Puta expositis a, b, c, d, e &c. erit $a + e = 2c$. quia $c - a = e - c$, propter æqualem utrobique distantiam. Ideoque $c + c = a + e = 2c$.

20

30 Similiter in quatuor terminis Arithmeticæ progressionis interruptæ. Nempe Aggregatum extremorum æquatur aggregato mediorum. Puta A, M; N, V. Cum enim, propter communem utrobiq; excessum, sit $M - A = V - N = E$, ideoque $A + E = M$, & $N + E = V$, hoc est $V - E = N$; erit $M + N = A + E + V - E = A + V$. Vel, expositis V, N; M, A. quoniam $V - N = M - A = E$,

$$\begin{array}{l} M = A + E \\ N = V - E \\ \hline M + N = A + V \end{array}$$

ideoque $V - E = N$, & $M - E = A$, hoc est $M = A + E$; erit $N + M = V - E + A + E = A + V$.

31 Ergo, Quatuor terminorum Arithmeticè (ut loquuntur) proportionalium, datis tribus quibuslibet datur & reliquus. Cum enim expositis A, M; N, V. sit per præced. $A + V = M + N$; erit (æqualibus utrinque subductis) $A = M + N - V$, $V = M + N - A$, $M = A + V - N$, $N = A + V - M$.

Datis { A, M, N. / A, M, V. / A, N, V. / M, N, V. } Datur { $V = M + N - A$. / $N = A + V - M$. / $M = A + V - N$. / $A = M + N - V$. }

32 Ex tribus autem in Arithmetica progressione continua constitutis, Aggregatum extremorum æquatur duplo medii. Quippe terminus medius, eodem excessu superat extremorum unum, quo ab altero superatur. Puta A, M, V &c. quoniam est $M - A = V - M = E$, sive $A + E = M = V - E$, erit $M + M = 2M = A + V$.

$$\begin{array}{l} M = A + E \\ M = V - E \\ \hline 2M = A + V \end{array}$$

33 Ergo, ex tribus terminis continue progredientibus arithmetice, datis duobus quibusvis datur & reliquus. Cum enim, per præced. sit $2M = A + V$; erit $2M - A = V$, $2M - V = A$, $M = \frac{A+V}{2}$.

Datis

$$\text{Datis} \begin{cases} A, M, \\ A, V, \\ M, V, \end{cases} \text{Datur} \begin{cases} V = 2M - A. \\ M = \frac{A+V.}{2} \\ A = 2M - V; \end{cases}$$

34 Atq; idem valet de tribus quatuorve terminis progreſſionis Arithmeticæ, utut non immediate proximis, modo æqualibus utrobiq; intervallis diſtantibus. Puta, ſi $a, b, c, d, e, f, g,$ &c. erit $a + e = 2c$. Nam & $a, c, e,$ &c. per prop. 14. Item $a + f = c + d.$ & $d + e = b + g.$ Et ſic alibi. Nam $a, c; d, f.$ vel $a, d; c, f.$ & $b, e; d, g,$ vel $b, d; e, g.$ &c. per pr. 12.

35 Sed & præcedentium aliquot converſæ pariter demonſtrantur. Puta converſa pr. 28. In continua progreſſione Arithmetica, (excepta tantum progreſſione æqualium, ubi exceſſus eſt ubiq; nullus, puta, 1, 1, 1, 1, &c. &c.; quæ & deinceps aliquoties excepta intelligatur.) ſi duorum intermediorum terminorum aggregatum aggregato extremorum æquetur, ſunt illi ab extremis æqualiter utrinq; remoti; (hoc eſt, quot gradibus intermediorum alter ab altero extremorum, tot reliquus a reliquo diſtat.) Puta in progreſſione $a, b, c, d, e, f, g,$ &c. ſi $c + e = a + g,$ totidem gradibus diſtant $a, c,$ atque $e, g;$ item $a, e,$ atque $c, g.$ Cum enim quanto duorum $c, e,$ alter major eſt quam $a,$ tanto alter minor ſit quam $g,$ (ſecus enim aggregata non eſſent æqualia,) diſtantia utrobique æqualis erit per prop. 13.

36 Et converſa prop. 29. Si termini alicujus intermedii duplum æquetur aggregato extremorum: æqualiter ille ab utroque extremo diſtat. Probatur ut præcedens.

37 Item converſa prop. 32. Si unius termini duplum æquetur duorum aggregato, erit ille medius Arithmeticus inter hos. Nam, niſi æqualibus differentiis horum tum alter major ſit tum alter minor, quam eſt expoſitus, non conſtaret æqualitas

38 Similiter & converſa prop. 30. Si bini binis ſimul ſint æquales, erunt illi quatuor termini Arithmetice (ut loquuntur) proportionales. Puta ſi $A + V = M + N,$ quanto horum alter puta M, ſuperat alterum illorum puta A, tanto horum reliquus ab illorum reliquo deficit; (nam niſi exceſſus & defectus ſe mutuo perimant non conſtabit aggregatorum æqualitas:) Ideoque $M - A = V - N = E.$ Ergo $A, M = A + E:$

N, V = N + E. Vel sic, quia A + V = M + N; erit V = M + N − A, & V − N = M − A: Ergo, per def. A, M; N, V. Sed & eodem argumento M, A; V, N. vel V, N; M, A. Item, cum sit V = M + N − A (ut dictum est) erit etiam V − M = N − A; Ideoq; V, M; N, A, & M, V; A, N, vel A, N; M, V. Atque hinc sequitur, non tantum

39 Si quatuor termini sint Arithmetice proportionales, sunt & inverse proportionales; (Intellige, si A, M; N, V. vel N, V; A, M, tum M, A; V, N, vel V, N; M, A.) quod ex ipsa definitione sequitur. Nam si in alteris sit æqualis excessus, in alteris erit æqualis defectus; adeoque utrobique progressio Arithmetica. Sed &

40 Si quatuor termini sint Arithmetice proportionales, sunt & alterne (permutatim, vicissim,) proportionales. Hoc est, si A, M; N, V, ideoque A + V = M + N; erit A, N; M, V, ut ostensum est prop. 38. Item N, A; V, M, ut ibidem & prop. 39.

41 Item si Arithmetice proportionalium vel primus & tertius, vel secundus & quartus, æqualiter vel augeantur, vel minuantur; manent adhuc arithmetice proportionales. Puta, si A, M; N, V, hoc est A, A + E; N, N + E; erit etiam A, M + B; N, V + B, hoc est A, A + E + B; N, N + E + B; Nempe illic communis excessus est E, hic E + B. Item A + B, M = A + E; N + B, V = N + E, ubi communis excessus est E − B. Et, pari de causa, A ± B, M ± C; N ± B, V ± C; Et pariter in similibus. Quippe qui prius erat communis excessus, utrobiq; vel pariter augetur, vel pariter minuitur, adeoque etiamnum utrobique æqualis; & propterea termini Arithmetice proportionales.

42 Item, si Arithmetice proportionales sint tum A, M; N, V. tum α, μ; ν, υ; tum a, m; n, u, (tum, si placet, quaterni plures:) erunt item tum aggregata, tum differentiæ, terminorum respective sumptorum, termini proportionales. Puta A + α ± a; M + μ ± m; N + ν ± n, V + υ ± u. Nam si in primis excessus sit ubique E, in secundis e, in tertiis e; erit in quartis E + e ± e. Ut additione patebit.

A,

$\left\{\begin{matrix} A, \\ \alpha, \\ a, \end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix} M = A + E; \\ \mu = \alpha + \varepsilon; \\ m = a + e; \end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix} N, \\ \nu, \\ n, \end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix} V = N + E. \\ \upsilon = \nu + \varepsilon. \\ u = n + e. \end{matrix}\right.$

$A + \alpha \doteq a$, $A + \alpha \doteq a + E + \varepsilon \doteq e$; $N + \nu \doteq n$, $N + \nu \doteq n + E + \varepsilon \doteq e$.

43 Sed & idem obtinet in Arithmeticis progressionibus continuis. Quod similiter probandum erit. Puta, si tum A, B, C, D, &c. tum $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. tum a, b, c, d, &c; erunt $A + \alpha \doteq a$, $B + \beta \doteq b$, $C + \gamma \doteq c$, $D + \delta \doteq d$, &c.

44 Et quidem, licet altera progressio crescens fuerit, altera decrescens.

Puta $\left\{\begin{matrix} A + E, A + 2E, A + 3E, A + 4E, \text{ &c.} \\ \upsilon - \varepsilon, \upsilon - 2\varepsilon, \upsilon - 3\varepsilon, \upsilon - 4\varepsilon, \text{ &c.} \end{matrix}\right.$

Quippe aggregatorum excessus continuus est $E - \varepsilon$.

Atq; hujusmodi complures proportionalium immutationes & comparationes facile esset tum comminisci tum demonstrare. Verùm illud haud est necesse, sed cujuslibet potius arbitrio permittendum, ut id, prout opus fuerit, pro re nata curet; & eum res postulaverit ipse perficiat.

45 In continua progressione Arithmetica, Aggregatum extremorum ($Z = A + V$) per numerum terminorum multiplicatum T, est duplum summæ terminorum omnium. Hoc est $TZ = 2S$. Progressionis termini ordine directo (a primo inchoati) dicantur a, b, c, d, &c. Idem termini ordine retrogrado (ab ultimo inchoati) dicantur $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. Quoniam igitur, per prop. 28. tum $a + \alpha$, tum $b + \beta$, tum $c + \gamma$, &c. æquantur aggregato extremorum $A + V = Z$: erunt omnes a, b, c, d, &c. cum omnibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. æquales ipsi Z toties sumpto. Hoc est, omnes termini bis sumpti (nempe, tum ordine directo, tum ordine retrogrado,) æquantur extremo aggregato Z toties sumpto quot sunt termini. Hoc est $TZ = 2S$.

$a + \alpha = Z = A + V$
$b + \beta = Z$
$c + \gamma = Z$
$d + \delta = Z = A + V$
&c.
$S + S = TZ = TA + TV$.

46 Idem valet in quatuor discontinue proportionalibus A-

rithmetice. Puta A, M; N, V. Cum enim, per prop. 30, sit $A + V = Z = M + N$, erit $4Z = 2S$.

47 Datis igitur, in Arithmetica progressione continua, extremorum aggregato & terminorum numero; Z, T; habetur totius progressionis sive terminorum omnium summa. S. nempe $TZ = 2S$, per prop. 45. Ergo $\frac{TZ}{2} = S$.

48 Et Dato extremorum aggregato, cum progressionis summa; Z, S; habetur numerus terminorum. T. Nam quia $2S = TZ$; erit $\frac{2S}{Z} = T$.

49 Et Dato terminorum numero, cum progressionis summa; T, S; datur item extremorum aggregatum, Z. Nam quia $2S = TZ$; erit $\frac{2S}{T} = Z$.

50 Datis terminorum numero, progressionis summa, & termino minimo; T, S, A; habetur maximus. V. Est enim per p. 49, $\frac{2S}{T} = Z = A + V$. Ergo $\frac{2S}{T} - A = Z - A = V$.

51 Datis iisdem; datur extremorum differentia. X. Nam, per præced. $\frac{2S}{T} - A = V$. Ergo $\frac{2S}{T} - 2A (= Z - 2A) = V - A = X$.

52 Datis numero terminorum, progressionis summa, & termino maximo; T, S, V, habetur item minimus. A. Cum enim, per pr. 49. $\frac{2S}{T} = Z = A + V$, erit $\frac{2S}{T} - V = A$.

53 Datis iisdem; datur extremorum differentia. X. Nam, per præced. $\frac{2S}{T} - V = A$. Ergo $V - \frac{2S}{T} + V = 2V - \frac{2S}{T} (= 2V - Z) = V - A = X$.

54 Datis extremorum summa & differentia Z, X; datur extremum minus, seu terminus minimus. A. Nempe $Z - X$ ($V + A$ minus $V - A$) $= 2A$. Ergo $\frac{Z - X}{2} = A$.

$V + A = Z$
mi: $V - A = X$
$2A = Z - X$

55 Datis iisdem; datur terminus maximus. V. Nempe $Z + X$ ($V + A$ plus $V - A$) $= 2V$. Ergo $\frac{Z + X}{2} = V$.

$V + A = Z$
pl. $V - A = X$
$2V = Z + X$

56 Datis extremis (vel eorundem summa & differentia,) cum excessu communi, Z, X, E, datur progressionis summa S. Nempe per pr. 18. habetur T, ergo & per pr. 47. $S = \frac{ZX + ZE}{2E}$.

57 Datis extremis, cum summa progressionis, A, V, S, datur communis excessus. E. nempe, per prop. 48. habetur T, ergo & per pr. 17. $E = \frac{ZX}{2S - Z}$.

58 Datis termino minimo, terminorum numero, & communi excessu; A, T, E; datur progressionis summa. S. Nempe per pr. 19. habetur V; ergo & per pr. 47, $S = \frac{2A + TE - E}{2} T$.

59 Datis termino minimo, terminorum numero, & progressionis summa; A, T, S; datur communis excessus. E. nempe per. pr. 51. habetur X; ergo & per pr. 17, $E = \frac{2S - 2TA}{Tq - T}$.

60 Datis termino maximo, terminorum numero, & communi excessu; V, T, E; datur progressionis summa. S. nempe per prop. 20. habetur A; ergo & per prop. 47, $S = \frac{2V - TE + E}{2} T$.

61 Datis termino maximo, terminorum numero, & progressionis summa; V, T, S; datur communis excessus. E. nempe per prop. 53, habetur X; ergo & per prop. 17. $E = \frac{2TV - 2S}{Tq - T}$.

62 Datis terminorum numero, communi excessu, & progressionis summa, T,E,S; datur terminus minimus. A. nempe per pr. 16. habetur X, & per pr. 49, Z; ergo & per prop. 54. $A = \frac{2S - TqE + TE}{2T}$.

63 Datis iisdem; datur terminus maximus. V. nempe per prop. 16 & 49, habentur Z & X; ergo & per prop. 55. $V = \frac{2S + TqE - TE}{2T}$.

64 Datis termino minimo, communi excessu, & progessionis summa, A, E, S: datur numerus terminorum. T. Nam per pr. 19. $A + TE - E = V$. adeoque $2A + TE - E = A + V = Z$. Ergo, per pr. 45. $2S = TZ = 2TA + TqE - TE$. adeoque $\frac{2S}{E} = Tq + \frac{2A - E}{E}$ T. Et (resolvendo æquationem) $\frac{-A + \frac{1}{2}E + \sqrt{:\frac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE:}}{E} = T$.

65 Datis iisdem; datur terminus maximus. V. nempe, per præcedentem, habetur T. adeoque V per pr. 19.

Vel sic. Quia, per pr. 18. $\frac{X+E}{E} = T$; erit per prop. 45. $2S = TZ = \frac{ZX + ZE}{E}$. Et $2SE = ZX + ZE$. Hoc est (quia $ZX = Vq - Aq$, & $Z = A + V$;) $2SE = Vq - Aq + VE + AE$. Adeoque $Vq + EV = Aq + 2SE - AE$. Ergo (resolvendo æquationem) $\sqrt{:\frac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE:} - \frac{1}{2}E = V$.

$V + A = Z$
$V - A = X$
$Vq + VA - VA - Aq$
$Vq - Aq = ZX$.

Si autem hac methodo reperiatur V; Investigabitur T, propositionis præcedentis, per pr. 48. (alia quidem forma, sed eodem valore quo prius.)

nempe $T = \frac{2S}{-\frac{1}{2}E + A + \sqrt{:\frac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE:}}$

66 Datis termino maximo, communi excessu, & progressionis

nis, summa; V, E, S; datur numerus terminorum. T. Nam, per prop. 20. $V - TE + E = A$. adeoq; $2V - TE + E = V + A = Z$. Ergo, per prop. 45. $2S = TZ = 2TV - TqE + TE$. adeoq; $\frac{2S}{E} = \frac{2V+E}{E}T - Tq.E$ t (resolvendo æquationem) $\frac{V+\frac{1}{2}E \mp \sqrt{:\frac{1}{4}Eq + Vq + VE - 2SE:}}{E} = T$.

Notandum autem est, hujus æquationis (utpote ambiguæ) radicem minorem tunc convenire, cum A major est quam $\frac{1}{2}E$, (adeoq; radicem universalem $\sqrt{:\frac{1}{4}Eq}$ &c. afficiendum signo $-$;) majorem vero (adeoq; $+\sqrt{:}$ &c.) quoties A minor est quam $\frac{1}{2}E$. Sin $A = \frac{1}{2}E$; perinde erit utra eligatur; nam hoc casu totum illud quod nota radicalitatis afficitur, evanescit.

67 Datis iisdem; datur terminus minimus A. Nam, per præcedentem habetur T. adeoq; A per prop. 20.

Vel sic. Quoniam (ut in prop. 65.) $2SE = Vq - Aq + VE + AE$. Transponantur termini (si sit $Vq + EV$ plus quam $2SE$; quod tum continget, cum A major est quam E;) ad hanc formam, $Aq - EA = Vq + EV - 2SE$: cujus æquationis radix est $\frac{1}{2}E + \sqrt{:\frac{1}{4}Eq + Vq + EV - 2SE:} = A$. Vel (si fit $Vq + EV$ minus quam $2SE$; quod tum continget, cum A minor est quam E;) transponantur ad hanc formam, $EA - Aq = 2SE - Vq - EV$; cujus æquationis radix est ambigua, nempe $\frac{1}{2}E \pm \sqrt{:\frac{1}{4}Eq + Vq + EV - 2SE:}$ quarum radicum major convenit quoties A major quam $\frac{1}{2}E$; minor autem quoties A minor est quam $\frac{1}{2}E$. Si autem fit $Vq + EV = 2SE$, manifestum est (utrovis modo disponantur termini) $Aq - EA = 0$, adeoq; $A = E$.

Si autem hac methodo reperiatur A; investigabitur T, propositionis præcedentis, per prop. 48. Nempe $T = \frac{2S}{V+\frac{1}{2}E \pm \sqrt{:\frac{1}{4}Eq + Vq + EV - 2SE:}}$. Ubi non temere factum, quod cùm formâ superius traditâ, fuerit $\mp$, jam sit $\pm$. Nam quo casu in illa forma eligenda erat radix major, in hac minor eligenda erit.

Atq; hactenus Progressionis Arithmeticæ traditionem satis videamur absolvisse; cujus breviorem synopsin capite sequente exhibebimus.

Notandum autem est, propositiones omnes hoc capite de Progressione Arithmetica traditas, posse item ad Progressionem Geometricam (mutatis mutandis) non difficulter accommodari. Nempe substitutis fere illic Multiplicatione & Divisione pro hic imperatis Additione & Subductione; item potestatum Cõstructione & Analysi, pro Multiplicatione & Divisione; & denique Rectangulorum aggregato pro Duplo summæ; (cum paucis insuper aliis immutationibus:) Quod ex comparatis his cum primoribus totidem propositionibus: Cap. XXXII. (eodem ordine positis) videre est.

CAP. XXVIII.

Progressionis Arithmeticæ brevior Synopsis.

CUm in præcedente Capite doctrinam Progressionis Arithmeticæ fusius prosecuti simus: libet hoc Capite selectas aliquot propositiones, progressionem continuam spectantes, alio ordine summatim tradere; ut uno quasi intuitu oculo subjiciantur. Retentis iisdem quibus supra Symbolis ùsi sumus.

	Theoremata.
1	$D = T - 1.$
2	$V = A + DE$
3	$S = \frac{1}{2}TZ.$

	Problemata.	
	Data.	Quæsita.
1	A, V :	$Z = V + A$
2		$X = V - A.$
3	A, Z :	$V = Z - A.$
		X per 2.

	Data.	Quæsita.
4	A, X :	$V = A + X$
		Z per 1.
5	V, Z :	$A = Z - V.$
		X per 2.
6	V, X :	$A = V - X.$
		Z per 1.
7	Z, X :	$A = \frac{Z - X}{2}.$
8		$V = \frac{Z + X}{2}.$
9	T, E :	$X = DE$
10	T, X :	$E = \frac{X}{D}$

	Data.	Quæsita.	
11	X, E : T = $\frac{X}{E}$ + 1		
12	Z, T : S = $\frac{ZT}{2}$		
13	Z, S : T = $\frac{2S}{Z}$		
14	T, S : Z = $\frac{2S}{T}$		
15	A, V, T :	Z, X,	per 1, 2.
		E, S,	per 10, 12.
16	A, V, S :	Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 13.
		E,	per 10.
17	A, V, E :	Z, X,	per 1, 2.
		T,	per 14.
		S,	per 12.
18	A, Z, T :	V, X, S,	per 3, 12.
		E,	per 10.
19	A, Z, S :	V, X, T,	per 3, 13.
		E,	per 10.
20	A, Z, E :	V, X,	per 3.
		T,	per 11.
		S,	per 12.
21	A, X, T :	V, Z, E,	per 4, 10.
		S,	per 12.
22	A, X, S :	V, Z,	per 4.
		T,	per 13.
		E,	per 10
23	A, X, E :	V, Z, T,	per 4, 14.
		S,	per 12.
24	V, Z, T :	A, X, S,	per 5, 12
		E,	per 10.
25	V, Z, S :	A, X, T,	per 5, 13.
		E	per 10.
26	V, Z, E :	A, X,	per 5.
		T,	per 14.
		S,	per 12.
27	V, X, T :	A, Z, E,	per 6, 10.
		S,	per 12.
28	V, X, S :	A, Z,	per 6.
		T,	per 13.
		E,	per 10.
29	V, X, E :	A, Z, T	per 6, 11
		S,	per 12.
30	Z, X, T :	A, V, S, E,	per 7, 8, 12, 10.
31	Z, X, S :	A, V, T,	per 7, 8, 13.
		E,	per 10.
32	Z, X, E :	A, V, T,	per 7, 8, 11.
		S,	per 12.
33	Z, T, E :	X, S,	per 9, 12
		A, V,	per 7, 8.
34	Z, S, E :	T	per 13.
		X,	per 9.
		A, V,	per 7, 8.
35	T, S, A :	Z,	per 14.
		V, X,	per 3.
		E,	per 10.
36	T, S, V :	Z,	per 14.
		A, X,	per 5.
		E,	per 10.
37	T, S, X :	E, Z,	per 10, 14.
		A, V,	per 7, 8.
38	T, S, E :	X, Z,	per 9, 14.
		A, V,	per 7, 8.
39	T, E, A :	X,	per 9.
		V, Z,	per 4.
		S,	per 12.
40	T, E, V :	X,	per 12.
		A, Z,	per 6.
		S,	per 12.

	Data.	Quæsita.	Datis.
41	X,E,S :	T, per 11.	
		Z, per 14.	
		A,V, per 7, 8.	A, V, Z, X. vel Z, T, S. vel T, E, X. } nihil ulterius inde innotescit.
42	S,E,A :	V = $-\frac{1}{2}E + \sqrt{:}$ $\frac{1}{4}Eq + Aq - AE + 2SE.$	
		Z, X, per 1, 2.	
		T, per 13.	
43	S,E,V :	A = $+\frac{1}{2}E \mp \sqrt{:}$ $\frac{1}{4}Eq + Vq + VE - 2SE.$	
		Z, X, per 1,2.	
		T, per 13.	

Atq; hactenus de Progressione Arithmetica dictum esto.

CAP. XXIX.

Rationum Distributio, & nomina. Ratio Multiplex, Super-particularis, Superpartiens, Submultiplex, &c. Rationum Designatio, & Notatio.

EXpositâ in superioribus capitibus Progressione Arithmetica, quæ ex æqualitate Differentiarum ortum ducit: Priusquam Progressionem Geometricam distinctius tractandam aggrediar, quæ ex Rationum sive Æqualitate sive (ut plerique loquuntur) Identitate trahit originem; De Rationibus, sive proportionibus, quædam adhuc restant exponenda; præsertim de Rationum tum Nominibus sive appellationibus, tum Notatione.

Ratio, quid? Quid sit Ratio, jam satis innotescat, tum ex iis quæ superius tradidimus Cap. XXV. tum ex Euclidis definitione 3 d 5. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις. *Ratio est, duarum magnitudinum homogenearum, quæ secundum quantitatem est, ad invicem (ποιὰ σχέσις) habitudo qualitativa.* Nempe, quâ dicitur, ὁσαπλάσιον, *quantuplum* vel *quotuplum* sit hoc illius; puta duplum, triplum, dimidium, &c. vel, quoties hoc illud

lud contineat. Adeoque divisione innotescit, (sicuti subductione Differentia,) divisionis *Quoto* sive *Quotiente* determinanda. Et propterea, *ex Quotientum identitate, identitas Rationum colligitur, & contra.* Puta, tum numeri quaternarii ad binarium, tum senarii ad ternarium, eadem est ratio, nempe dupla; quia utrobiq; antecedens consequentem bis continet; quod antecedentem utrumq; per consequentem suum dividendo innotescit. Nam 2)4(2, & 3)6(2.

Rationalis & Irrationalis.

Distribuitur autem Ratio sive proportio in *Rationalem & Irrationalem.* Rationalis dicitur, quæ potest veris numeris exhiberi: puta ut 6 ad 4, quæ est ratio sesquialtera. Irrationalis autem quæ veris numeris exhiberi non potest: ut, in quadrato, ratio Lateris ad Diagonium. Quamvis enim hujusmodi ratio utcunq; explicari solet per numeros quos *Surdos* vocat, puta ut 1 ad $\sqrt{2}$; tamen, cum numerus Surdus, proprie loquendo, numerus non sit, sed imaginarii cujusdam numeri nota, ideo nec ea ratio veris numeris explicabilis censenda erit. Est nempe, $\sqrt{2}$, nota numeri qui supponitur in se ductus numerum 2 producere; sicut $\sqrt{4}$, numerum notat (nempe 2) qui in se ductus producit 4. Cum autem nullus omnino numerus possibilis sit (vel integer, vel fractus,) qui sui in se multiplicatione producere possit numerum 2; est igitur $\sqrt{2}$ numeri tantum supposititii & imaginarii, non veri alicujus numeri, nota. Non est itaq; illa ratio veris numeris explicabilis, ideoq; ratio ἄλογος, ἄῤῥητος, *irrationalis.*

Non autem dissimulandum est, *Rationalitatis* appellationem, ab Euclide passim in Elemento decimo, etiam eis lineis attribui quæ potentiâ tantum sunt commensurabiles; hoc est, quarum saltem quadrata rationem habent numeris explicabilem, utut longitudine sint ἀσύμμετροι, incommensurabiles. Atq; hoc sensu Latus & Diagonium quadrati erunt Rationalia, quippe quorum quadrata sunt ut numerus ad numerum, puta ut 1 ad 2. Verum alibi non raro obtinet, *Rationalia* tantum ea dicere quæ & σύμμετρα sunt: ut perinde sit ἄλογον esse sive ἄῤῥητον, atque ἀσύμμετρον.

Sicui vero duriuscula videri possit *Rationis Irrationalis* appellatio; quæ enim λόγον rationem habent ad invicem, quî dici possint ἄλογα? aut etiam ipse λόγος, ἄλογος? Dicendum est, hoc ob vocis λόγος apud Græcos homonymiâ obtingere, (quos

& Arithmetici Latine sequuntur.) Quippe λόγος (præter alia significata) etiam *Ratiocinium* sive *Computum* significat; unde *Logista* idem est qui *Calculator* sive *Computator*; atq; illud ἄλογον, quod calculum fugit, nec vero numero est explicabile: qua de causa & ἄῤῥητον & ἀνεκφώνητον dicitur, inexplicabile, ineffabile, inenarrabile: non quod omnino enarrari non possit, sed non veris numeris possit enarrari.

Ratio Æqualitatis, & Inæqualitatis.

Distribuitur porro *Ratio*, in rationem *Æqualitatis*, & rationem *Inæqualitatis*. Illa est, cum comparata sunt æqualia. Hæc, cum inæqualia. Sic 2 ad 2, & 4 ad 4, & $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{2}$, &c. sunt in ratione Æqualitatis constituta. At 2 ad 3, & 5 ad 4, & 4 ad 5, &c. in ratione Inæqualitatis. Sicui interim nomina Æqualitatis & Inæqualitatis, potius ad alteram comparationem, quæ est quoad Differentiam, referenda videantur, quam ad hanc quæ est quoad Rationem: Ego quidem non repugno. Nam quod, quoad differentiam, alteri *Æquale* dicitur, id forsan, quoad rationem, rectius dicatur *Simplum*. Verum hoc non tanti est ut receptas jam appellationes innovandas contendam.

Notandum hic est, Rationem Æqualitatis, & Rationalem esse; nempe ut 1 ad 1: At non contra, rationem omnem Rationalem, esse & rationem Æqualitatis. Item, omnem rationem Irrationalem, esse & Inæqualitatis rationem; non autem contra, omnem Inæqualitatis rationem, esse & Irrationalem: quippe dupla, tripla, aliæq; infinitæ Inæqualitatis rationes sunt, Rationales tamen.

Ratio Majoris inæqualitatis, & Minoris.

Ratio Inæqualitatis (sive Rationalis fuerit sive Irrationalis) subdividitur rursus in rationem (sive proportionem) *Majoris inæqualitatis*, & *Minoris*. (Vel in rationem *Majoritatis* & *Minoritatis*.) Illa est, quantitatis majoris ad minorem; ut 4 ad 2. Hæc, minoris ad majorem; ut 2 ad 4.

Rationis sive proportionis Majoris inæqualitatis (Rationalis intellige; nam, de rationum irrationalium nominibus Scriptores nondum fuerunt solliciti;) quinque solent constitui genera. *Multiplex*, *Superparticularis*, *Superpartiens*, *Multiplex-superparticularis*, & *Multiplex-superpartiens*.

Et pariter Minoris inæqualitatis ratio (rationalis) in totidem solet genera distribui, iisdem insignita nominibus, præfixa tantum particula *Sub*. nempe *Submultiplex*, *Subsuperparticularis*, *Subsuperpartiens*, *Submultiplex-superparticularis*, *Submultiplex-superpartiens*.

partiens. Siquem interim terreat nominum barbaries, in vocibus technicis; liberum ipsi erit illis abstinere; dummodo mihi permittat indicare, quid alii his nominibus intellectum volunt.

Quantitas major minoris *Multiplex* dicitur, (vel multipla,) quæ minorem aliquoties exacte continet; vel, cum minor metitur majorem. Πολλαπλάσιον τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρῇ ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος, definiente Euclide 2 *d* 5, & speciatim de numeris 5 *d* 7. Hoc est, cum minor aliquoties accepta æquatur majori. Ea enim est vocis καταμετρεῖσθαι apud Euclidem significatio. Sic enim Euclides 23 *d* 7. *Numerus numerum metiri dicitur per illum numerum quem multiplicans, vel a quo multiplicatus, illum producit*: Et eodem modo Quantitas quantitatem metiri censenda est. Si ergo quantitas minor per nullum numerum (integrum intellige) multiplicata producat majorem, hanc illa non metitur. Ita numerus Senarius est binarii multiplus; quia binarius aliquoties acceptus, nempe ter, æquatur ipsi senario; sive (ut loquitur Euclides) numerus 2 metitur 6, per 3; quia bis tria sunt sex. $2 \times 3 = 6$. At 8 ad 3 non esse dicimus in ratione multiplici: quia, quamvis 3 in 8 aliquoties contineantur, nempe bis; non tamen 3 exacte metiuntur 8, quia bis ablata relinquunt 2, ter autem auferri non possunt. *Multiplex.*

Multiplicis correlatum (in proportione minoris æqualitatis constitutum) dicitur *Submultiplex*. Apud Euclidem simpliciter *Pars* dicitur 1 *d* 5. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον. *Magnitudo minor majoris Pars est, quando exacte metitur majorem.* Ubi autem minor majorem non metitur (at saltem in ratione rationali constituta sit,) quantitas illa non hujus *Pars*, sed *Partes*, ab Euclide dicitur; quippe ille, hic loci, per *partem* non aliam quam *partem aliquotam* intelligit; & per *partes*, partium aliquotarum aggregatum. Quæ autem hic Euclides *partem* & *partes* appellat; appellant alii recentiores, *partem aliquotam*, & *partem aliquantam*. Sic Semissis, Triens, Quadrans, Sextans, Uncia, dicuntur singulæ, *aliquota pars* Assis; quoniã aliquoties acceptæ integrũ Assem complent. Nẽpe Semissis bis, Triens ter, Quadrans quater, Sextans sexies, & Uncia duodecies, præcise, continentur in Asse, sive integro. Est autem Quincunx, Assis pars aliquanta, non aliquota: Nam quincunx bis acceptus, est asse minor, nempe decem unciæ; at ter *Submultiplex.*

acceptus, major erit, nempe 15 Unciæ, quæ assem tribus unciis superant. Atq; idem de Septunce, Besse, Dodrante, Decunce, Undecunce, (sive, ut loquuntur alii, Dextante, Deunce,) dicendum est. Nam, verbi gratia, Bes, non assis aliquota *Pars* dicitur, sed *Partes*, nempe duæ tertiæ; & Dodrans, tres quartæ; & sic de cæteris. Sic enim Euclides, 3 & 4 *dd* 7. Pars est numerus minor majoris, cum minor metitur majorem: Partes autem, cum non metitur.

Proportionis (sive Rationis) Multiplicis species sunt, *Dupla, Tripla, Quadrupla*, & sic deinceps in infinitum. Et contra proportionis (sive Rationis) Submultiplicis species sunt, *Subdupla, Subtripla, Subquadrupla*, &c. vel etiam Semissis, Triens, Quadrans, &c. vel etiam Pars dimidia, tertia, quarta, decima, centesima, millesima, &c. Græce ἡμιμόριον, τριτημόριον, τεταρτημόριον, δεκατημόριον, ἑκατοστημόριον, χιλιοστημόριον, &c.

Quantitates autem quantitatum *Æquimultiplices*, Euclidi aliisque, dicuntur, quas suæ respective partes per eundem numerum metiuntur. Vel (quod perinde est) prima secundæ, & tertia quartæ æque-multiplices sunt, quando prima secundam toties præcise continet, quoties tertia quartam. Sic quaternarius binarii, & senarius ternarii sunt æque-multiplices; utrobique scilicet in proportione dupla: quia tum illum binarius, tum hunc ternarius, per binarium metitur; & toties 2 in 4, quoties 3 in 6 continentur, nempe utrobique bis.

3) 6 (2
2) 4 (2

Superparticularis. Ratio (sive proportio) *Superparticularis*, est ratio majoris quantitatis ad minorem, quando major minorem semel quidem, nec sæpius continet, sed & ipsius partem aliquotam. Sic 3 ad 2, & 6 ad 4, sunt in ratione superparticulari; uterq; enim numerus antecedens consequentem suum semel continet ipsius insuper semissem. Diviso nempe numero majore per minorem, prodibit utrobiq; Quotiens $1\frac{1}{2}$.

2) 3 (1 $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$
4) 6 (1 $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$

Hujus Rationis species sunt, *Sesquialtera, Sesquitertia, Sesquiquarta, Sesquiquinta, Sesquidecima, Sesquicentesima, Sesquimillesima*, & sic deinceps in infinitum: prout scilicet major minorem semel continet, & insuper minoris partem dimidiam, tertiam, quartam,

quartam, quintam, decimam, centesimam, millesimam, &c.

2) 3 ($1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 10) 11 ($1, 1 = \frac{11}{10}$
3) 4 ($1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ 100) 101 ($1,01 = \frac{101}{100}$
4) 5 ($1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ 1000) 1001 ($1,001 = \frac{1001}{1000}$
5) 6 ($1\frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ 10000) 10001 ($1,0001 = \frac{10001}{10000}$

Ubi autem major ad minorem est in ratione *Superparticulari*, sesquialtera, sesquitertia, &c. erit minor illa quantitas ad majorem in ratione *Subsuperparticulari*, subsesquialtera, subsesquitertia, &c. Sic 18 ad 16 sunt in ratione sesquioctava, (nempe ut 9 ad 8,) ergo 16 ad 18 in ratione subsesquioctava. Et pariter in similibus. Apud Aristotelem, ἐπιμόριος & ὑπεπιμόριος hoc sensu occurrunt Metaph. 4. & alibi. Et apud alios passim. *Subsuperparticularis.*

Ratio seu proportio *Superpartiens* ἐπιμερὴς est ratio quantitatis majoris ad minorem, quando major minorem semel quidem, nec sæpius, continet; sed & aliquot insuper ipsius partes aliquotas. Sic 5 ad 3, sūt in ratione Superpartiente: numerus enim quinarius ternarium continet semel, & duos insuper ipsius trientes. Si enim 5 per 3 dividamus, erit quotiens $1\frac{2}{3}$. 3) 5 ($1\frac{2}{3}$ *Superpartiens.*

Hujus proportionis species duplicem characterem postulant. Cum enim major minorem contineat, & insuper aliquot ipsius partes aliquotas; dicendum est, *quot* partes, & quidem *quotas* continet. Priori respectu dicitur, *Superbipartiens*, *Supertripartiens*, *Superquadripartiens*, *Superdecupartiens*, &c. prout quantitas major, præter ipsam minorem, contineat insuper ipsius partes aliquotas, duas, tres, quatuor, decem, &c. Posteriori respectu dicitur *superpartiens tertias*, *superpartiens quartas*, *quintas*, *decimas*, *centesimas*, &c. prout partes illæ aliquotæ sint trientes, quadrantes, &c. hoc est, partes tertiæ, quartæ, quintæ, decimæ, centesimæ, &c. Sic ratio numeri 5 ad 3, vel 10 ad 6, est superbipartiens tertias: Major enim minorem utrobique semel continet, & insuper duos ipsius trientes, ut ex divisione liquet. Sic 7 ad 4, est supertripartiens quartas. Et pariter in similibus.

3)5 (1 $\frac{2}{3}$ 5)7 (1 $\frac{2}{5}$ 6)11 (1 $\frac{5}{6}$ 10)13 (1,3 = 1 $\frac{3}{10}$ = $\frac{13}{10}$
6)10 (1 $\frac{4}{6}$ 5)8 (1 $\frac{3}{5}$ 7)10 (1 $\frac{3}{7}$ 100)107 (1,07 = 1 $\frac{7}{100}$
4)7 (1 $\frac{3}{4}$ 5)9 (1 $\frac{4}{5}$ 8)15 (1 $\frac{7}{8}$ 100)108 (1,08 = 1 $\frac{8}{100}$

Subsuperpartiens. Ubi vero quantitatis majoris ad minorem ratio est *Superpartiens*, superbipartiens, supertripartiens, &c; Erit minoris hujus ad illam majorem, ratio *Subsuperpartiens*, subsuperbipartiens, subsupertripartiens, &c. Nempe ratio 3 ad 5, vel 6 ad 10, est subsuperbipartiens tertias; et 4 ad 7, subsupertripartiens quartas. Et in aliis pariter.

Notandum autem est, in rationibus superpartientibus, denominatorem partis aliquotæ majorem esse debere quam est Numerus earundem aliquotarum partium assumptarū. Non igitur dicitur supertripartiens tertias, vel superquadripartiens quartas: nam $\frac{1}{3}$, vel $\frac{4}{12}$, tantundem sunt ac 1. Et 1 $\frac{1}{3}$, vel 1 $\frac{4}{12}$, &c. idem est atq; 2: ideoq; major minorem sæpius quam semel contineret; (nempe bis,) quod est contra definitionem rationis superpartientis. Multo minus dicendum erit, Superquadripartiens tertias vel quartas, &c. (ut denominator aliquotarum partium minor sit quam earundem numerus;) ita enim major saltem bis supponetur minorem continere, et aliquid insuper.

Sed neq; rite dicitur, Ratio superbipartiens quartas, sextas, &c; vel supertripartiens sextas, nonas, &c. vel superquadripartiens octavas, decimas, duodecimas, &c; et pariter in similibus: ut denominator aliquotarum partium assumptarum, et earundem numerus, communem aliquem divisorem habeant qui utrumq; exacte metiatur. Sunt enim 1 $\frac{2}{4}$ = 1 $\frac{1}{2}$, et 1 $\frac{2}{6}$ = 1 $\frac{1}{3}$, et 1 $\frac{3}{6}$ = 1 $\frac{1}{2}$, et 1 $\frac{3}{9}$ = 1 $\frac{1}{3}$, et 1 $\frac{4}{8}$ = 1 $\frac{1}{2}$, et 1 $\frac{4}{10}$ = 1 $\frac{2}{5}$, et 1 $\frac{4}{12}$ = 1 $\frac{1}{3}$ &c. Non igitur dicenda est ratio superbipartiens quartas, aut supertripartiens sextas, aut superquadripartiens octavas; sed ratio sesquialtera. Neq; item superbipartiens sextas, aut supertripartiens nonas, aut superquadripartiens duodecimas, sed ratio sesquitertia. Neque, superquadripartiens decimas; sed superbipartiens quintas. Et similiter alibi.

Siquis urget; per Rationis superpartientis definitionem, hujusmodi loquendi formulas non excludi: Dicendum erit, Rationum

num definitiones intelligendas esse de *Rationibus ad minimos terminos redactis*. Prout enim in Fractionibus, (ut post dicetur,) ita & in Rationibus describendis, plerumq; expedit, ut terminis quam fieri potest minimis describantur, quo melius animus valorem assequatur. Secus enim eadem non raro Ratio et superbipartiens, et supertripartiens, et superquadripartiens, &c. dicenda erit. Siquidem superbipartiens quartas, supertripartiens sextas, superquadripartiens octavas, aliaq; hujusmodi rationum nomina, eandem ipsam rationem designabunt. Imo vero eadem ipsa Ratio et superparticularis erit, et superpartiens: siquidem illa ipsa nomina nuper recensita, quæ rationes superpartientes videantur indicare, revera superparticularem rationem significant, nempe sesquialteram. Sunt enim $1\frac{2}{4} = 1\frac{3}{6} = 1\frac{4}{8} = 1\frac{1}{2}$.

At siquis nihilominus contendat; neque necesse esse, nec quidem semper expedire, ut vel fractiones vel rationes in minimis terminis exprimantur: Neq; etiam magnum esse incommodum, eandem ipsam rationem nunc superbipartientem, nunc supertripartientem, &c. fortasse & nonnunquam superparticularem, vel etiam multiplicem, dici posse: Vel etiam, si ratio multipla aut quæcunq; alia, tanquam si esset superparticularis, vel superpartiens, vel cujusvis generis, proponatur; neutiquam id formidandum esse, dummodo utcunq; sic proponatur ratio ut ipsius valorem mens satis assequi valeat. Ego quidem fateor, non tanti rem esse ut de verbis contendamus: Imo non sine magno nonnunquam commodo, hujusmodi rationum quasi metamorphoses exerceri posse; atq; eandem ipsam quantitatem, Protei instar, quacunque libet forma exhiberi posse: quod & ubi opus postulet faciendum erit. At cæteris paribus, ubi nihil in contrarium suadet, tum rationes, tum fractiones, aliæve quantitates, terminis quam fieri potest simplicibus explicari par est.

Restant adhuc duo Rationum genera explicanda; Multiplex-superparticularis, & Multiplex-superpartiens; cum correlatis.

Multiplex-superparticularis, est ratio majoris quantitatis ad minorem, quando major minorem aliquoties continet (saltem bis) & unam insuper ipsius aliquotam partem. Ut 9 ad 4, Quippe novenarius quaternarium bis continet, & ipsius insuper quadrantem. *Multiplex superparticularis.*

Hujus

Hujus ſpecies ſunt, Dupla-ſeſquialtera, Dupla-ſeſquitertia, Dupla-ſeſquiquarta, &c. Tripla-ſeſquialtera, Tripla-ſeſquitertia, &c. aliæque ejuſmodi in infinitum. Sic ratio 9 ad 4, eſt dupla-ſeſquiquarta; 7 ad 2, eſt tripla-ſeſquialtera; 42 ad 10 eſt, quadrupla-ſeſquiquinta; 101 ad 10, eſt decupla-ſeſquidecima. Et pariter in aliis.

4) 9 (2 1/4
2) 7 (3 1/2
10) 42 (4,2 = 4 1/5
10) 101 (10,1 = 10 1/10

Duplici itaq; charactere opus eſt ad hanc rationem exprimendam; altero, quo ſpecies multiplicitatis indicetur, (dupla tripla, &c.) altero, quo deſignetur aliquota pars, puta, num dimidia, tertia, &c.

Submultiplex-ſuperparticularis.

Ubi autem ratio quantitatis majoris ad minorem eſt multiplex-ſuperparticularis; minoris hujus ad illam majorem dicitur *Submultiplex-ſuperparticularis*. Hujuſque ſpecies ſpeciebus illius correſpondent. Eſt igitur 4 ad 9, ratio ſubdupla-ſeſquiquarta; 2 ad 7, ſubtripla-ſeſquialtera; 10 ad 42, ſubquadrupla-ſeſquiquinta; 10 ad 101, ſubdecupla-ſeſquidecima. Et ſic in aliis.

Multiplex-ſuperpartiens

Ratio multiplex-ſuperpartiens, eſt ratio quantitatis majoris ad minorem, quando major minorem aliquoties continet, & ipſius inſuper aliquot partes aliquotas. Ut 8 ad 3. Nempe numerus ille hunc continet bis & duas inſuper hujus partes tertias, ſive trientes.

Hujus ſpecies ſunt; Dupla-ſuperbipartiens-tertias, Dupla-ſuperquadripartiens-quintas, Tripla-ſuperpartiens-quartas, Quadrupla-ſuperpartiens, ſeptimas, aliæq; ejuſmodi infinitæ. Tales ſunt rationes 8 ad 3; 14 ad 5; 15 ad 4; 31 ad 7. &c.

3) 8 (2 2/3
5) 14 (2 4/5
4) 15 (3 3/4
7) 31 (4 3/7

Triplici itaq; charactere opus eſt ad hanc rationem exprimendam: quo tum numerus multiplicitatis, tum numerus partium aliquotarum, tum harum denominatio indicetur. ut patet.

Submultiplex-ſuperpartiens.

Ubi autem quantitas major ad minorem eſt in ratione Multipla-ſuperpartiente; eſt minor hæc ad illam majorem in ratione *Submultiplici-ſuperpartiente*: et ſpecies hujus ſpeciebus illius correſpondent. Ita ratio 3 ad 8, eſt ſubdupla-ſuperbipartiens-tertias; 5 ad 14, ſubdupla-ſuperquadripartiens-quintas; 4 ad

15,

15, subtripla-supertripartiens-quartas; 7 ad 31, subquadrupla-supertripartiens-septimas. Atq; in aliis pariter.

Quæ autem superius notanda monuimus de ratione (simplici) superpartiente; eadem & hic, mutatis mutandis, notanda sunt de ratione multiplici superpartiente. Nec opus est ut repetantur.

Estq; hæc Rationum distributio quam tradunt Recentiores Arithmetici. Quippe non hæc omnia rationum nomina apud Euclidem occurrunt; sed quædam eorum præcipua. Cum tamen hujusmodi passim apud Mathematicos recentiores occurrant rationum nomina; nequis de illis hæreat, exponenda duxi.

Sicui vero nimis intricatæ videantur hæ rationum appellationes; poterunt illæ simplicius designari per duos numeros eâ quâ res postulet ratione constitutos, præsertim qui sunt in eadem ratione minimas. Puta si, pro ratione subquadrupla-supertripartiente-septimas, eam dicamus rationem quæ est 7 ad 31. Ita, qui dicit, sit A ad B, ut 7 ad 31; tantundem innuit ac si diceret, Sit ratio quantitatis A ad quantitatem B, subquadrupla supertripartiens-septimas. Atque ad hanc formam rationes sæpissime exponi solent.

Rationes itaq; pluribus modis designari possunt. Nempe *Rationum Designatio.*
Vel, nominibus suis, modo indicatis. Ut Duplum, Triplum, Dimidium, Sesquialterum. &c.

Vel quidem, Figuris numericis rationes illas denominantibus: affixa saltem, vel quidem subintellecta, multiplicationis nota. Puta, 2, 3, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, &c. vel $\times 2$, $\times 3$, $\times \frac{1}{2}$, $\times 1\frac{1}{2}$, &c. Quid enim est Duplum, Triplum, Dimidium, Sesquialterum, &c. aliud quam, Multiplicatum in 2, 3, $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ &c.

Vel etiam, per duos numeros in ea ratione constitutos. Puta, Ratio ea quæ est 2 ad 1; 3 ad 1; $\frac{1}{2}$ ad 1, vel 1 ad 2; $1\frac{1}{2}$ ad 1, vel 3 ad 2, &c.

Vel quidem, duabus quibusvis quantitatibus homogeneis ita constitutis; ut lineis, planis, solidis, angulis, &c. (quorum ad invicem ratio exponitur ut jam cognita, vel quasi cognita,) eorumve symbolis. Puta, ut V ad A; ut L ad M; ut R ad S &c.

Vel item, Fractionum instar $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{V}{A}$, $\frac{L}{M}, \frac{R}{S}$, &c.

Cum enim Rationum denominatores nil aliud sit quam Divi-

sionum Quotientes, (ut jam ante fuerit expositum,) Divisiones autem indicare solenne sit interjecta virgula, Dividuum inter & Divisorem, (idq; necessario, ubi numerus dividendus est dividente minor, ut $\frac{1}{2}$; atq; etiam aliàs, aliis de causis, non raro commode,) Quidni & Rationes ita designentur? præfixa tamen, ubi opus fuerit multiplicationis nota. Et quidem ipsæ Fractiones nil aliud sunt quam Rationes; nempe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. illam indicant partem, quæ ad integrum sive unitatem eam habent rationem quam 1 ad 2, 3 ad 5, &c. numerator ad denominatorẽ: Atq; ut 2 est duplum unius, sic $\frac{1}{2}$ est semissis unius, & sic in cæteris. Fractionis itaq; Numerator & Denominator, perinde sunt atq; Rationis Antecedens & Consequens: Si saltem & Fractiones impropriæ (ut loquuntur) unitate quippe majores vel saltem æquales simul intelligantur, quæ rationem æqualitatis, & majoritatis indicent, sicut fractiones propriæ indicant rationes minoritatis, sive minoris inæqualitatis.

Vel etiam, si libet, (quodq; non raro expedit,) simplicibus symbolis, aliarum quantitatum instar. puta $\frac{1}{2} = \frac{V}{A} = R$ &c. Sunt enim Rationes, non minus quam numeri, veræ quantitates.

Perinde igitur est, verbi gratia, sive dicamus, Duplum quantitatis A, sive 2A vel $2 \times A$ vel $A \times 2$, sive $\frac{2}{1}A$, vel $A \times \frac{2}{1}$, sive quod est ad A ut 2 ad 1, sive ad quod A est ut 1 ad 2. Sic Triplum A, $= 3A = A \times 3 = \frac{3}{1}A$. Et semissis A, $= 2)A = \frac{A}{2} = \frac{1}{2}A$. Et sesquialterum ipsius A, $= 1\frac{1}{2}A = 1\frac{1}{2} \times A = A \times 1\frac{1}{2} = A \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}A = 2)3 \times A = \frac{3A}{2}$ &c.

Similiter in proportionalibus designandis; ubi nempe eadem utrobique ratio esse significatur. Puta, A ad B ut 1 ad 2, vel A. B :: 1. 2. vel $A = \frac{1}{2}B$, vel $\frac{A}{B} = \frac{1}{2}$, vel $B)A(\frac{1}{2}$.

Item, Ratio lateris ad diagonium quadrati, L. D :: 1. $\sqrt{2}$, vel $\frac{L}{D} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vel $L = \frac{1}{\sqrt{2}}D$, vel $L = \frac{D}{\sqrt{2}}$. Diagonii vero ad Latus. D. L :: $\sqrt{2}$. 1. vel $\frac{D}{L} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$, vel $D =$

$\sqrt{2}$.

$\frac{\sqrt{2}}{1} L = \sqrt{2} \times L = L \times \sqrt{2} = L\sqrt{2} = \sqrt{:2}\, L\, q = \sqrt{:2} \times Lq.$

Item, L ad M ut R ad S, vel L. M:: R. S. vel $L = \frac{R}{S} M$, $\frac{L}{M} = \frac{R}{S}$. Et similiter alibi.

Quà vero ex omnibus designandi formulis, Rationes quilibet designare velit, penes se sit optio: Liberum quippe cuiq; erit, quam velit eligat; vel etiam nunc hanc nunc illam, prout præsenti negotio magis accommodum videatur.

CAP. XXX.

De Rationum Compositione sive Continuatione, & Imminutione. Ratio Duplicata, Triplicata, &c. Item Subduplicata, Subtriplicata, &c. Et Subduplicatæ-triplicata, &c.

AD pleniorem Rationum traditionem, supereſt ut Rationum Compositio, sive Continuatio, & Imminutio exponantur.

Rationum Compositionem, sive Continuationem, sive (ut nonnulli loquuntur) Additionem, definit Euclides, 5 d 6. Λόγοι ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγονται, ὅταν, αἱ τῶν λόγων πλευραὶ ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι, ποιῶσί τινας: forte τινά. *Ratio ex rationibus componi dicitur, quando rationum quantitates inter se multiplicatæ, aliquas* (vel *rationem aliquam*) *efficiunt.* *Rationum Compositio, sive continuatio, quid.*

Quid per *rationum quantitates* intelligit Euclides non inter interpretes convenit: num scilicet ipsos terminos; num quod ex eorum comparatione provenit. Utrumvis autem dicatur perinde est. Puta, si rationis A ad B termini, in terminos rationis α ad β respective ducantur; nempe $A \times \alpha$, $B \times \beta$; ut proveniat ratio $A \times \alpha$ ad $B \times \beta$: sive etiam ratio $\frac{A}{B}$ ducatur in rationem $\frac{\alpha}{\beta}$, ut proveniat $\frac{A}{B} \times \frac{\alpha}{\beta}$: perinde est; nam $\frac{A}{B} \times \frac{\alpha}{\beta} =$

$= \frac{A\alpha}{B\beta}$: ut ex fractionum multiplicandarum regulis suo loco patebit. Fusius hæc exponit Eutocius ad prop. 4. lib. 2. Archim. *de Sphæra & Cylindro.*

Quod autem volunt tum Euclides, tum alii, hoc est. verbi gratia, *Duplum tripli*, vel *Triplum dupli*, (hoc est, Sextuplum,) componi ex *Duplo* & *Triplo*, quippe quæ quantitates invicem ductæ constituunt duplum tripli: puta $\frac{2}{1} \times \frac{3}{1} = \frac{6}{1}$, vel $2 \times 3 = 6$. Sic Tripli dimidium, vel Dimidii triplum, (hoc est, Sesquialterum,) componitur ex Triplo & Dimidio: puta $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Sic ratio *Dupla*, componi dicitur ex *Sesquialtera* & *Sesquitertia*, (hoc est, ut loquuntur Musici, ex Diapente & Diatesseron componitur Diapason,) quia $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$. Sic ratio $\frac{ABC}{\alpha\beta\gamma}$ componitur ex rationibus $\frac{A}{\alpha}, \frac{B}{\beta}, \frac{C}{\gamma}$. Item $\frac{A}{D}$ componitur ex $\frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{C}{D}$, quia $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{D} = \frac{ABC}{BCD} = \frac{A}{D}$. quæ dicitur λόγος δίσου, *ex æquo*, sive *ex æqualitate*. 18 d 5.

Rationis Imminutio.

Contra vero, Ratio $\frac{AB}{\alpha\beta}$, imminuta ratione $\frac{A}{\alpha}$, est $\frac{B}{\beta}$; quia $\frac{A}{\alpha} \,)\, \frac{AB}{\alpha\beta} \,)\, \frac{B}{\beta}$. Quod nonnulli sic efferunt, si ex ratione $\frac{AB}{\alpha\beta}$ auferatur ratio $\frac{A}{\alpha}$, manebit ratio $\frac{B}{\beta}$.

Cur autem hanc rationum Imminutionem non pariter definiverit Euclides atque Compositionem sive Continuationem; causa forsan erat, quoniam id minus videbatur necesse, cum utrumq; per compositionem fieri possit. Perinde enim est rationem $\frac{AB}{\alpha\beta}$ ratione $\frac{A}{\alpha}$ imminuere, atq; cum ratione $\frac{\alpha}{A}$ componere. Nam $\frac{A}{\alpha} \,)\, \frac{AB}{\alpha\beta} \,(\, \frac{B}{\beta} = \frac{AB\alpha}{\alpha\beta A} = \frac{AB}{\alpha\beta} \times \frac{\alpha}{A}$.

Hæc autem Rationum Compositio, an Additio judicanda sit an Multiplicatio, haud satis videtur apud Arithmeticos (vel etiam Geometricos) constare. Utut enim certum sit quantitates invicem *Multiplicari*, non Addi: (nam verbi gratia, Duplum tripli

tripli non idem est atq; *duplum & triplum*, quippe hoc est *quintuplum*, nam $3+2=5$; sed *Triplum in 2 multiplicatum*, adeoque *Sextuplum*. nempe $\times 3 \times 2 = \times 6$:) Attamen usu fere obtinet, ut rationum potius *Additio* dicatur, quæ est revera multiplicatio. Et quidem ne Multiplicationis nomine jam tandem ex postlimino gaudeat, id maxime impedit, quod *Multiplicatio rationum* jam alio sensu usurpetur, adeoq; homonymia metuenda sit, si pro rationum continuatione sive compositione usurpandam velimus. Nam rationum Duplicatio, Triplicatio, aliasve multiplicatio, alio plane sensu jam solet usurpari, quam quo jam loquimur, ut mox dicetur.

Malim itaq; ut vel *Compositio* vel (quod vox Græca συγκεῖσθαι magis innuere videtur) *Continuatio* dicatur, quam vel Additio vel Multiplicatio.

Designandam autem malim per notam × Multiplicationis, quam per + Additionis; (nam praxin multiplicando exerceri nemo dubitat:) adeoque quæ ex $\frac{A}{\alpha}$, & $\frac{B}{\beta}$, componitur ratio, scribenda est $\frac{A}{\alpha} \times \frac{B}{\beta}$, non autem $\frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta}$. Adeoq; tota illa de Fractionum Multiplicatione & Divisione tradenda doctrina; de Rationum Continuatione & Imminutione pariter intelligenda erit: sunt enim ipsissima eadem res. Rationum itaque continuendarum praxin in illum locum rejiciendam censui.

At cavendum interim ne *Ratio composita*, λόγος συγκείμενος, 5 d 6 tradita, atq; *Compositio rationis*, σύνθεσις λόγου 14 d 5 definita, pro eodem habeantur. Sunt enim res satis diversæ. Quippe illud Additionis, hoc Multiplicationis est negotium. Ut ex ipsis definitionibus citatis constat. Quod innuisse sufficiat.

Verum hoc omnino spectat, quod de Ratione Duplicata, Triplicata, aliásve multiplicata tradit Euclides 10 d 5, & alibi; vel etiam Subduplicata, Subtriplicata, &c. (Eodem plane modo quo ad Multiplicationem referendæ sunt Quadratio, Cubicatio, aliæve multiplicationes potestatum generativæ; de quibus deinceps dicetur.) Non enim tantundem sonant atq; ratio Dupla, Tripla, Subdupla, Subtripla, &c. vel Duplex, Triplex, &c. (neque enim ratio Sextupla, rationis Triplæ, ratio Duplicata dicitur,

Ratio Duplicata, Subduplicata, &c. quid.

dicitur, utut Dupla sit; quippe Sextuplum est Tripli Duplum.)

Ratio subduplicata, &c. quid.

Sed cum ratio aliqua (sive majoris sive minoris inæqualitatis) cum seipsa continuatur, quæ prodit ratio, rationis expositæ ratio *Duplicata* dicitur; sin in eandem iterum continuetur, ratio *Triplicata* dicitur; & sic deinceps: Quibus, ut correlata, opponuntur ratio *Subduplicata*, *Subtriplicata*, &c. (sicut quantitas in se ducta, expositæ *Quadratum* producit; sin in eandem iterum ducatur, *Cubum*, &c. Sic rationis $\frac{A}{B}$ ratio duplicata est $\frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \frac{AA}{BB} = \frac{Aq}{Bq}$; triplicata, $\frac{A}{B} * \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \frac{Ac}{Bc}$, &c. Et contra; Rationis $\frac{Ac}{Bc}$, ratio subtriplicata est $\frac{A}{B}$: Et rationis $\frac{Aq}{Bq}$, ratio subduplicata est $\frac{A}{B}$. (Ipsius autem $\frac{A}{B}$ rationis, ratio subduplicata erit $\sqrt{\frac{A}{B}}$; subtriplicata, $\sqrt{c}\,\frac{A}{B}$.

Ut plenius patebit, postquam potestatum genesis & analysis tradita fuerit. Nam si expositæ Ratio dicatur Radix, vel potestas prima; Ratio Duplicata erit Quadratum, sive potestas secunda; Ratio Triplicata Cubus, vel potestas tertia; &c. Et Ratio Subduplicata, erit expositæ Radix-quadratica, vel potestas subsecunda; Subtriplicata, expositæ Radix-cubica, vel potestas subtertia. &c.) Sic ratio quadrupla est, rationis duplæ, ratio (non modo dupla, quia $2+2=4$, sed) duplicata, quia $2\times 2=4$; & hujus illa subduplicata. Item rationis triplæ, ratio duplicata est (non sextupla, quod sit $3+3=6$, sed) noncupla, quia $3\times 3=9$: triplicata vero vigintiseptupla, quia $3*3\times 3=27$. Sic rationis $\frac{1}{2}$, duplicata est $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$; triplicata, $\frac{1}{2}*\frac{1}{2}*\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. &c. Et rationis $\frac{1}{3}$, duplicata est $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$; triplicata, $\frac{1}{3}*\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$. Item rationis $\frac{2}{3}$, ratio duplicata est $\frac{2}{3}*\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$; triplicata, $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$; quadruplicata $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$. &c.

Nec aliud volunt definitiones Euclidis, 10 d 5. Ὅταν τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον, τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἤπερ πρὸς τὸ

τὸ δὲ τρεῖς· καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἐπὶ πλεῖον, ἕως ἂν ᾖ ἀνάλογία ἡ ἀρχή. *Cum tres magnitudines* (continue) *proportionales fuerint, prima ad tertiam, duplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam: At cum quatuor magnitudines* (continue) *proportionales fuerint; prima ad quartam, triplicatam rationem habere dicitur ejus quam habet ad secundam: & semper deinceps, uno amplius, quamdiu proportio extiterit.* Verbi gratia, si quantitas prima A, sit semissis secundæ B, & hæc tertiæ C, atq; hæc quartæ D, & sic deinceps, (ubiq; scilicet in ratione subdupla;) Erit $B = 2A$, $C = 2B = 4A$, $D = 2C = 4B = 8A$, &c. Ideoq; ratio A ad B est $\frac{1}{2}$, (cum enim $B = 2A$, erit $A . B :: 1 . 2$.) Ratio A ad C (duplicata) $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, (nam propter $C = 4A$, erit $A . C :: 1 . 4$.) Ratio A ad D (triplicata) $\frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, (nam propter $A = 8D$, erit $A . D :: 1 . 8$.) Et sic deinceps.

Atq; hic non incommodum erit notare; quod Euclides non διπλην, τριπλην, &c. vel διπλάσιον, τριπλάσιον, &c. dicit, (quibus vocibus alibi id innuere solet quod Latini vocibus *duplum, triplum*, &c. vel etiam *duplex, triplex*, &c.) sed διπλασίονα, τριπλασίονα, &c. (quod & perpetuo hoc sensu observat,) quem aliquatenus imitari conantur interpretes, dum non tam rationem *duplam, triplam*, &c. vel etiam *duplicem, triplicem*, &c. hoc sensu; sed potius, mutata formâ, *duplicatam, triplicatam*, &c. dicunt: tum ut diversitatem formarum διπλάσιος, & διπλασίων apud Euclidem, aliquatenus referant; tum ut ὁμωνυμία aliquatenus caveatur.

Ratio Subduplicatæ-triplicatæ. &c.

Verum & hujusmodi rationes (puta duplicata, triplicata, subduplicata, &c.) invicem continuari possunt, unde ratio ex illis composita emergat. Puta rationis $\frac{A}{B}$, ratio triplicata est $\frac{Ac}{Dc}$ hujus autem Subduplicata est $\sqrt{\frac{Ac}{Bc}}$: ergo rationis $\frac{A}{B}$ ratio Triplicatæ. Subduplicata, erit $\sqrt{\frac{Ac}{Bc}}$. Sic rationis $\frac{V}{A}$, ratio Triplicatæ-subduplicata, erit $\sqrt{\frac{V}{A}}c$. Eodem modo, cum rationis $\frac{V}{A}$ ratio duplicata sit $\frac{V}{A}q = \frac{V}{A} \times \frac{V}{A}$, atq; hujus triplicata $\frac{V}{A}q \times \frac{V}{A}q \times \frac{V}{A}q = \frac{V}{A} * \frac{V}{A} * \frac{V}{A} \times \frac{V}{A} \times \frac{V}{A} \times \frac{V}{A}$; erit hæc, rationis $\frac{V}{A}$ expositæ, ratio duplicatæ-triplicata, (sive triplica-

tæ

tæ-duplicata,) nempe ſextuplicata. Vel etiam ſi ratio quævis ſimplici ſymbolo deſignetur, puta R, erit R q vel R ² ratio duplicata, R ³ triplicata, R ⁴ quadruplicata, R ⁶ = R ³ × R ² ſextuplicata, ſive triplicatæ-duplicata, √ R ſubduplicata, √ 3 R ſubtriplicata, √ 3 R ² duplicatæ ſubtriplicata. Nec ſecus alibi.

Totius autem hujus negotii praxis Arithmetica, (puta datæ rationis rationem duplicatam, triplicatam, ſubduplicatam, ſubduplicatæ triplicatam, &c. invenire, vel numeris aut etiam ſymbolis deſignare,) ex fractionum multiplicatione, quadratione, cubicatione, & radicum cujuſvis poteſtatis analyſi, dependet: quæ deinceps ſuis locis tradentur.

CAP. XXXI.

Progreſſio Geometrica. Continua: Diſjuncta. Inveſtigatio Summæ. Inveſtigatio termini ultimi; vel cujuſvis remoti.

Progreſſio Geometrica, quid?

PRogreſſionis Geometricę originem & naturam ſuperius tradidimus Cap. XXV. Quippe quæ Rationum æqualitatem (ſimilitudinem, identitatem,) reſpicit, ut progreſſio Arithmetica æqualitatem Differentiarum, exceſſuū puta ſive defectuum.

Euclidi dicitur Ἀναλογία: Interpretibus, *Proportio*, *Proportionalitas*, *Progreſſio*. Cicero ἀναλογίαν interpretatur *Comparationem* & *Proportionem*; & quidem primus, ipſo teſte, (in Plat. Timæi interpretatione,) *Quæ Græcè ἀναλογία Latinè* (*audendum eſt enim, quoniam hæc primum a nobis novantur*) *Comparatio Proportiove dici poteſt.*

Euclidi definitur Ἀναλογία, ἢ ὅροι λόγων ὁμοιότης, *Rationum ſimilitudo.* 4 d 5. vel (ſecundum alios) 8 d 5. Ariſtoteli, Ethic. 5. ἰσότης τῶν λόγων. *Rationum æqualitas.* Proclus in Plat. de Rep. λόγων ἐστὶν ἀναλογία ταυτότης, *rationis Identitas.* Theo. Smyrnæus ἀναλογία ἐστὶ πλειόνων λόγων ὁμοιότης ἢ ταυτότης, *rationum ſimilitudo ſeu identitas.* Fabius Quintilianus *Similitudinis* vocem comprobat, l. 5. c 11. Ἀναλογίαν *quidem a Simili ſeperaverunt, nos eam ſubjectam huic generi putamus. Nam, ut Unum ad Decem, ſic Decem ad Centum, Simile certe eſt.* Euclides ipſe, utut, in Definitione, *Similitudinis*

litudinis vocem adhibeat, alibi tamen passim, *Identitatem* potius innuit; nec tam Rationem rationi *æqualem* dicit, aut *similem*, quam *eandem*. Ut per totum lib. 5. passim est videre. Perinde autem est sive similitudinem, sive Æqualitatem, sive etiam Identitatem dicamus; dummodo enim de sensu convenit, non est ut de verbis admodum litigemus.

Distribuitur autem (ut supra dictum est) in Continuam, & Disjunctam (sive discretam, discontinuam; Budæo, hiulcam & interruptam.) Illam appellat Aristoteles συνεχῆ: hanc διηρημένην.

Illa est, ubi termini ita continue procedunt, ut intermedius quilibet sit tum antecedentis consequens, tum consequentis antecedens, in eadem ratione. Ut 2. 4. 8. 16 ∴ *Continua.*

Hæc, ubi eadem quidem recurrit ratio, non autem continue, sed disjunctim. Ut 2. 4 :: 3. 6. *Disjuncta.*

Proportio itaq; sive Progressio, tribus ad minimum terminis constituitur. Quod & notat Euclides 9 d 5. Ἀναλογία δὲ, ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἔστιν. *Analogia* (proportio, proportionalitas,) *in tribus terminis paucissimis consistit.* Nempe, proportio continua, ut 2. 4. 8 ∴ ubi eadem intercedit ratio inter primum & secundum, atq; inter secundum & tertium. Proportio autem discontinua sive interrupta, nonnisi quatuor saltem terminis constituitur; puta 2. 4 :: 3. 6. Cum enim ratio quælibet duos terminos postulet, quippe qui invicem comparantur; eademq; ratio saltem bis occurrat ut constituatur analogia, quæ rationes comparat: si terminus medius sit utriq; rationi communis (puta prioris consequens, & posterioris antecedens) in tribus terminis eadem bis reperiri potest ratio; sin minus, non nisi in quatuor, cum utriusq; rationis duo termini, a duobus reliquis terminis alii sint. Potest autem tum analogia continua pluribus adhuc quam tribus; & disjuncta, pluribus quam quatuor absolvi. Puta 2. 4. 8. 16. 32 ∴ sunt continue proportionales; discontinue vero 2. 4 :: 3. 6 :: 9. 18 :: 5. 10. Vel etiam (nam & sic proportionales notare licebit) 2. 3. 5 :: 4. 6. 10. puta, ut sunt ad invicem 2, 3, 5; sic & 4, 6, 10.

De Progressione Geometrica continua, duo præsertim tradi solent operationum compendia; duobus Problematis proposita.

Primum est; Totius progressionis summã, sine continua intermediorum omnium terminorum additione, invenire. Alterum est; Terminum ultimum, aliumve a primo satis remotum, neglectis intermediis, invenire.

Investigatio Summæ.

Primum quod attinet. Continuæ Progressionis summa sic reperitur. Si terminus ultimus per communem rationem multiplicetur, (sive, quod tantundem est, progressio per unum adhuc gradum continuetur;) atq; inde auferatur terminus primus, & quod restat per numerum unitate minorem quam est communis ratio dividatur, prodibit progressionis summa. Hoc est, si terminus primus seu minimus dicatur A, maximus V, communis ratio R, & progressionis summa S. erit $\frac{VR - A}{R - 1} = S$. Cujus Regulæ demonstrationem deinceps exponemus.

2	0
6	1
18	2
54	3
162	4
486	5
1458	6
4374	7
13122	8
39366	9
59048	

Sic in progressione adjuncta, decem terminorum. Terminus ultimus 39366 in communem rationem 3 ductus, facit 118098; unde demptis 2 (termino primo) restant 118096. Qui numerus per 2 (numerum unitate minorem quam est 3, ratio communis) divisus, quotientem exhibet 59048, totius progressionis summam. quæ quidem eadem est & quæ ex terminis omnibus continue additis emergit.

39366
×3
118098
−2
2) 118096
59048

Cum autem res tædio plena videri possit, in prolixioribus saltem progressionibus, singulos terminos continua multiplicatione sigillatim investigare; Hujus itaq; operationis compendium quærit problema illud alterum; Nempe

Investigatio termini ultimi.

Progressionis cujusvis inchoatæ, terminum ultimum, aliumve quemvis assignatum, a primo satis remotum, invenire. Quod hoc pacto faciendum docent. Progressio exposita per aliquot saltem gradus inchoetur. Et singuli termini notari intelligantur totidem numeris naturali serie progredientibus a ciphra inchoatis;

choatis; puta 0,1,2,3,4, &c. (vel etiam quibusvis aliis, continua progressione procedentibus, ab 0 inchoatis:) qui *Indices* vocari solent, sive *Exponentes*; distantiam cujusq; termini a primo indicantes. Hac præparatione factâ; si terminorum jam inventorum quilibet multiplicetur vel in se vel eorum alium quemlibet; & productum per terminum primum dividatur: prodibit terminus ille cui respondet Index ex invicem multiplicatorum Indicibus additis conflatus. Atq; hoc, quoties opus fuerit, iterandum erit.

Exempli gratia. In exposita progressione; Inventis terminis primoribus quatuor, 2, 6, 18, 54, quibus respondent indices 0, 1, 2, 3. Ductis 54 in 54 (termino quarto in seipsum, cujus index 3, 3,) fiunt $54 \times 54 = 2916$; quem numerum si per 2 terminum primum dividamus, proveniet 2)2916 (1458 terminus septimus cujus index $6 = 3 + 3$. Deinde, si 1458 terminus septimus jam inventus, (cujus index 6,) ducatur in 54 terminum quartum, (cujus index 3) prodibunt 78732, quæ per 2 (terminum primum) divisa, exhibebunt 2)78732 (39366 terminum decimum, cujus index $9 = 6 + 3$. Et sic deinceps, quousq; opus fuerit, progressio per saltus continuabitur.

2	0	54	3
6	1	×54	+3
18	2	2)2916	
54	3	1458	6
		×54	+3
1456	6	2)78732	
		39366	9
39366	9		

Exemplum hujusmodi aliud notissimum libet adjungere. Sint in equi cujusdam calceis singulis sex clavi, adeoq; in omnibus 24. Et venum expositus equus ea lege ut emptor pro primo clavo denarium solvat, pro secundo duos, pro tertio 4, & sic deinceps, singulorum clavorum pretium continue duplando. Quæritur, quanti emendus est Equus?

Vel etiam, Si quis servum conduxerit in annum integrum,

ea lege ut prima septimana recipiat denarium, secunda duos, tertia 4, & sic deinceps, singulis septimanis mercedem duplando. Quæritur, quantam habiturus est mercedem servus anno integro, sive septimanis 52?

Constituantur primo, continua multiplicatione, numeri aliquot primores, puta sex, 1, 2, 4, 8, 16, 32. quorum Indices 0, 1, 2, 3, 4, 5. Ductis itaque in se 32 (termino sexto cui index 5) fiunt 1024. Quæ cum per terminum primum dividenda sint, fitq; ille 1, numerus dividendus inde non mutatur; & propterea 1024 terminus ille est cui convenit Index $10 = 5 + 5$, nempe undecimus, sive post primum decimus. Ille autem in se ductus producit (eadem ratione,) terminum post primum vicesimum, quia $10 + 10 = 20$. Hic autem (eadem ratione) ductus in 16, terminum post primum quartum (cui index 4) producit terminum cui index $24 = 20 + 4$. Qui quidem terminus cum fit ordine vicesimus quintus; adeoq; clavi ultimi, nempe vicesimi quarti, pretium exhibeat uno adhuc gradu auctum; sive quod tantundem est, terminum ultimum in communem rationem ductum; Hinc si auferatur terminus primus 1, numerus residuus 16777215 (qui, cum per communem multiplicatorem unitate minutum, nempe $2 - 1 = 1$, dividendus sit; hac divisione non immutetur,) est ipse numerus denariorum quibus emendus est equus: qui millena millia superat.

1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
1024	10
1048576	20
16777216	24
281474976710656	48
4503599627370496	52
− 1	
4503599627370495	

Sin adhuc continuanda sit progressio ad locum usque quinquagesimum secundum; id eodem modo fiet. Nempe ducto in seipsum termino modo invento, (cujus index 24,) habebitur ille cujus index $48 = 24 + 24$. Atq; hic item in illum cujus index 4, habebitur ille cujus index 52. (nempe ultimus in communem rationem ductus) qui, unitate minutus, summam totius progressionis exhibet: mercedem quidem satis amplam.

Atq;

Atq; hinc abunde liquet in quam immenſam & plane incredibilem ſummam ab exiguis principiis in continua progreſſione Geometrica perveniatur.

Priuſquam autem hoc negotium dimittam; libet & Exſemplum aliud annectere, ex Authore Arabico deductum; (quod D. *Pocockio* noſtro, ſummæ in linguis Orientalibus Eruditionis viro, debeo:) unde, non modo hujuſmodi computi exſemplum, (fortaſſe, omnium antiquiſſimum, ad cujus imitationem alia fuerint excogitata;) ſed & aliarum aliquot inventionum originem videre licet. Nempe in Commentariis quos ſcripſit *Seláho'ddîn Mohammed Alſéphadi*, in Nobiliſſimi Poetæ *Tograii* Poema, *Lamiato'l Ajam* dictum, ad hunc verſum

ان الملي حدثتني *Enna'l ola hadathatni*

hæc habentur

الصحيح ان هذه لفظة عجمية واصلها بالعجمية
شش رنك معناه ستة الوان وهي الشاه والفرزان
والفيل والفرس والرخ والبيدق والناس كثير منهم
من يغلط في الصولي وهوابو بكر بن محمد بن يحيي
بن عبد الله بن العباس ابن صول تكين الكاتب
ويزعم انه وضع الشطرنج لماضرب المثل فيه والصحيح
ان واضعه صه بن داهر الهندي لان ارد شهر بن بابك
اول ملوك الفرس الاخرة قد وضع النرد ولذلك قيل
انه ردشهر جعله مثلا للدنيا وامثلها فرتب الرقعة
اثني عشر بيتا بعدد شهور السنة والمهارك ثلثين
قطعة

قطعة بعدد ايام الشهر والفصوص مثلا لافلاك الدايرة
ورميها مثل تقلبها ودورانها والنقط فيها بعدد الكواكب
السيارة كل وجه منها سبعة الشش ويقابله الملك
والبنج ويقابله الدب والجهار ويقابله السبة وجعل ما ياتي
به اللاعب من النقوش كالقضا والقدر تارة له وتارة
عليه وهو يصرف المهارك علي ماجات به النقوش لكنه
ان كان عنده حسن نظر عرف كيف ياتي وكيف
يتحيل علي الغلب وقهر خصمه مع الوقوف عند ما
حكمت به الفصوص وهذا هو مذهب الاشاعرة اخبرني
من اثق به ان الشيخ تقي الدين احمد بن تيمية كان
يقول اللعب بالنرد خير من اللعب بالشطرنج لان
لاعبه يعترف بالقضا والقدر والشطرنج لاعبه ينفي
ذلك وهو اقرب الي الاعتزال فلما وضعت
الفرس ذلك افتخرت به وكان ملك الهند يومين
باهيب فوضع له صعصعة المذكور الشطرنج فقضت حكما
ذلك العصر بتفضيله ولما عرضه علي الملك واوضح
له امره سأله ان يتمني عليه فتمني عليه عدد تضعيفة
قمحا فاستصغر الملك ذلك من همته وانكر عليه ما قابله
به من طلب النزر القليل في ذلك المقام فقال ما اريد
غير

غير ذلك فامر له بذلك فلما حسبه ارباب الديوان قالوا
للملك ما عندنا ما يقارب ذلك القليل منه فاذكر ذلك
فاوضحوه له فاعجبه الامر الثاني اكثر من الاول ::
قال القاضي شمس الدين احمد بن خلكان ولقد كان
في نفسي من هذه المبالغة شي حتي اجتمع بي بعض
حساب الاسكندرية وذكر لي طريقا تبين لي ما ذكروه
واحضر لي ورقة بصحة ذلك وهو اذه ضاعف الاعداد الي
البيت السادس عشر فاثبت فيه اثنين وثلثين الفا
وسبع ماية وثمانية وستين حبة وقال نجعل هذه الجملة
مقدار قدح وقد عمرتها وكان كما ذكر والعهدة
عليه من هذا النقل ثم ضاعف السابع عشر الي البيت
العشرين فكان فيه ويبة ثم انتقل من الويبات الي
الاردب ولم يزل يضعفها حتي انتهي في بيت الاربعين
الي ماية الف اردب واربعة وسبعين الف اردب وسبع
ماية واثنين وستين اردبا وثلثي اردب وهذا المقدار
شونة ثم اذه ضاعف الشون الي بيت الخمسين فكانت
الجملة الفا واربعا وعشرين شونة وهذا المقدار مدينة
ثم اذه ضاعف ذلك الي البيت الرابع والستين وهو
اخر الابيات فكانت الجملة ستة عشر الف مدينة
وثلث

وثلث ماية واربعا وثمانين مدينة وقد تعلم انه ليس في
الدنيا مدن اكثر من هذا العدد انتهي قلت اخر
ما اقتضاه تضعيف رقعة الشطرنج ثمانية عشر الف الف ست
مرات واربع ماية واربعون الفا خمس مرات وسبع ماية
واربع واربعون الفا اربع مرات وثلثة وسبعون الفا ثلث
مرات وسبع ماية وتسعة الاف مرتين وخمس ماية واحد
وخمسون الفا وستماية وخمسة عشر عددا ———

١٨٤٤٦٧٤٤٠٧٣٧٠٩٥٥١٦١٥

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

واذا جمع هذا العدد هرما واحدا مكعبا طوله ستين ميلا
وعرضة كذلك وارتفاعه كذلك بالميل الذي هو
اربعة الاف ذراع بالعمل الذي هو ثلثة اشبار معتدلة
علي ان الاردب المصري مساحته ذراع مكعبا وزنته
مايتان واربعون رطلا وكل رطل ماية واربعة
واربعون درهما والدرهم اربعة وستون حبة من القمح
وكل بيت اذا ربعنا ما فيه من العدد حصل من
مربعه ما يجب ان يكون في البيت الذي عدده كضعف
ذلك البيت الا واحدا فاذا ربعنا ما في الثالث مثلا
حصل ما في الخامس واذا ربعنا ما حصل في
الخامس حصل ما في التاسع
فاذا

فاذا ربعناه حصل ما في السابع عشر فاذا ربعناه حصل
ما في الثالث والثلثون فاذا ربعناه حصل ما في
الخامس والستين فاذا اسقطنا منه واحدا كان
الباقي جملة ما في البيوت كلها الي البيت الرابع
الستين وان ضعفناه قبل ان ننقص منه واحدا كان
ضعفه حاصل البيت الرابع والستين وبهذا العمل يحصل
تضعيف رقعة الشطرنج من خمس ضربات ——

ويقال فضايل الهند ثلثة سبقوا بها من سواهم من
الناس كتاب كليلة ودمنة ولعبة الشطرنج والتسعة
احرف التي تجمع انواع الحساب ٭

Quæ Latine ſic ſonant. "Certum eſt, vocabulum hoc "[ſhetrunge, *Scacchorum ludus*;] Perſicum eſſe, cujus Thema "Perſice eſt *ſheſh rang*, quod ſignificat *ſex ſpecies*, quæ ſunt "*Alſhâh*, *Alpharzân*, *Alphîl*, *Alphâras*, *Alrôch*, & *Bódak*. [Hoc eſt, "Rex, Regina, Elephas, Equus, Roch, Pedes.] Hominum au- "tem non pauci falluntur, quod ad *Alſûli*, qui eſt *Aba Beer Ebn* "*Mohammed Ebn Yahya Ebn Abdollah Ebno 'l Abbâs Ebn Sûl Takîn* "ſcriba, autumantes illum, Scacchorum ludum inveniſſe, eo "quod Proverbio originem dedit. Certum autem eſt ludi hu- "jus authorem fuiſſe *Seſſa Ebn Dahir* Indum. Cum enim "*Ardſhîr Ebn Babec*, primus Regum Perſiæ Poſteriorum, Calcu- "lorum ludum [*Tables*] inveniſſet; unde & *Nardſhîr* appella- "tus eſt [*ludus ille*] quem ad exemplar mundi compoſuit: "Abacum in duodecim domos diſtinguens, ad numerum men- "ſium Anni; Calculos triginta, numero dierum menſis; Talos, "ad inſtar ſphærarum circumrotantium; eorúmq; jactum, ad "inſtar motus & circulationis earundem; in eiſq; puncta nu- "mero Planetarum, quorum ſitus quilibet numerum exhibet "ſeptenarium, (dum ſenioni opponitur monas, quinternioni

" dyas, quaternioni ternio opponitur;) notas quas jactu sorti-
" tur ludens, instar prædeterminationis & decreti divini, quæ
" ipsi aliquando favent, aliquande adversantur; ipse autem
" calculos pro ratione notarum movet, ita interim ut, si per-
" spicaci sit ingenio, dignoscere queat res ea arte disponere, ut
" victoriam consequatur, atq; adversarium suum superet, stante
" quod determinaverint tali; quæ est via Assharioram. ——
" Narravit mihi quidam fide dignus, *Sheich Takioddîn Ahmed*
" *Ebn Tamîmah* dixisse, ludum Calculorum præstantiorem esse
" ludo Scacchorum, quod illis ludens agnoscat Decretum &
" Prædeterminationem: at Scacchiis ludens, eadem neget;
" quod propius accedit at *Matazalorum* sententiam. ——
" Cum ergo hoc inveniissent Persæ, eoq; glorientur; .....
" Regi Indiæ, invenit *Sessa* prædictus Schaccorum ludum,
" quem istius temporis sapientes isti præferendum censuerunt.
" Quem ergo cum Regi exhibuisset, ejusq; rationem ipsi decla-
" rasset; ab ipso *jussus*, quicquid liberet, petere; petit ille
" grana tritici juxta [areolarum] numerum [continue]
" duplicanda. Quod, ut parum quid, existimans Rex, præ eo
" quod animo conceperat; male ab illo tulit, quod eum rei tam
" modicæ ac tenuis petitione exceperit eo in loco. Respondit
" ille; se nolle aliud. Hoc igitur illi dari jussit. At ubi, qui Ra-
" tiocinîis præerant, illud computassent: Regi dixerunt; Non
" esse penes ipsos, quod ad illius Exiguum istud, prope accede-
" ret. Cui cum Rex haud adhiberet fidem; rem ipsi demon-
" strarunt. Adeo ut, Secundum hoc, majorem ipsi admiratio-
" nem incuteret, quam illud Prius.
" Refert *Al Kâdi Shemso'ddîn Ahmed Ebn Chalecân*: Hærebat
" mihi animo [scrupulus] de hæc summa, donec computi-
" sta quidem Alexandrinus, qui me convenerat, viam mihi o-
" stenderat qua manifestum mihi factum est quod dixerant;
" chartam mihi exhibens, qua veritas ipsius constaret. Nempe
" numeros duplicans usq; ad areolam decimam sextam, illic
" statuit granorum triginta duo millia, septingenta sexaginta
" & octo; summam hanc, inquit, statuamus mensuram *Kâdah*.
" Quod cum examinaverat, ita se habuit uti dixit. ——
" Deinde duplicando decimam septimam & sic deinceps ad vi-
" cesimam; in ea fuit mensura *Waibah*. Dein a *Waibis* transiit
" ad *Ardubbas*; quas duplicare non desiit [hoc est, continue

duplicavit

"duplicavit] donec in areola quadragesima pertingeret ad "centena & septuaginta quatuor millia, & septingenas & sexa- "ginta duas Ardubbas, cum duobus trientibus. Atq; hæc sum- "ma esto granarium. Deinde Granaria duplicans ad areolam "usq; quinquagesimam, prodiit summa, mille & viginti quatu- "or granariorum. Atq; hæc mensura, pro urbe habeatur. Dein, "illud duplicans, ad areolam usq; sexagesimam quartam, quæ "est omnium ultima, prodiit summa urbium, sexdecim mille "& tercentum octoginta quatuor. Scias autem non esse in u- "niverso mundo urbes hisce plures numero. Atq; hactenus ille.

"Dico ego; ultimam quod producitur duplicando abacum "Schaccorum, est octodecies mille mille, sexies; quadringen- "ta quadraginta sex mille, quinquies; septingenta quadraginta "quatuor mille, quater; septuaginta tria millia, ter; septingen- "ta novem mille, bis; quingenta quinquaginta unum mille; atq;

. . . . . .

"sexcenta & quindecim. 1 8 4 4 6 7 4 4 0 7 3 7 0 9 5 5 1 6 1 5.
6 5 4 3 2 1

"Atq; si collecta fuerint illa in unam pyramidem quadratam; "longitudo erit * sexaginta milliarium; latitudo, par; altitudo * potius Sex
"etiam, par. secundum milliare quod constat quatuor mille "cubitis vulgo usitatis: quorum quisq; est trium spithamarum "mediocrium. Cum etiam Ardubbæ Ægyptiacæ mensura sit "cubitus cubicus; pondus ipsius erit, Rotalarum ducentarum "& quatuor: quarum unaquæq; Rotal est centum quadraginta "quatuor drachmarum: Drachma autem est granorum tri- "tici sexaginta quatuor.

"Porro si numerum, in qualibet areola, quadraverimus; "quadrando producitur qui statuendus est in areola cujus nu- "merus duplus est numeri istius areolæ, uno minus. Exempli "gratia; ubi quadraverimus quod est in tertia, prodit quod "quintæ est: Cumq; quadraverimus quod prodiit in quinta, "producitur quod nonæ est: Et cum hoc quadraverimus, pro- "dit, quod est decimæ septimæ: Hoc item quadrato, prodibit "quod est tricesimæ tertiæ: atque hoc quadrato, prodit quod "est [loci] sexagesimi quinti: Unde si unitatem subtraxeri- "mus; reliquum, est summa istius quod est in areolis omnibus "usq; ad sexagesimam quartam. Quod si, ante subductam u- "nitatem, dimidiaverimus; erit semissis, id quod prodit in a-

"reola sexagesima quarta. Atq; hac praxi prodit duplicatio a-
"baci Scacchorum, quinque operationibus.

"Dicitur, ex quibus excellunt Indi, quibusq; reliquis homini-
"bus præiverunt, tria esse. viz. Librum *Golailah Wâdamnah*;
"ludum Scacchorum; atq; novem Figuras numerarias.

Cum autem in superioribus, laudatus sit *Ebn Chalecan*; gravis apud suos author, & magni nominis; lectori forsan non ingratum erit quæ apud ipsum, in vita *Alsuli*, habentur, recitare: quæ, latine reddita, sic sonant.

"Vidi multos qui assererent, *Alsuli* Scacchorum [sive *Le-
"trunculorum*] ludum inveniisse. Quod error est. Ejus enim Au-
"thor fuit *Sessa Ebn Daher* Indus; Regisque, cujus gratia illum
"invenit, nomen *Shehrâm*. Siquidem *Ardshir Ebn Babec*, primus
"Regum Persiæ posteriorum, ludum Calculorum invenerat,
"(*Nardshir* inde dictum, ab Authore sc. denominatum:) quo
"mundi, ejusq; incolarum, specimen exhibuit; dum Alveum in
"duodecim domos distinxit, mensium anni numero; calculos
"triginta, numero dierum cujuslibet mensis, statuens; talos au-
"tem, decreti Divini, & mutationum quibus mundi incolas
"agitat, loco posuit. In summa; longus esset his de rebus ser-
"mo, & a proposito nostro alienus. Gloriantibus ergo Persis,
"ludi calculorum inventione; in Regis Indorum gratiam, *Sessa*
"Scacchorum ludum composuit: Quem calculorum [*ludo*]
"longe antecellere censuerunt istius temporis sapientes, ob
"multa quæ enarrare longum esset. Ferunt autem, quod, ubi
"*Sessa* ludum istum, a se inventum, Regi *Shehramo* prædicto ex-
"posuisset, ille de hoc miratus, valideq; lætatus, jussit ut in
"Ratiocinatorum confessibus usurpetur, omniumq; quæ nosset
"præstantissimum judicavit; utpote qui bello instrumentum
"esset, religioni vitæq; communi stabilimentum, omnisq; com-
"menti fundamentum; atq; se gratum ostendit & lætitia affe-
"ctum, ob insigne quod sibi in regno suo hac ratione contigis-
"set beneficium. Jusitq; *Sessam*, ut, quicquid sibi libueret, pete-
"ret. Qui ergo, Opto, inquit, ut tritici granum primâ domo
"[areola] positum, continue duplicetur, donec ad ultimam
"perventum fuerit; illudq; quicquid fuerit, mihi concedas.
"Rex autem illud, ut parum quid, contemptu accepit; & male
"tulit, quod ille exiguum quid & tenue proposuisset, cum ipse
"magnum aliquod animo concepisset. Cui ille, Nolo, inquit,

aliud

'aliud quam hoc; atq; in ea petitione perseveravit; donec ipsius 'voto annuens [*Rex*] id ipsi dari jussit. Quod ubi computi- 'stis suis dictum esset; illi, facto computo, retulerunt, non esse 'penes ipsos frumentum, quod summam istam æquaret, vel ad 'eam prope accederet. Quod cum Regi nunciatum esset, ip- 'seq; dictis assensum haud præberet, computistas accersi jussit. 'Qui, ab illo interrogati, responderunt; si comportaretur to- 'tum quod in mundo esset frumentum, id summam istam 'haudquaquam æquaturū. Ipsoq; sibi rem demonstrari petente; 'cum confidentes computum fecissent, apparuit id fuisse ve- 'rum. Rex ergo dixit, Magis ego te miror, ob eam quam feci- 'optionem, quàm ob Scacchorum quem inveniſti ludum.

'Ratio autem duplicationis istius est, ut in domo prima, 'ponatur granum unum; in secunda, duo; in tertia, quatuor; 'in quarta, octo; atq; ita deinceps usq; ad ultimam; & quoti- 'escunque ad aliam domum transeatur, duplum ejus quod in 'priori positum fuerat statuatur.

'Eram autem animo solicitus de hac summa, donec com- 'putistam quendam Alexandriæ convenissem; qui duos mihi 'modos ostendit quibus dicti veritas pateret: chartamq; mihi 'exhibuit, qua illud delineatum fuit. Hac scil. ratione, ut, cum 'numeros duplicasset usq; ad domum decimam sextam, statue- 'ret ibi grana 32768: quam, inquit, summam, mensuram '*Kadah* statuas; quod mihi perpendenti ità se habere visum est. '——— Dein, *Al Kadah* domo decima septima duplicans, 'eo modo perrexit donec areola vicesima *Waibah* haberet. 'Dein *Waibas* duplicare pergens, ad *Ardobas* pervenit: Quas 'duplicare non desiit, donec domo quadragesima *Ardobas* ha- 'beret 174762 cum duabus tertiis. Tum dixit, Hanc sum- 'mam statuamus *Granarium*; neq; enim plus eâ continebit Gra- 'narium. Dein Granaria ista, usque ad domum quinquagesi- 'mam duplicata, erant 1024. Atq; hæc inquit, *Urbem* confi- 'ciant. Neq; enim urbs plura Granaria continebit; & quæ 'tandem Urbs tot in se continebit granaria? Dein, *Urbes* du- 'plicatæ usque ad domum sexagesimam quartam, quæ in 'Scacchorum Abaco ultima est, ad numerum 16384 pertige- 'runt. Sciasque, inquit, non esse in toto mundo plures quam 'hæ urbes: Siquidem Sphæræ terræ circuitus, prout ex Geome- 'tria constat, est Parasangarum 8000; adeo ut si quocunq; ter-

'ræ loco poneretur funis extremitas, quo totam terræ sphæ-
'ram cingeremus, donec alteram funis extremitatem ad eun-
'dem locum perduceremus, ita ut occurrerent utraq; extremi-
'tas, funis istius mensura esset longitudinis milliarium 24000,
'quæ Parasangas 8000, æquant. Atque hoc demonstrative
'verum est sine dubio. ——— Notum autem est, partem
'terræ habitabilem circiter quartam ejus sphæræ partem esse,
Atq; hęcsūt quę de hoc negotio habet *Ebn Chalecan*, loco citato.

Hæc autem fusius recitare operæ pretium duxi, Quoniam, præter elegans præsentis negotii exsemplum, idque admodum vetustum, & forte omnium primum; Habemus etiam originem tum ludi Calculorum (Alvei aleatorii,) tum Latrunculorum (Schacchii,) tum etiam Figurarum Numeralium. Nomina vero, quibus Latrunculorum ludus vulgo appellatur, *Cheſſe*, *Eſches*, &c. ab ipso authoris nomina *Seſſa*, videntur deducta. *Schacchii* vero nomen, a *Shah*, quod Regem significat. Unde & *Check* seu *Shach*; quo, inter ludendum, *Regi cavendum* indicamus: & *Shach mât*, (hoc est *Shah mât*, rex moritur,) quo, adverso Rege plane victo, victoriam profitemur.

Quod autem ad Calculum, in citatis Authoribus recensitum, attinet: est quidem ille per se satis clarus, ut multa explicatione non indigeat. Id interim observetur, quod ex calculo patet, poni nempe, quoad mensuram capacitatis,

32768 Grana tritici = Kadah.
16 Kadah = Waibah.
6 Waibah = Ardob.
174762 $\frac{2}{3}$ Ardob = Granario.
1024 Granaria = Urbi.
32767 Urbes = Summæ.

Item, quoad pondus,

Ardob = 204 Rotal.
Rotal = 144 Drachmis
Drachma = 64 Granis.

Denique, quoad mensuram longitudinis,

Parasanga = 3 Milliaribus.
Milliare = 4000 Cubitis.
Cubitus = 3 Spithamis.
Ardob = Cubito cubico.

Ut autem mensuræ istæ cum nostris Anglicanis melius com-

parentur

parentur: libet statutum de mensuris Anglicanis recensere, Anno 31° Ewardi primi sancitum, hoc est, Anno Domini 1302.

Consensu totius Regni Angliæ, mensura regia sic constituta est: ut **Denarius Anglicus, qui vocatur Sterlingus, rotundus sine abrasione, pendeat triginta duo Grana tritici bene exsiccata, & ex medio spicæ collecta: & viginti Denarii, constituant Unciam: & duodecim Unciæ, constituant Libram: & octo Libræ constituant* **Congium vini: & octo Congii vini, constituant* [a] *Modium Londinense: qui est octava pars Quarterii.*

* *Valet, in argento, fere tres denarios monetæ Anglicanæ hodiernæ.*
* A Gallon.
[a] A Bushel.

Juxta hanc itaque constitutionem, 32 Grana tritici pendent Denarium: 640 Grana, pendent Unciam: 7680 grana, pendent Libram, (adeoque constituunt mensuram Pintæ, $= \frac{1}{8}$ Congii:) 61440 grana, constituunt vini Congium: & 491520 grana, constituunt Modium.

Videtur itaque Modius noster, cui assignantur grana 491520, præter propter æqualis esse illorum Waibæ, cui nempe implendæ satis superque sufficiant grana loci vicesimi, hoc est, grana 524288. Item eorum Kadah (nempe $\frac{1}{10}$ Waibæ) cui implendæ satis superque sufficiant grana loci decimi sexti, hoc est, grana 32768; perinde fere videtur atq; Semicongius noster, cui nempe conveniunt grana 30720, quippe toti congio conveniunt grana 61440. Similiter eorum Ardob = 6 Waibis, continebit propterea 6 modios Anglicanos circiter.

Similiter; cum eorum Ardob pendere dicitur 204 Rotalas; adeoq; Waibah, Rotalas 34, hoc est, Drachmas 4896, sive Grana ponderis 313344. Patet vel eorum Grana ponderis, graviora fuisse tritici granis; vel saltem grana tritici quæ habentur loco vicesimo, nempe 524288, multo plura esse quam contineat Waibah, quæ autem loco decimo nono habentur, pauciora, nempe 262144.

Si autem ponantur illorum grana ponderis, nostris æqualia, illorum Rotala, (hoc est grana 9216) superabit libram nostram (eam nempe quam *Trojanam* vocant, granorum 7680) duabus unciis & semisse fere, adeoque prope accedit ad libram quam vocamus *Averdupois*, quæ æquatur unciis Trojanis $14\frac{1}{3}$, (nempe libræ Trojanæ, & duabus unciis cum semisse, & insuper duobus denariis; sive unciis 14 & denariis 12.) Si vero eorum grana majora sint; ut nempe eorum Waibah vel æquet

modium

Modium noſtrum; tum illorum fere duas libras, quas vocamus, Trojanas æquabit ſaltem 34 Rotalæ (pondus Waibæ) æquabit 60 libras Trojanas, nempe modii noſtri pondus. Accuratam vero menſurarum vel ponderum illorum cum noſtris comparationem hinc inſtituere minime valemus; propterea quod (ubi omnium fundamentum jacitur) grana loci decimi ſexti non ſtatuuntur menſuram Kadah præciſe implere, ſed ſaltem implere, & potius ſuperare quam deficere.

Si autem libeat etiã totam quæ emergit granorum molem, ad menſuram milliaris Anglicani redigere: illud haud magno labore fiet. Cum enim conſtat, ex ſuperius dictis, grana loci viceſimi, 524288, ſaltem æquare vel potius ſuperare modium Anglicanum: erit modiorum in tota mole numerus (ut diviſione patebit) 3518437208883 2 (ſaltem uno grano minus) nempe quantus eſt numerus granorum in loco 46.

Continet autem quilibet modius Congios octo, quilibet autem congius pollices cubicos 231, (de Vini Congio intelligo, nam Congius cerviſiæ continet pollices cubicos $272\frac{1}{64}$ nempe tot cubicos pollices; quot ſunt, in quadrata Pertica, Pedes quadrati; nam $16\frac{1}{2} \times 16\frac{1}{2} = 272\frac{1}{4}$) quod accurate ſe obſervaſſe teſtatur D. *Oughtredus* in libro quem *De Circulis Proportionum* inſcripſit, *Cap.* 9. Et propterea in Modio Anglicano continentur pollices cubici 1848; atque in ſex Modiis Anglicanis pollices 11088; cui cum præterpropter æqualis fuiſſe colligitur Ardoba Ægyptia, quæ illorum cubito cubico æquali ponitur, erit illorum cubitus cubicus pollicibus Anglicanis 11088 æqualis; adeoq; cubiti longitudo, erit pollicum Anglicanorum $22\frac{3}{7}$ circiter.

Milliare autem Anglicanum continet 8 ſtadia, quorum quodlibet continet 40 perticas, harumque quælibet pedes $16\frac{1}{2}$: adeoq; ſtadii longitudo, eſt pedum 660; milliaris autem, pedum 5280. Et propterea, milliare cubicum continebit pedes cubicos 147197952000; hoc eſt, pollices cubicos 254358061056000; (quippe pes continet 12 pollices, adeoq; pes cubicus pollices cubicos $1728 = 12 \times 12 \times 12$.)

Cum itaque, ut dictum eſt, modius contineat pollices cubicos 1848, diviſo per hunc numerum numero pollicum cubicorum, unius milliaris cubici, prodibit $137639643428\frac{4}{7}$ numerus modiorum in milliari cubico. Per quem itaq; numerum

ſi

si dividamus 351843720888 32 numerum modiorum in tota mole, prodibit 255 | 62673 numerus milliarium cubicorum. Cum autem Pyramis sit $\frac{1}{3}$ Parallelepipedi, (super eadem base, æque alti;) si triplicetur numerus milliarium in exposita pyramide, habebitur Parallelepipedum super eadem base æque altum, nempe 766 88019, cujus numeri latus cubicum est 9 | 15326. Adeoq; summæ triplum, superat corpus cubicum cujus latus 9 milliaria. Et propterea ipsa summa (nempe cubi triens) superabit Pyramidem cujus tum longitudo, tum latitudo, tum altitudo, est milliarium Anglicanorum 9.

Dum vero in commentario *Alsephadi*, dicitur æquare Pyramidem longam latam & altam milliaria 60; manifestum mendum videtur: vel enim meus me fallit calculus, vel reponendum est 6. Cum enim statuitur eorum Ardoba cubito cubico æqualis: Tot erunt in tota mole cubiti cubici, quot Ardobæ; nempe 5864062014805 $\frac{1}{3}$, (nimirum $\frac{1}{6}$ numeri modiorum, sive Waibarum; ponitur enim Ardoba æqualis sex Waibis.) Cum itaq; statuitur eorum milliare æquale cubitis 4000; adeoque milliare cubicum, cubitis cubicis 64000000000; Si per hunc numerum dividatur numerus cubitorum cubicorum, sive Ardobarum, in tota mole pyramidali, prodibit numerus milliarium cubicorum in pyramide 91 | 62596898 $\frac{1}{3}$; ejusque triplum 274 | 877906944 numerus milliarium in Cubo super eadem basi: cujus latus cubicum est 6 | 502 proxime. Adeoque Pyramis (quippe Cubi triens) cujus tum longitudo, tum latitudo, tum altitudo, sit istorum milliarium 6 $\frac{1}{2}$ proxime æquabit totam granorum summam Illorum itaque milliaria 6 $\frac{1}{2}$, videntur æquare circiter 9 ex nostris. Unumque ex eorum milliaribus, æquabit fere unum cum semisse ex nostris.

Atque hæc sunt quæ de Mensuris comparandis, hic loci, dicenda videbantur.

Quo quis autem, de incredibili hoc augmento, minus dubitet; placuit totius operationis processum, ad locum usq; sexagesimum quartum continue duplando apponere; termini autem ultimi duplum, unitate minutum, est omnium aggregatum: quod, si quis dubitet, continue addendo constare poterit.

1	1
2	2
4	3
8	4
16	5
32	6
64	7

128	8
256	9
512	10
1024	11
2048	12
4096	13
8192	14
16384	15
32768	16
65536	17
131072	18
262144	19
524288	20
1048576	21
2097152	22
4194304	23
8388608	24
16777216	25
33554432	26
67108864	27
134217728	28
268435456	29
536870912	30
1073741824	31
2147483648	32
4294967296	33
8589934592	34
17179869184	35
34359738368	36
68719476736	37
137438953472	38
274877906944	39
549755813888	40

10995116277776	41
21990232555552	42
43980465111104	43
87960930222208	44
175921860444416	45
351843720888832	46
703687441776664	47
1407374883553328	48
2814749767106656	49
5629499534213312	50
11258999068426624	51
22517998136852248	52
45035996273704496	53
90071992547409992	54
180143985094819984	55
360287970189639968	56
720575940379279936	57
1441151880758558872	58
2882303761517117744	59
5764607523034234488	60
11529215046068469976	61
23058430092136939952	62
46116860184273879904	63
92233720368547758808	64

18446744073709551615 Summa.

Nota autem, Indices in postremo hoc exemplo appositos verum locorum ordinem designare, nempe ab 1 inchoatos; non autem, distantiam a primo, quod faciunt Indices Exemplorum aliquot præcedentium, inchoati ab 0: quod quidem illic factum est ob eam quam tradidimus Regulam, de Termino ultimo, vel alio qui aliquanto a Primo distet, omissis intermediis, inveniendo.

Atq; hactenus de Progressione Geometrica hic dictum esto. Fusior autem hujusce rei tractatio habetur deinceps capite XXXIII. Unde & jam dictorum demonstrationes sunt petendæ.

CAP. XXXII.

De Logarithmorum Origine & Usu.

Logarithmorum Origo. EST autem ea, quam superiori capite tradidimus, Regula, (de terminis remotioribus intermediis, quasi per saltum, inveniendis,) maximi quidem momenti Regula: non tam ab eum, quem jam ostendimus, illius usum; quam ob insigniora quæ inde defluxerunt commoda. Ex hoc enim fundamento, dependet, Mirificum illud *Logarithmorum* inventum: Quod inchoavit quidem Nobilissimus *Johannes Nepperus*, *Merchistonii* apud Scotos Baro? perfecit autem & consummavit, Egregius ille Geometra *Henricus Briggius*, Præceptor olim meus meritissimus, Professorum Geometriæ *Savilianorum* primus; nec hujus tantum subsellii, sed & totius Academæ decus & ornamentum.

Totum, inquam, illud Logarithmorum negotium hoc fundamento nititur. Sunt enim *Logarithmi*, numeri Arithmetice proportionales, totidem Geometrice proportionalium, Indices. Horum autem Indicum, sive Logarithmorum, ope, per Additionem & Subductionem magna facilitate id perficitur, quod in veris Numeris non nisi per Multiplicationem & Divisionem faciendum erat. Item, per Bipartitionem, Tripartitionem, Quadripartitionem, &c. id perficitur, quod naturali methodo per Extractionem Radicis Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c. perficiendum est.

Statuerunt quippe illi, Logarithmorum Magistri, (communicatis consiliis,) numerorum Geometrice proportionalium 1, 10, 100, 1000, &c. Indices, sive Logarithmos, Arithmetice proportionales, 0, 1, 2, 3, &c. Ad numeros autem istis intermedios, his item intermedios Logarithmos, debita ratione interjectos, aptarunt. Indicibus nempe, sive Logarithmis, inte-

1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
&c.	&c.

gris

gris, partium decimalium adjectione ita auctis, ut singulorum interjectorum numerorum sedes postularent, singulis interjectis numeris suos Logarithmos, laborioso calculo, & indefessis vigiliis, investigarunt ad hanc fere formam.

Numeri	Logarithmi	Numeri	Logarithmi.
1	0.00000	500	2.69897
$2\frac{1}{2}$	0.39794	750	2.87506
5	0.69897	1000	3.00000
$7\frac{1}{2}$	0.87506	2500	3.39794
10	1.00000	5000	3.69897
25	1.39794	7500	3.87506
50	1.69897	10000	4.00000
75	1.89506	25000	4.39794
100	2.00000	50000	4.69897
250	2.39794	75000	4.87506
		100000	5.00000

Atque eadem methodo omnibus etiam hisce intermediis numeris, nempe ab 1 ad 100000, aptatos habemus Logarithmos jamjam investigatos, in D. *Briggii Arithmetica Logarithmica* conspiciendos; nempe ad usq; centena millia: qui etiam, non magno labore, (sumptis nempe proportionalibus intermediis) ad usq; centies millena millia, sine notabili errore, accommodari poterunt. Sed & ibidem Canones Sinuum, Tangentium, & Secantium, Logarithmice computatos habemus. Quorum omnium fusiorem traditionem qui postulat, tum ibidem quærat, tum in ejusdem *Trigonometria Britannica*; ab *Henrico Gellibrand*, (Astronomiæ in Collegio Gresshamensi apud Londinenses tum Professore) edita & aucta.

Logarithmorum autem usum quod attinet. *Duorum quorumvis, (aut etiam plurium,) Numerorum Logarithmi, simul additi, constituunt Logarithmum, qui numero ex assumptorum numerorum continua multiplicatione facto convenit.* Adeoque invento facti Logarithmo, habetur ipse numerus factus, ex Canone. Puta si numeri 25, Logarithmo 1,39794, adjiciatur numeri 100, Logarithmus 2; horum aggregatum 2 + 1,39749 =

Logarithmorum usus; in Multiplicatione.

Logar.	Num:
1,39794	25
+2.00000	× 100
3,39794	2500

3,39794, est Logarithmus numeri $25 \times 100 = 2500$. Pariter, si numeri 25, logarithmo 1,39794, adjiciatur numeri 75, logarithmus 1,87506; horum aggregatum 3,27300 est logarithmus cui in canone convenit numerus 1875. Eodem modo; in continue proportionalibus, 1, 2, 4, &c. cum ad inveniendum locum sexagesimum quartum, numerus 1, continue multiplicandus est in 2 sexagies & ter; si numeri 1 logarithmo 0, 00000, adjiciatur numeri 2, logarithmus 0, 30103, sexagies & ter, (hoc est, $63 \times 0,30103$) prodibit 18,96489; cui juxta Canonem Logarithmicū conveniet numerus 922330900000000000, circiter; vel saltem 922340000000000000; vel potius inter utrumq; : neq; enim in tam vastis numeris exspectandum est ut canon Logarithmicus majori ἀκριβείᾳ rem prodat.

Logar.	Num.
1,39794	25
×1.87506	×75
3,27300	1875

In Divisione. Similiter; *Si ex numeri Dividendi Logarithmo, auferatur Logarithmus Divisoris, prodibit Logarithmus Quotientis.* Si autem plures continue faciendæ sint divisiones; ex propositi numeri dividendi Logarithmo, auferendi sunt Logarithmi omnium continue dividentium. Puta, si ex numeri 100, logarithmo 2,00000, auferatur numeri 50 Logarithmus 1,69897; manebit 0,30103 Logarithmus Quotientis 2. Si ex numeri 50 Logarithmo 1,69897 auferatur 0, 69867 logarithmus numeri 5, manebit 1. Logarithmus numeri 10. Item si ex numeri 61875 logarithmo 4,79151 auferantur tum 1,39794 logarithmus numeri 25; tum 1, 87506 logarithmus numeri 75; (ex canone de promendi) manebit 1, 51851 logarithmus numeri 33, duabus divisionibus per 25 & 75 continue factis provenientis. Et similiter alibi.

Logar.	Num.
2,00000	100 (2
−1,69897	50
0,30103	
1,69897	50 (10
−0,69897	5
1,00000	
4,79151	
−1,39794	75) 61875 (33
−1,87506	
1,51851	

In Potestatum Geneſi. Atque hinc similiter sequitur; *Si numeri cujusvis Logarithmus dupletur*

dupletur, tripletur, quadrupletur, &c; proveniet Logarithmus Quadrati, Cubi, Biquadrati, &c. expositæ radicis. Puta numeri 5 logarithmus 0, 69897, triplatus, nempe 2,09691 = 3 × 0,69897 = 0, 69897 + 0, 69897 + 0, 69897, est logarithmus numeri 125 = 5 × 5 × 5.

Logar.	Num.
0, 69897	5
+ 0, 69897	× 5
+ 0, 69897	× 5
2, 09691	125

Et, vice versâ; *Si numeri cujusvis logarithmus fuerit bifariam, trifariam, quadrifariam, &c. divisus; prodibit logarithmus radicis quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, &c.* Puta 3) 2, 09691 (0, 69897, erit logarithmus numeri 5 = $\sqrt[3]{125}$. *In Ridicum extractione.*

Quoties autem occurrit numerus minor per majorem dividendus unde oritur numerus fractus, qui unitate minor est; prodibit Logarithmus Negativus sive ablatitius, quippe minor quam 0, 00000 logarithmus unitatis. Puta 3) 2 ($\frac{2}{3}$ numerus, logarithmum postulabit — 0, 17609. qui nempe provenit subducto logarithmo numeri 3, ex logarithmo numeri 2. *Fractionum Logarithmi.*

Logar.	Num.
0, 30103	2 ($\frac{2}{3}$
— 0. 47712	3
0, 17609	

Qui plura petit de Logarithmici Canonis sive Constructione sive usu, authores adeat supra laudatos, Nepperum, Briggium, Gellibrandum, aliosq; qui de hoc negotio ex professo scripserunt. Sufficiat nobis, operationum Logarithmicarum originem & fontem indicasse.

CAP. XXXIII.

Progressio Geometrica fusius traditur.

Sicut superius CAP. XXVII & XXVIII, Progressionis Arithmeticæ doctrinam fusius profecuti sumus, libet eadem Methodo & Progressionem Geometricam aggredi, sequentibus propositionibus explicandam. Quod quò rectius fiat, hæc sunto quibus sum usurus Symbola.

Terminus minimus, quem primum appello, sit A; maximus, V;

V; extremorum rectangulum VA = V × A; maximi ad minimum ratio $\frac{V}{A}$: Rectangulorum (ipsi VA æqualium) terminis reciproce sumptis comprehensorum aggregatum, Z; numerus terminorum, T; communis ratio, R; distantia termini cujusvis a dato, D; summa progressionis, S. Termini ipsi, a minimo inchoando, dicantur. *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, &c; a maximo vero inchoando, dicantur α, β, γ, δ, ε, &c. Numeros qui cujusq; termini a primo distantiam indicant, *Indices* appello; puta 0, 1, 2, 3, &c. His præmissis, sequuntur propositiones.

ν	R⁹) V	2	A	*a*	0
ι	R⁸) V	6	AR	*b*	1
δ	R⁷) V	18	AR²	*c*	2
η	R⁶) V	54	AR³	*d*	3
ζ	R⁵) V	162	AR⁴	*e*	4
ε	R⁴) V	486	AR⁵	*f*	5
δ	R³) V	1458	AR⁶	*g*	6
γ	R²) V	4374	AR⁷	*h*	7
β	R) V	13122	AR⁸	*i*	8
α	V	39366	AR⁹	*k*	9

1. Si fit $a = A$, erit $b = AR$, $c = AR^2$, $d = AR^3$, &c. Quilibet enim terminus in communem rationem ductus, producit terminum proxime sequentem. per def. Progressionis Geometricæ.

2. Quilibet ergo terminus producitur ex multiplicatione termini primi in Rationis communis potestatem Indici cognominem; vel (quod idem est) cognominem distantiæ ipsius a termino primo, ipsum primum non computando. Nempe AR^d. Sequitur ex præced.

3. Datis igitur Termino primo seu minimo, Ratione communi, & termini quæsiti distantia a primo; A, R, D; habetur terminus quæsitus, nempe AR^d. per præced. Puta terminus sextus *f*, cujus index sive distantia a primo 5, fit ex ductu primi in rationis communis potestatem 5^{am} distantiæ $D = 5$ cognominem. $f = AR^5$.

4. Si terminus maximus sive ultimus sit V, erit penultimus $\frac{V}{R}$ vel R) V; antepenultimus $\frac{V}{R^2}$ vel R^2) V; hinc proxime

me minor $R^3)V$; & sic deinceps; $V=\alpha$, $R)V=\beta$, $R^2)V=\gamma$, $R^3)V=\delta$. &c. Quilibet enim terminus per rationem communem divisus, dat terminum proxime minorem. per def. progr. Geom.

5. Quilibet igitur terminus æqualis est, termino maximo per rationis communis potestatem distantiæ ab ultimo cognominem divisо. Nempe $R^d)V$. per præced.

6. Dato ergo termino Maximo, cum Ratione communi, & Distantia termini quæsiti a maximo; V, R, D; habetur terminus quæsitus. Puta sextus a fine, sive ante ultimum quintus, $\zeta=R^2)V$. per præced.

7. Dato termino quovis, (ut f) cum ratione communi, & cujusvis assignati majoris distantia a dato; f, R, D; invenitur terminus assignatus (puta i.) nempe, multiplicando terminum datum in Rationis communis potestatem distantiæ cognominem. Hoc est $i=fR^d=fR^3$. Nam per def. vel prop. 1. pro singulis distantiæ gradibus, potestas rationis communis unitate augetur; ergo, pro omnibus gradibus, tot unitatibus quot sunt ipsi distantiæ gradus.

8. Dato termino quovis, cum Ratione communi, & cujusvis assignati minoris distantia a dato; (puta f, R, D;) invenitur assignatus. (ut c.) Nempe dividendo datum per Rationis potestatem distantiæ cognominem. Puta $R^d)f=c$, hoc est $R^3)f=c$. Vel $R^d)\zeta=i=R^2)\zeta$. Sequitur ex def. vel prop. 4.

9. Data igitur duorum quorumvis terminorum ab invicem distantiâ, cum Ratione communi; D, R; datur eorundem ad invicem ratio. (puta i ad f; vel ζ ad i.) nempe per 7 & 8; majoris ad minorem ratio est R^d, & hujus reciproca, est minoris ad majorem. Puta $\frac{i}{f}=R^d=fR$; & similiter $\frac{f}{c}=R^d=R^2$; vel $\frac{\zeta}{i}=R^d=R^2$;

10. Data vero terminorum quorumvis ad invicem Ratione, cũ eorundem ab invicem distantia; (puta i ad f, D) datur communis Ratio. R. Est enim (per præced.) datorum terminorum ratio ad invicem, R^d, rationis communis potestas distantiæ cognominis: extracta igitur analogâ radice, habetur communis ratio. Nempe $R=\sqrt[d]{R^d}$.

11. Item Data terminorum quorumvis ad invicem ratione; (R d per prop. 9.) cum ratione communi (R;) datur eorum ab invicem distantia. D. Quærendo nempe quota potestas Rd sit ipsius R.

12. Porro; Termini duo quilibet, cum duobus aliis ejusdem progressionis quibuslibet, in eadem ab invicem distantia positi, sunt & in eadem ad invicem ratione constituti. Cum enim (per prop. 9.) termini majoris ad minorem ratio sit Rd; si utrobique æqualis sit tum R, tum D; erit & utrobiq; æqualis Rd. puta (propter æqualem utrobiq; distantiam) $i.f::\zeta.\iota.$

13. Et contra; Si eadem sit utrobiq; eorundem majoris ad minorem ratio, eadem est & utrobique distantia. Nam si sit utrobiq; æqualis tum R, tum R d; erit & utrobique æqualis D. Puta si $i.f::\zeta.\iota.$ erit & utrobique æqualis distantia.

14. Ergo etiam: Si ex terminis quotvis continue proportionalibus, seligantur quotlibet in eadem continue ab invicem distantia; Puta, si $a.b.$

$c.d.e.f.g.h.i.k.\div$: $a.b.c.d.e.f.g.h.i.k.\div$

erunt item tum $a.c.e.$ $a.\ c.\ e.\ g.\ i.\ \div$

$g.i.\div$, tum $b.d.f.$ $b.\ d.\ f.\ h.\ k.\ \div$

$h.k.\div$, tum $a.d.g.$ $a.\ d.\ g.\ k.\ \div$

$k.\div$, tum $a.e.i.\div$ $a.\ e.\ i.\ \div$

continue proportionales. Nam æqualibus continue rationibus progrediuntur per prop. 12.

15. Et contra: si ex terminis ita continue proportionalibus selecti quotlibet sint item continue proportionales; æqualibus ab invicem distantiis sumpti sunt per prop. 13.

16. Data ratione communi, cum numero terminorum; R, T; invenitur extremorum ad invicem ratio. $\frac{V}{A}$. Est enim $T-1=D$, (extremorum distantia, unitate minor quam est numerus terminorum.) Ideoq; $\frac{V}{A}=Rd=R^{t-1}$.

17 Et, Data extremorum ratione, cum terminorum numero; $\frac{V}{A}$, T; habetur communis ratio, R. Est enim $T-1=D$; & $\frac{V}{A}=Rd$. Ergo (extracta radice analoga) $\sqrt[d]{\frac{V}{A}}=\sqrt[d]{Rd}=R$.

18 Et, Data extremorum ratione, cum ratione communi; $\frac{V}{A}$, R; habetur numerus terminorum. T. Cum enim $\frac{V}{A}=Rd$: quærendo quota potestas est $\frac{V}{A}$ vel Rd, ipsius R, habetur extremorum

tremorum distantia D; adeoque & $T = D + 1$.

19 Dato termino primo, cum ratione communi, & numero terminorum; A, R, T; habetur ultimus. V. Cum enim, per prop: 16. $\frac{V}{A} = R^d$. Erit $AR^d = A \times \frac{V}{A} = V$.

Nota interim, ob commodiorem notationem, tum hic tum postea, pro $T - 1$, poni D, vel *d*.

20 Dato termino ultimo, cum ratione communi, & numero terminorum; V, R, T; habetur primus A. Nam (propter $R^d = \frac{V}{A}$) erit R^d) $V = \frac{V}{A}$) $V = A$.

21 Continue proportionalium; si duorum quorumvis rectangulum per terminum primum dividatur, prodibit terminus cujus index (sive distantia a primo) æquatur illorum indicibus simul sumptis. Sit enim, verbi gratia, terminorem invicem multiplicatorum unius index *m*, alterius *n*: erunt ergo termini illi AR^m & AR^n; per prop. 2. horum ergo rectangulum $AR^m \times AR^n = A^2 R^{m+n}$, quod, per A divisum, exhibet AR^{m+n}, hoc est (per prop: 2.) terminum illum cujus index est $m + n$, indicum illorum aggregato æqualis.

$$\begin{array}{r} A)\ ARRR = AR^3 \\ \times ARR = AR^2 \\ \hline AARRRRR = A^2R^5 \\ \hline A \end{array} = AR^6$$

22 Eodem modo; Si termini tres, quatuor, quinque, aut plures, continue multiplicentur, productum tot vicibus unâ minus divisum per terminum primum (sive ea primi potestate divisum quæ uno gradu minor est quam numerus terminorum sic continue multiplicatorum,) exhibet terminum cujus index illorum indicum aggregato æquatur. Puta, si continue multiplicatorum indices sint *l*, *m*, *n*, termini erunt AR^l, AR^m, AR^n, qui invicem ducti facient $AAAR^{l+m+n}$; quodsi dividantur per AA, vel A^2, prodibit AR^{l+m+n}, terminus nempe cujus index $l + m + n$. per prop: 2.

23 Si itaque continue proportionalium primus terminus sit 1; (quod in tabulis *Logarithmicis* ponitur;) duobus, pluribusve, continue multiplicatis, proveniet terminus cujus index illorum indicum aggregato æquatur. Sequitur ex prop. 21, & 22, Quia nempe quæ illic imperatur divisio per terminum primum (sive semel sive sæpius facienda) hoc casu (cum pri-

mus terminus ponitur 1,) nihil immutabit. Nam $1 \times 1 \times 1 \times R = 1 \times 1 \times R = 1 \times R$.

24 Item; numerorum ab 1 continue proportionalium; erit quilibet terminus, ipsa potestas rationis communis, quæ termini illius indici est cognominis. per prop. 2. Nam si $A = 1$, erit $AR^d = 1R^d = R^d$.

Atq; hinc pendet Regula de Multiplicatione Logarithmica. Nempe, *Datorum numerorum Logarithmi simul additi, æquantur Logarithmo numeri ex datorum invicem multiplicatorum producti.* per pr. 23. Sunt enim Logarithmi, numerorum ab 1 continue proportionalium Indices.

25 Continue proportionalium; si duorum alter per alterum dividatur, & quotiens in terminum primum ducatur; prodibit terminus cujus index æquatur differentiæ indicum terminorum expositorum. Sit majoris index $m + n$, minoris m, adeoque eorum differentia n; erunt per pr. 2. ipsi termini AR^{m+n}, & AR^m; facta itaque divisione, $AR^m) AR^{m+n} (R^n$, si quotiens ducatur in A, habetur AR^n, terminus cujus index n per pr. 2.

26 Si itaque continue proportionalium primus terminus sit 1; quotiens cujusvis termini per quemvis alium divisi, est ipse terminus cujus index æquatur illorum indicum differentiæ. (Intelligo, excessui indicis divisi supra indicem dividentis; & propterea si hic major fuerit, quotientis index erit negativus.) Sequitur ex præced. quia si $A = 1$ erit $R^n = AR^n$.

27 Item; numerorum ab 1 continue proportionalium; si alter per alterum dividatur, erit quotiens, ipsa potestas rationis communis, differentiæ indicum datorum numerorum cognominis. nempe R^n. per præced.

Atque hinc pendet Regula Divisionis Logarithmicæ. Nempe *Si ex Logarithmo Dividendi auferatur Logarithmus Divisoris, quod reliquum est, est Logarithmus Quotientis.* Quippe Logarithmi sunt numerorum ab 1 continue proportionalium indices.

Aliæ propositiones de operationibus Logarithmicis; puta, de extractione Radicis Quadraticæ, per bipartitionem Logarithmi; & Cubicæ, per ejusdem tripartitionem, &c. aliæque consimiles; ex propositionibus jam traditis dependent. Nec opus erit illis fusius explicandis jam immorari, ne nimis digressi videamur. Sufficit digito fontem indicasse.

28

28 In quantitatum continue proportionalium quotcunque progressione; Quod fit ex ductu termini primi in ultimum, æquatur facto ex mutuo ductu duorum quorumvis terminorum ab extremis æqualiter utrinq; remotorum. Vel, Rectangulum sub extremis, æquatur rectangulo sub duobus quibuslibet intermediis ab extremis utrinq; æqualiter distantibus. (Intellige; quorum unus tot præcise gradibus ab uno extremo, quot reliquus a reliquo, distat.) Cum enim sit terminorum alter ARd, per pr. 2. alter Rd) V, per pr. 5. sitque distantia D utrobique eadem; erit rectangulum Rd) V × ARd = VA = ⅄A = *aα* = *bβ* = *cγ* = *dδ* &c. Atque hæc sunt illa rectangula quorum omnium aggregatum Symbolo Z designatum volumus; Et quæ simpliciter *Rectangulorum aggregatum* deinceps appellabimus.

29 Sin terminus omnium medius ab utroq; extremo æqualiter distet, (quod tum continget quum terminorum numerus est impar;) Quadratum medii æquatur extremorum rectangulo. Nam propter Rd) V = M = ARd, (& distantiam D utrobiq; æqualem,) erit Rd) V × ARd = M × M = Mq.

30 Similiter, In quatuor terminis utut discontinuè proportionalibus, Rectangulum extremorum æquatur rectangulo mediorum. Puta A . M : : N . V. Cum enim (propter æqualem utrobique rationem) sit AR = M, & NR = V, adeoque R) V = N; erit N × M = R) V × AR = VA. Atque hinc sequitur Regula quæ dicitur *Aurea*, sive *Regula Trium*. Nempe

31 Quatuor ergo proportionalium, datis tribus quibuslibet, datur & reliquus. Cum enim sit, per præced. A × V = M × N, erit (æqualiter utrinque dividendo) $V = \frac{MN}{A} \cdot A = \frac{MN}{V}$ •

Datis.	Datur.
A) M × N	(V
V) M × N	(A
M) A × V	(N
N) A × V	(M

$M = \frac{AV}{N} \cdot N = \frac{AV}{M}$ •. Estq; hæc Regula Infiniti pene usûs per totam Matheſin, ideoque merito *Aurea* dicta.

32 Ex tribus autem continue proportionalibus, Rectangulum extremorum æquatur quadrato medii. Puta A . M. V. ∴. Nam, propter æqualem utrobique rationem, est AR = M, &

$MR = V$; ergo $R) V = M$. Ideoque $R) V \times AR = M \times M = Mq$.

33 Trium ergo continue proportionalium, datis duobus quibusvis, datur & reliquus. Cum enim, per præced. $AV = Mq$. Erit $A) Mq (V$, & $V) Mq (A$, & $\sqrt{AV} = \sqrt{Mq} = M$.

Datis	Datur.
$A) Mq (V$	
$V) Mq (A$	
$\sqrt{AV} = M$	

34 Atque idem valet de tribus quatuorve terminis progressionis continuæ, utut non immediate proximis, modo æqualibus intervallis distantibus. Puta si $a.b.c.d.e.f.g. \div$ erit $ae = c^2$; nam & $a.c.e \div$ per 14. Item $af = cd$; & $de = bg$; & sic alibi. Nam $a.c :: d.f.$ vel $a.d :: c.f.$ & $b.d :: e.g.$ vel $b.e :: d.g.$ &c. per 12.

35 Sed & præcedentium aliquot conversæ pariter demonstrantur. Puta conversa prop. 28. In continue proportionalibus, (excepta tantum æqualium progressione, ut 1. 1. 1. 1. &c. $\div$, quæ & deinceps aliquoties excepta intelligatur;) si duorum terminorum intermediorum rectangulum rectangulo extremorum æquetur; sunt illi ab extremis æqualiter utrinque remoti. (hoc est, quot gradibus eorum alteruter ab alterutro extremorum distat, tot & reliquus a reliquo.) Puta, si sint $a.b.c.d.e.f.g. \div$, fitque $ce = ag$; totidem gradibus distant a, c, atque e, g; item a, e, atq; c, g. Cum enim duorum c, e, alter sit a Rd, alter Rd) g; adeoque Rd) $g \times a$ Rd $= (ce =) ag$; æqualis erit utrobique Rd (ut divisio & multiplicatio se mutuo destruant) adeoque & distantia D utrobique æqualis. per pr. 13.

36. Et conversa Prop. 29. Si continue proportionalium, intermedii alicujus quadratum æquetur rectangulo extremorum; æqualiter ille ab utroque extremo distat. Probatur ut præcedens.

37. Item conversa Prop. 32. Si unius termini quadratum æquetur duorum rectangulo, erit ille medius inter hos Geometricus. Si enim $AV = Mq = MM$, Erit (æqualiter utrinque dividendo) $A = \frac{MM}{V}$ & $\frac{A}{M} = \frac{M}{V}$. Ergo A. M. V $\div$

38. Similiter & conversa Prop. 30. Si ex terminis quatuor, duorum rectangulum rectangulo reliquorum æquetur;

tur; sunt illi quatuor proportionales. Puta, Si AV = MN, erit (æqualiter utrinque dividendo) $A = \frac{MN}{V}$, & $\frac{A}{M} = \frac{N}{V}$ vel etiam $\frac{A}{N} = \frac{M}{V}$; hoc est A. M :: N. V. & A. N :: M. V

Item, quia, ut prius, AV = MN, erit $\frac{MN}{A} = V$, & $\frac{M}{A} = \frac{V}{N}$, vel etiam $\frac{N}{A} = \frac{V}{M}$: hoc est M. A :: V. N. & N. A :: V. M. Nam singulis his modis proportio concluditur.

39. Hinc sequitur; Si quatuor termini sint proportionales, sunt & inverse (ἀνάπαλιν) proportionales. Puta si A. M :: N. V. Erit (per pr. 30.) AV = MN; ideoque, (ut ostensum est, Prop. præced.) M. A :: V. N.

40. Item; si quatuor termini sint proportionales, sunt & alterne (permutatim, vicissim. ἐναλλάξ,) proportionales. Puta si A. M :: N. V. adeoq; AV = MN, erit A. N :: M. V. est ostensum pr. 38. Item, N. A :: M. V. ut ibid. Et Pr. 39.

41. Porro, si quatuor proportionalium vel primus & tertius, vel secundus & quartus, æqualiter vel multiplicentur vel dividantur, manent adhuc proportionales. Puta si A. M :: N. V, hoc est A. AR :: N. NR; (ubi communis ratio est R;) erit & A. MB :: N. VB, hoc est A. AR B :: N. NR B. (ubi communis ratio est RB) Item, A. B) M :: N. B) V. hoc est A. B) R A :: N. B) R N. ubi communis ratio est B) R. Similiter si A. M :: N. V. hoc est R) M. M :: R) V. V. erit B) A. M :: B) N. V. hoc est BR) M. M :: BR, V. V &c. Vel sic. Si

$\frac{A}{M} = \frac{N}{V}$ tum $\frac{A}{M}$ B = $\frac{N}{V}$ B. & B) $\frac{A}{M}$ = B) $\frac{N}{V}$.

Sive (quod tantundem est) $\frac{AB}{M} = \frac{NB}{V}$, & $\frac{A}{BM} = \frac{N}{BV}$.

Vel etiam C) $\frac{AB}{M}$ = C) $\frac{N}{V}$ B, sive $\frac{AB}{CM} = \frac{NB}{CV}$, sive AB. CM :: NB. CV. &c.

42. Item, si proportionales fuerint tum A. M :: N. V. tum $\alpha . \mu :: \nu . \upsilon$ tum $a . m :: n . u$. (tum, si placet, quaterni plures quotlibet ;) erunt item tum facti, tum dividendo orti, (terminis respective sumptis) termini proportionales. Esto enim in primis ratio R, in secundis ϱ, in tertiis r. Adeoque $A . M = AR :: N . V = NR$, Item $\alpha . \mu = \alpha\varrho :: \nu . \upsilon = \nu\varrho$. Et $a . m = ar :: n . u = nr$. Ergo (per Prop. 41.) $A\alpha a . M\mu m = AR\alpha\varrho ar :: N\nu n . V\upsilon u = NR\nu\varrho nr$. hoc est $A\alpha a . A\alpha aR\varrho r :: N\nu n . N\nu nR\varrho r$. ubi communis ratio est $R\varrho r$. Pariter & $\frac{A\alpha}{a} . \frac{M\mu}{m} = \frac{A\alpha R\varrho}{ar} :: \frac{N\nu}{n} . \frac{V\upsilon}{u} = \frac{N\nu R\varrho}{nr}$. sive $a) A\alpha . ar) A\alpha R\varrho :: a) N\nu . nr) N\nu R\varrho$, ubi communis utrobique ratio est $\frac{R\varrho}{r}$ vel $r) R\varrho$. Vel sic

A.	M = AR ::	N.	V = NR.
α.	$\mu = \alpha\varrho ::$	ν.	$\upsilon = \nu\varrho$.
a.	$m = ar ::$	n.	$u = nr$.
$A\alpha a$.	$M\mu m = A\alpha aR\varrho r ::$	$N\nu n$.	$V\upsilon u = N\nu nR\varrho r$.

$\frac{A\alpha}{a} . \frac{M\mu}{m} = \frac{A\alpha R\varrho}{ar} :: \frac{N\nu}{n} . \frac{V\upsilon}{u} = \frac{N\nu R\varrho}{nr}$.

43. Sed & idem obtinet in continue proportionalibus. Quod similiter probandum erit. Puta,

Si $A . B . C . D . E \div$ vel $A . AR . AR^2 : AR^3 . AR^4 \div$
Et $\alpha . \beta . \gamma . \delta . \varepsilon \div$ vel $\alpha . \alpha\varrho . \alpha\varrho^2 . \alpha\varrho^3 . \alpha\varrho^4 \div$
Erunt $A\alpha . B\beta . C\gamma . D\delta . E\varepsilon \div$ vel $A\alpha . A\alpha R\varrho . A\alpha R^2\varrho^2 . A\alpha R^3\varrho^3 . A\alpha R^4\varrho^4 \div$
Et $\frac{A}{\alpha} . \frac{B}{\beta} . \frac{C}{\gamma} . \frac{D}{\delta} . \frac{E}{\varepsilon} \div$ vel $\frac{A}{\alpha} . \frac{AR}{\alpha\varrho} . \frac{AR^2}{\alpha\varrho^2} . \frac{AR^3}{\alpha\varrho^3} . \frac{AR^4}{\alpha\varrho^4} \div$

44. Et quidem, licet altera progressio crescens fuerit altera decrescens. Ut si tum $A . AR . AR^2 . AR^3 . AR^4 . \div$ tum $\alpha . \varrho) \alpha . \varrho^2) \alpha . \varrho^3) \alpha . \varrho^4) \alpha . \div$ erit etiam $A\alpha . \varrho) \alpha AR . \varrho^2)$

$\varrho^3) \alpha A R^4 . \varrho^3) \alpha A R^3 . \varrho^4) \alpha A R^4 .$ ∴ ut patet, quippe communis ratio est ϱ) R.

Atque hujusmodi complures proportionalium immutationes & comparationes facile esset tum comminisci tum demonstrare. Verum illud haud est necesse, sed cujuslibet potius arbitrio permittendum, ut id, prout opus fuerit, pro re nata curet, suisque usibus accommodet. Quæ autem huc spectant non pauca deinceps, ubi Euclidis Elementum quintum explicaturus sum, tradentur.

45. In continue proportionalibus extremorum Rectangulum ductum in numerum terminorum, æquatur aggregato Rectangulorum omniũ æqualiũ (sensu quo pr. 28) cũ enim per pr. 28 sit $VA = a\alpha = b\beta = c\gamma = d\delta = e\varepsilon$ &c. sintq; hæc totidem quot termini; (nam singuli termini ordine directo sumpti in respectivos terminos ordinis retrogradi duci supponuntur; adeoque tot erunt rectangula quot termini;) erit $T VA = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon$ &c.

Notandum autem est rectangulum $a\alpha$, & kx, (si nempe k ponatur terminus ultimus) & in reliquis similiter, revera idem esse rectangulum (nam a & x, item α & k, sunt idem terminus,) sed cum id non statim appareat, atque aliis item de causis, commodius putavimus tanquam si essent distincta bis numerare; adeoque tot reputare rectangula quot sunt termini:) cum tamen si $a\alpha$ & kx (& similiter de reliquis) pro eodem habeamus rectangulo, erit numerus rectangulorum diversorum $\frac{1}{2}$ T, ubi termini sunt numero pares; at $\frac{1}{2}$ T + $\frac{1}{2}$, ubi numero impares; nam hoc casu, ne nostro quidem computo quadratum medii bis ponitur. Quod monuisse sufficiat. Nos itaque priorem loquendi formulam potius selegimus: quo sensu & deinceps loqui intelligamur.

46. Idem valet in quatuor discontinue proportionalibus. Puta A. M :: N. V. Nam A V + M N + NM + VA = 4 VA. Per P. 30.

47. Dato itaque in continue proportionalibus quotlibet, extremorum rectangulo, & numero terminorum VA, T; datur Rectangulorum aggregatum. Z. Nempe Z = T VA. per Prop. 45.

48. Item dato extremorum rectangulo, & rectangulorum Aggregato; VA, Z; datur numerus terminorum. T. Nam, quia Z = T VA, erit VA) Z = T.

49. Et Dato numero terminorum, cum rectangulorum aggregato; T, Z; datur rectangulum extremorum. VA. Cum enim sit Z = T VA. erit T) Z = VA.

50. Datis numero terminorum, rectangulorum aggregato, & termino minimo; T, Z, A; datur maximus. V. Nam per præced. T) Z = VA. Ergo AT) Z = V.

51. Datis iisdem; datur extremorum ad invicem ratio. $\frac{V}{A}$. Nam per præced. AT) Z = V. Ergo A^2 T) Z = $\frac{V}{A}$.

52. Datis numero terminorum, rectangulorum aggregato, & termino maximo; T, Z V; datur minimus. A. Nam per Prop. 49. T) Z = VA. Ergo VT) Z = A.

53. Datis iisdem; datur extremorum ratio. $\frac{V}{A}$. Nam, per præced. VT) Z = A. Ergo $\frac{V}{A} = \frac{V}{VT)Z} = \frac{V^2T}{Z}$. Veletiam Z) V^2 T ($\frac{V}{A}$. vel V^2 T. Z: : V. A.

54. Datis extremorum tum ratione, tum rectangulo $\frac{V}{A}$, VA; datur terminus minimus A. Nam $\frac{V}{A}$) VA (A². Cujus radix, A.

55. Datis iisdem; datur terminus maximus. V. Nam VA * $\frac{V}{A}$ = V^2. Ergo √ : VA × $\frac{V}{A}$: = V.

56. Datis extremis (vel eorundem ratione, & rectangulo) cum communi ratione; $\frac{V}{A}$, VA, R; habetur rectangulorum aggregatum. Z. Nam per Prop. 18. habetur T. ergo et (per Prop. 47.) Z = T VA.

57. Datis extremis (vel eorundem ratione & rectangulo,) cum rectangulorum aggregato; $\frac{V}{A}$, VA, Z; habetur communis ratio. R. Nam per prop. 48. habetur T; ergo & R. per Prop. 17.

58. Datis termino minimo, numero terminorum, & ratione communi; A, T, R; datur rectangulorum aggregatum. Z. Nam per Pr. 19. V = A R^d. Ergo per Pr. 47. TV A = Z = T A^2 R^d. (per *d* intellige T − 1.0)

59. Datis termino minimo, numero terminorum, & rectangulorum aggregato; A, T, Z; datur ratio communis.

R

R. Nam per Prop. 51. habetur $\frac{V}{A} = \frac{Z}{A^2 T}$. Ergo per Pr. 17. $R = \sqrt[d]{\frac{Z}{A^2 T}}$.

60 Datis termino maximo, numero terminorum, & communi ratione; V, T, R; datur rectangulorum aggregatum. Z. Nam per Prop. 20. $A = Rd) V$. Ergo per Prop. 47. $TVA = Z = Rd) TV^2$.

61. Datis termino maximo, numero terminorum, & rectangulorum aggregato; V, T, Z; datur communis ratio. R. Nam, per Prop. 53. $\frac{V}{A} = Z) V^2 T$. Ergo per Prop. 17. $R = \sqrt[d]{\frac{V^2 T}{Z}}$

62 Datis numero terminorum, ratione communi, & Rectangulorum aggregato; T, R, Z; datur terminus minimus. A. Nam per pr. 16. $\frac{V}{A} = Rd$. Et per pr. 49. $T) Z = VA$. Ergo per pr. 54. $TRd) Z = \frac{V}{A}) VA = A^2$. Ideoque $A = \sqrt{\frac{Z}{TRd}}$.

63 Datis iisdem; datur terminus maximus. V. Nam per 16 & 49 habentur $\frac{V}{A}$ & VA, ut prius. Ergo per 55. $V = \sqrt{:VA \times \frac{V}{A}:} = \sqrt{\frac{ZRd}{T}}$.

64 Datis termino minimo, ratione communi, & rectangulorum aggregato; A, R, Z; invenitur terminorum numerus T. Nam per pr. 45. $Z = TVA$. adeoque $A) Z = TV$. Item per pr. 19. $V = ARd$. adeoq; (cum sit $D + 1 = T$) erit $RV = ARRd = AR^t$. Et $RVT = TAR^t = A) ZR$. (quia nempe $A) Z = TV$.) Ideoque $TR^t = A^2) ZR$. Quærendum igitur, quota potestas datæ rationis communis R, ducta in suum indicem sive exponentem potestatis, æquabitur quantitati datæ $A^2) ZR$. quippe potestatis istius index sive exponens est T, numerus terminorum.

65 Iisdem datis; reperitur terminus maximus. V. nam per præced. habetur T. adeoque V per pr. 19.

66 Datis termino maximo, ratione communi, & rectangulorum aggregato; V, R, Z; invenitur numerus terminorum, T. Est enim per pr. 45. $Z = TVA$. adeoque $V) Z = TA$. Item per pr. 20. $A = Rd) V$, adeoque $R) A = R^t) V$. Et $R) AT = R^t)$

$R^t) VT \coloneqq RV) Z$. Et $R^t) T \coloneqq RV^s) Z$. Quærendum igitur quota potestas datæ rationis communis R, suam denominationem dividens, exhibebit quantitatem datam $RV^s) Z$. quippe potestatis istius exponens sive index est T, numerus terminorum quæsitus. Vel etiam (nam eodem recidit) mutatis sedibus, $T) R^t \coloneqq Z) RV^s$. Ut quærendum sit, quota potestas datæ rationis communis, per suum indicem sive exponentem divisa, exhibebit quantitatem cognitam $Z) RV^s$. quippe potestatis istius exponens est T, quæsitus numerus terminorum.

67 Datis iisdem, reperitur terminus minimus, A. nam per præced. habetur T. adeoq; A, per pr. 20.

Atque hæ quidem propositiones omnes hactenus traditæ, respondent totidem propositionibus Cap. XXVII. de Progressione Arithmetica; singuli singulis eodem ordine.

Sequitur Theorema, quo, in Geometricæ progressionis summa investigandâ, utuntur fere omnes Arithmetici. Nempe

68 Si terminus maximus in communem rationem ducatur, & ex producto auferatur terminus minimus, residuumque per rationem communem unitate minutam dividatur; quotiens exhibet progressionis totius summã. Hoc est, $\frac{VR - A}{R - 1} \coloneqq S$.

Quis hanc primus invenerit regulam, aut quibus mediis, ego plane ignoro; & quidem, utut ea pleriq; utantur, non memini tamen me illam uspiam demonstratam vidisse; cum tamen vel maxime demonstratione indigeat. Nobis itaque hanc libuit demonstrati comminisci.

Cum sit, per pr. 19. $V \coloneqq AR^d$, adeoque (propter $T = D+1$) $VR = AR^t$, & propterea $\frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^t - A}{R - 1}$. Facta divisione quantitatis $AR^t - A$, per quantitatem $R - 1$, (eo modo quo supra ostendimus dum divisionem Symbolicam docuimus,) quotientis loco prodibit series exposita $A + AR + AR^2$ &c. hoc est, quantitas S, sive terminorum omnium summa.

Exempli gratia. Ponamus numerum terminorum $T = 4$. adeoque $AR^t = AR^4$. Et dividenda proponatur $AR^4 - A$, per $R - 1$. Cum igitur sit $R) AR^4 (AR^3$; Erit quotientis membrum primum AR^3, quod in divisorem ductum dat $AR^4 - AR^3$. hoc ex dividendo subductum relinquit $AR^3 - A$.

Deinde

Deinde, cum sit $R)AR^3(AR^2$: erit quotientis membrum secundũ $+AR^2$ quod ductum in divisorẽ dat $AR^3 - AR^2$. hoc ex dividendo subductum relinquit $AR^2 - A$. Eodem modo, quotientis membrum tertium erit $+AR$. adeoque

$$\begin{array}{r|l}
R-1 & AR^4-A(AR^3+AR^2+AR+A \\
 & \underline{AR^4-AR^3} \\
 & AR^3-A \\
 & \underline{AR^3-AR^2} \\
 & AR^2-A \\
 & \underline{AR^2-AR} \\
 & AR-A \\
 & \underline{AR-A} \\
 & 00\quad 0
\end{array}$$

facta tum multiplicatione tum subductione, manebit $AR-A$. Denique quotientis membrum quartum, eodem modo repertum, est $+A$. Et peracta tum multiplicatione tum subductione ut prius, nihil restabit. Totaque operatione sic peracta, habetur quotiens $\frac{AR^4-A}{R-1} = AR^3+AR^2+AR+A = S$. Et similiter continget quantuscunque ponatur numerus terminorum; nempe quotiens singulos exhibebit. Adeoq; universaliter $\frac{VR-A}{R-1} = \frac{AR^t-A}{R-1} = A+AR+AR^2$ &c. $= S$. quod erat demonstrandum.

Id ipsum pariter ostendetur, si juxta prop. 20. exponamus $=A=Rd)V$. adeoq; $\frac{VR-A}{R-1} = \frac{VR-Rd)V}{R-1} = \frac{VR^t-V}{R^t-Rd}$

$V+\frac{V}{R}+\frac{V}{R^2}+\frac{V}{R^3}$ &c $=S$.

$$\begin{array}{r|l}
R^4-R^3 & VR^4-V(V+\frac{V}{R}+\frac{V}{R^2}+\frac{V}{R^3} \\
 & \underline{VR^4-VR^3} \\
 & VR^3-V \\
 & \underline{VR^3-VR^2} \\
 & VR^2-V \\
 & \underline{VR^2-VR} \\
 & VR-V \\
 & \underline{VR-V} \\
 & 00\quad 0
\end{array}$$

ut ex adjuncta divisionis operatione manifestum est.

Libet autem aliam methodum, summam

progressionis Geometricæ colligendi, ex D. Oughtredo adjungere, postquam hoc lemma ostendero. Nempe

69 Si sint quotlibet termini proportionales; erit ut unus antecedentium ad suum consequentem, sic antecedentium omnium aggregatum, ad aggregatum omnium consequentium. (quæ est 12 e 5.) Puta si $A.\alpha::B.\beta::C.\gamma::D.\delta$. &c. hoc est $A.RA::B.RB::C.RC::D.RD$. &c. Erit $A.\alpha::A+B+C+D$ &c. $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ &c. hoc est $A.RA::A+B+C+D$ &c. $RA+RB+RC+RD$ &c. propter communem utrobiq; rationem communem R.

70 Ideoque; In continue proportionalibus, ut terminus primus, ad secundum, (hoc est, ut 1 ad rationem communem R;) sic summa terminorum omnium præter ultimum, ad summam omnium præter primam. Puta si $A.B.C.D.V$ ∴ hoc est $A.B::B.C::C.D::D.V$. Erunt $A+B+C+D = S-V$, omnes antecedentes; & $B+C+D+V = S-A$, omnes consequentes. Ergo per præced. $A.B(::1.R)::S-V.S-A$.

71. Et consequenter; Si ex rectangulo secundi & ultimi, auferatur quadratum primi; residuumque dividatur per terminum secundum dempto primo; prodibit summa terminorum omnium. Cum enim per præced. sit $A.B::S-V.S-A$. adeoque per pr. 30. $SB-VB = SA-Aq$, & transponendo, $SB-SA = VB-Aq$. Erit (utrinque dividendo)

$$S = \frac{VB-Aq}{B-A}.$$

Sed & ex eodem lemmate demonstratur Prop. 68. cum enim sit per Prop. 70. $S-V.S-A::(A.B::A.AR::)1.R$. adeoque per prop. 30. $SR-VR = S-A$. Et transponendo. $SR-S = VR-A$: erit (utrinque dividendo)

$$S = \frac{VR-A}{R-1}.$$

Vel sic, per præsentem, $S = \frac{VB-Aq}{B-A} = \frac{VAR-Aq}{AR-A} = \frac{VR-A}{R-1}$.

7°

72. Datis igitur extremis & ratione communi; A, V, R, habetur terminorum omnium summa S. Nempe $S = \frac{VR - A}{R - 1}$. per Prop. 68. vel 71.

73. Idem habetur, si, pro extremis A, V, darentur A, √A. Nempe $S = \frac{A) \sqrt{A} R - A}{R - 1}$. Nam $A) \sqrt{A} = V$.

74. Vel A, $\frac{V}{A}$: Nempe $S = \frac{\frac{V}{A} A R - A}{R - 1}$. Nam $\frac{V}{A} A = V$.

75. Vel V, √A. Nempe $S = \frac{VR - V) \sqrt{A}}{R - 1}$. Nam $V) \sqrt{A} = A$.

76. Vel V, $\frac{V}{A}$. Nempe $S = \frac{VR - \frac{V}{A}) V}{R - 1}$. Nam $\frac{V}{A}) V = A$.

77. Vel denique √A, $\frac{V}{A}$. Nempe $S = \frac{R \sqrt{\frac{V}{A}} \sqrt{A} - \sqrt{} : \frac{V}{A}) \sqrt{A}}{R - 1}$. Nam $\frac{V}{A} \sqrt{A} = V^2$. Et $\frac{V}{A}) \sqrt{A} = A^2$.

78. Et, datis extremis, cum terminorum omnium summa; A, V, S; habetur communis ratio. R. Nam per Prop. 68, vel 72. $S = \frac{VR - A}{R - 1}$, hoc est, $SR - S = VR - A$; adeoque $SR - VR = S - A$, & $\frac{S - A}{S - V} = R$. Vel brevius; per Prop 70. $\frac{S - A}{S - V} = \frac{B}{A} = \frac{R}{1} = R$.

79. Idem habetur, si, pro A, V, darentur A, √A Nempe $R = \frac{S - A}{S - A) \sqrt{A}}$.

80. Vel, A, $\frac{V}{A}$. Nempe $R = \frac{S - A}{S - \frac{V}{A} A}$.

81. Vel V, √A. Nempe $R = \frac{S - V) \sqrt{A}}{S - V}$.

82. Vel, V, $\frac{V}{A}$. Nempe $R = \frac{S - \frac{V}{A}) V}{S - V}$

83. Vel denique, √A, $\frac{V}{A}$. Nempe $R = \frac{S - \sqrt{} : \frac{V}{A}) \sqrt{A}}{S - \sqrt{\frac{V}{A}} \sqrt{A}}$.

84

84. Item, datis termino minimo, ratione communi, & terminorum omnium summa; A, R, S; datur maximus. V. Nam (ut in Prop. 78.) $SR - S = VR - A$. Ergo $SR - S + A = VR$, & $\frac{SR - S + A}{R} = V$.

85. Et, datis termino maximo, ratione communi, & terminorum omniũ summa; V, R, S; datur minimus. A. Cum enim (ut in præced.) $SR - S + A = VR$; erit (transponendo) $VR - SR + S = A$.

86. Item, datis termino minimo, ratione communi, & terminorum numero; A, R, T; datur terminorum omnium summa S. Nam, per Pr. 19. $V = ARd$, & $VR = ARt$; Ergo per Prop. 68. $S = \frac{VR - A}{R - 1} = \frac{ARt - A}{R - 1}$.

87. Et, datis termino minimo, ratione communi, & progressionis summa; A, R, S; datur numerus terminorum. T. Est enim (ut in Prop. 84.) $SR - S + A = VR = ARt$ (per P. 19.) Adeoque $\frac{SR - S + A}{A} = Rt$. Quærendum igitur quota potestas rationis communis R, æquatur quantitati cognitæ $\frac{SR - S + A}{A}$.

88 Et, Datis termino minimo, progressionis summa, & numero terminorum; A, S, T; datur communis ratio. R. Nam (ut in præced.) $SR - S + A = ARt$. adeoque $SR - ARt = S - A$. Et $\frac{S - A}{A} = \frac{S}{A} R - Rt$. Cujus æquationis radix est R, communis ratio quæsita.

89 Et datis Ratione communi, numero terminorum, & summa progressionis; R, T, S; datur terminus minimus. A. Cum enim (ut in præced.) $SR - S + A = ARt$. adeoq; $SR - S = ARt - A$. Erit $A = \frac{SR - S}{Rt - 1} = \frac{R - 1}{Rt - 1} S$.

90 Pari modo; Dato termino maximo, cum ratione cõmuni, & numero terminorum; V, R, T; datur summa progressionis. S. Nam per pr. 20. $A = Rd)V$. Ergo per pr. 68. $S = \frac{VR - A}{R - 1} = \frac{VR - Rd)V}{R - 1} = \frac{VRt - V}{Rt - Rd}$.

91 Et; Dato termino maximo, cum ratione communi, & progressionis summa; V, R, S; datur numerus terminorum T. Nam per pr. 85. $A = VR + S - SR$; adeoque per pr. 16. $\frac{V}{VR+S-SR} = \frac{V}{A} = Rd$. Quærendum itaque quota potestas datæ rationis R, æquatur datæ quantitati. quippe istius potestatis index unitate auctus, est quæsitus numerus terminorum $T = D + 1$.

92 Et; Datis termino maximo, progressionis summa, & numero terminorum; V, S, T; datur communis ratio. R. Est enim, per pr. 90. $S = \frac{VR^t - V}{R^t - Rd}$, adecq; $SR^t - SRd = VR^t - V$, & $V = SRd - SR^t + VR^t$, & $\frac{V}{S-V} = \frac{S}{S-V} R^d - R^t$. Cujus Æquationis radix R, est communis ratio quæsita.

93 Et, Datis ratione communi, numero terminorum, & progressionis summa; R, T, S; datur terminus maximus. V. Est enim, (ut in præced.) $SR^t - SRd = VR^t - V$. Ergo $\frac{SR^t - SRd}{R^t - 1} = V$.

94 Porro; (ut compendio utar,) Datis A, V, S; datur T. Nam, per pr. 78. $\frac{S-A}{S-V} = R$. Et, per pr. 18 $\frac{V}{A} = Rd$. Quærendum itaque, quota potestas R cognitæ, æquatur cognitæ *Rd*. ut habeatur $D = T - 1$, adeoq; $D + 1 = T$.

95 Idem habetur, si pro A, V, darentur A, $\sqrt{A}$. Nam habetur *R*, per pr. 79. Et T ut prius.

96 Vel A, $\frac{V}{A}$. Nam habetur *R*, per pr. 80. & T, ut prius.

97 *Vel* V, $\sqrt{A}$. Nam habetur *R*, pr. 81. & T, ut prius.

98 *Vel* V, $\frac{V}{A}$. nempe *R*, per pr. 82. & T, ut prius.

99 *Vel* denique $\sqrt{A}$, $\frac{V}{A}$. Nempe *R*, per pr. 83. Et T, ut prius.

100 Datis A, V, T, datur S. Nam per pr. 17. habetur $R = \sqrt[d]{\frac{V}{A}}$. Ergo per pr. 68. $\frac{V\sqrt[d]{\frac{V}{A}} - A}{\sqrt[d]{\frac{V}{A}} - 1} = S$.

101 Idem habetur, si, pro A, V, darentur A, $\sqrt{A}$. Nempe

$\frac{A)\mathcal{A}\sqrt{d:A^2})\mathcal{A}:-A}{\sqrt{d:A^2})\mathcal{A}:-1} = S$. Nam $A)\mathcal{A}(V$. Et $A^2)\mathcal{A}(\frac{V}{A}$.

102 *Vel* A, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{\frac{V}{A}A\sqrt{d\frac{V}{A}:-A}}{\sqrt{d\frac{V}{A}:-1}} = S$. Nam $\frac{V}{A}A = V$.

103 *Vel* V, $\mathcal{A}$. Nempe $\frac{V\sqrt{d:\mathcal{A})V^2:-V)\mathcal{A}}}{\sqrt{d:\mathcal{A})V^2:-1}} = S$. Nam $\mathcal{A})V^2(\frac{V}{A}$. Et $V)\mathcal{A}(A$.

104 *Vel* V, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{V\sqrt{d\frac{V}{A}-V)\mathcal{A}}}{\sqrt{d\frac{V}{A}-1}} = S$. Nam $V)\mathcal{A}(A$.

105 *Vel* denique $\mathcal{A}$, $\frac{V}{A}$. Nempe $\frac{\sqrt{d\frac{V}{A}\sqrt{:\frac{V}{A}\mathcal{A}:-\sqrt{:\frac{V}{A})\mathcal{A}:}}}}{\sqrt{d\frac{V}{A}-1}}$ $= S$. Nam $\sqrt{:\frac{V}{A}\mathcal{A}:} = V$. Et $\sqrt{:\frac{V}{A})\mathcal{A}:} = A$.

106 Datis *A*, T, *S*; datur *V*. Nam habetur R, per pr. 88. adeoque *V*, per pr. 19.

107 Datis *V*, T, *S*; datur A. Nam habetur *R*, per pr. 92. Et *A*, per pr. 20.

108 Datis A, V, Z: datur S. Nam per pr. 48. habetur $T = \mathcal{A})Z$. Et deinde S per pr. 100.

109 Idem habetur, si pro A, V, dentur A, $\mathcal{A}$. per prop. 48, 101.

110 vel A, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 102.

111 vel V, $\mathcal{A}$. per pr. 48, 103.

112 vel V, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 104.

113 vel $\mathcal{A}$, $\frac{V}{A}$. per pr. 48, 105.

114 Datis A, V, S; datur Z. Nam per prop. 78. habetur $R = S\frac{S-A}{S-V}$. adeoq; Z per pr. 56.

115 Idem habetur, si, pro A, V, dentur. A, $\mathcal{A}$, per pr. 79, 56.

116 vel A, $\frac{V}{A}$. per pr. 80, 56.

117 vel V, $\mathcal{A}$, per pr. 81, 56.

118 vel V, $\frac{V}{A}$, per pr. 82, 56.

119 vel denique $\mathcal{A}$, $\frac{V}{A}$. per pr. 83, 56.

120 Datis A, R, Z; datur S. Quippe habetur T, per pr. 64. & deinde S, per pr. 86.

121 Datis A, R, S; datur Z. Nam per prop. 84. habetur V. adeoq; Z per pr. 56.

122 Datis A, T, Z; datur S Nam per pr. 59. habetur R. adeoq; S per pr. 86.

123 Datis A, T, S; datur Z. Nempe R per pr. 88. adeoque Z per pr. 58.

124 Datis V, R, Z; datur S. Nempe T per pr. 66. adeoque S per pr. 90.

125 Datis V, R, S; datur Z. Nempe A per pr. 85. & Z per pr. 58.

126 Datis V, T, Z; datur S. Nempe R per pr. 61. & S per pr. 90.

127 Datis V, T, S; datur Z. Nempe R per pr. 92. & Z per pr. 60.

128 Datis R, T, VA; datur A. Nempe $\frac{V}{A}$ per pr. 16. & A per pr. 54.

129 Datis iisdem; datur V. Nempe $\frac{V}{A}$ per pr. 16. & V per pr. 55.

130 Datis iisdem; datur S. Nempe A per pr. 128. & S per pr. 86.

131 Datis VA, R, Z; datur A. Nempe T per pr. 48, & A per pr. 128.

132 Datis iisdem; datur V. Nempe T ut prius. & V per pr 129.

133 Datis iisdem; datur S. Nempe T, ut prius. & S per pr. 130.

134 Datis VA, R, S; datur A. Est enim per pr. 68. $R-1)VR-A$ (S. ideoque $SR-S=VR-A$. Et $SRA-SA=VAR-A^2$. adeoque $A^2+SRA-SA=VAR$. Cujus æquationis radix est $A=$

$$=\frac{\sqrt{:S^2R^2-2S^2R+S^2+4VAR:}-SR+S}{2}.$$

135 Datis iisdem; datur V. Nam (ut in præced.) $SR-S=VR-A$. adeoque $SRV-SV=V^2R-VA$. Et $VA=RV^2-SRV+SV$. Et $R)VA=V^2-SV+R)SV$. Cujus æquationis radix est $V=$

$$=\frac{\sqrt{:S^2R^2-2S^2R+S^2+4VAR:}+SR-S.}{2R}$$

136 Datis iisdem; datur T. Nempe per pr. 134, habetur A; adeoq; T per pr. 87.

137 Datis iisdem, datur Z. Nempe per præced. habetur T; adeoq; Z per pr. 47.

138 Datis $\frac{V}{A}$, R, Z; datur A. Nam per pr. 18. habetur T; adeoque A per pr. 62.

139 Datis iisdem; datur V. Nempe T ut in præced. & V per pr. 63.

140 Datis iisdem, datur S. nempe A & V per duas præcedentes. adeoq; S per pr. 72.

141 Datis $\frac{V}{A}$, R, S; datur A. Nam per pr. 18. habetur T. adeoque A per pr. 89.

142 Datis iisdem; datur V. Nempe T ut in præced. & V per pr. 93.

143 Datis iisdem; datur Z. Nempe T ut prius, & A, V, per duas præcedentes; & tandem Z per pr. 47.

144 Datis $\frac{V}{A}$, T, Z; datur A. Nam habetur R per pr. 17. & VA per pr. 49. adeoq; A per pr. 54.

145 Datis iisdem; datur V. nempe VA ut in præced. adeoq; V per pr. 55.

146 Datis iisdem; datur S. Nempe inventis R per pr. 17. & A, V, per duas præcedentes; habetur S per pr. 72,

147 Datis $\frac{V}{A}$, T, S: datur A. Nempe habetur R per pr. 17; adeoq; A per pr. 89.

148 Datis iisdem; datur V. Nempe R ut prius; & V per pr. 93.

149 Datis iisdem; datur Z. Nempe inventis A, V, per duas præcedentes, habetur Z per pr. 47.

150 Datis R, T, Z; datur *S*. Nempe A per pr. 62. adeoq; *S* per pr. 86.

151 Datis R, T, *S*; datur Z. Nempe A & V per pr. 89 & 93. adeoq; Z per pr. 47.

Atque hactenus Progressionem Geometricam fusius explicavimus; & Problemata, pleraq; saltem, eo spectantia expedivimus. Libet autem sequente capite (quod de Progressione Arithmetica supra factum est cap: XXVIII.) in breviorem synopsin, quæ jam tradidimus, præcipua problemata compingere.

CAP.

CAP. XXXIV.

Progressionis Geometricæ brevior Synopsis.

QUæ in præcedente Capite fusius tradimus, de Progressione Geometrica, Problemata; libet his in breviorem formam, sed & alio ordine, redigere: Retentis tamen iisdem quibus ibidem usi sumus Symbolis.

Theoremata.

1. $D = T - 1.$
2. $V = ARd.$
3. $A = \frac{V}{Rd}.$
4. $Z = TA = TA^{2}\,Rd = \frac{TV^{2}}{Rd}$
5. $S = \frac{VR - A}{R - 1} = \frac{AR^{t} - A}{R - 1} = \frac{R^{t} - 1}{R - 1}\,A = \frac{VR^{t} - V}{R^{t} - Rd} = \frac{R^{t} - 1}{R^{t} - Rd}\,V.$
6. $A = \frac{R - 1}{R^{t} - 1}\,S.$
7. $V = \frac{R^{t} - Rd}{R^{t} - 1}\,S.$
8. $SR - S = VR - A.$
9. $R = \frac{S - A}{S - V}.$
10. $A = VR + S - SR.$
11. $VR = AR^{t} = A + SR - S.$
12. $V = \frac{A + SR - S}{R}$
13. $SR^{t} - SRd = VR^{t} - V.$
14. $V = SRd - SR^{t} + VR^{t}$
15. $\frac{V}{S - V} = \frac{S}{S - V}\,Rd - R^{t}.$

Problemata.

Data. Quæsita.

1. A, V : $\sqrt{A} = V\,A.$
2. $\frac{V}{A} = A)V.$
3. A, $\sqrt{A}$: $V = A)\sqrt{A}.$ $\frac{V}{A}$ per 2.
4. A, $\frac{V}{A}$: $V = \frac{V}{A}\,A.$ $\sqrt{A}$ per 1.
5. V, $\sqrt{A}$: $A = V)\sqrt{A}.$ $\frac{V}{A}$ per 2.
6. V, $\frac{V}{A}$: $A = \frac{V}{A})V.$ $\sqrt{A}$ per 1.
7. $\sqrt{A}$, $\frac{V}{A}$: $A^{2} = \frac{V}{A})\sqrt{A}.$
8. $V^{2} = \frac{V}{A}\sqrt{A}.$

	Data Quæsita.
9	T, R : $\frac{V}{A}$
10	T, $\frac{V}{A}$: R. Nam $\frac{V}{A}$ = Rd
11	$\frac{V}{A}$, R : T.
12	VA, T : Z = T VA.
13	VA, Z : T = VA) Z.
14	T, Z : VA = T) Z.
15	A, V, R : S = $\frac{VR - A}{R - 1}$
	VA. per 1.
	$\frac{V}{A}$. per 2.
	T. per 11.
	Z. per 12.
16	A, V, T : VA. per 1
	$\frac{V}{A}$. per 2
	R. per 10
	Z. per 12
	S. per 15
17	A, V, Z : VA. per 1
	$\frac{V}{A}$. per 2
	T. per 13
	R. per 10
	S. per 15
18	A, V, S : VA, per 1
	$\frac{V}{A}$. per 2
	R = $\frac{S - A}{S - V}$
	T. per 11
	Z. per 12
19	A, VA, R : V, per 3
	$\frac{V}{A}$. per 2
	T. per 11
	Z. per 12
	S. per 15

	Data. Quæsita.
20	A, VA, T : V, per 3
	$\frac{V}{A}$. per 2
	R. per 10
	Z. per 12
	S. per 15
21	A, VA, Z : V, per 3
	$\frac{V}{A}$. per 2
	T. per 13
	R. per 10
	S. per 15
22	A, VA, S : V, per 3
	$\frac{V}{A}$. per 2
	R. per 18
	T. per 11
	Z. per 12
23	A, $\frac{V}{A}$, R : V. per 4
	VA. per 1
	T. per 11
	Z. per 12
	S. per 15
24	A, $\frac{V}{A}$, T : V, per 4
	VA. per 1
	R. per 10
	Z. per 12
	S. per 15
25	A, $\frac{V}{A}$, Z : V, per 4
	VA. per 1
	T. per 13
	R. per 10
	S. per 15
26	A, $\frac{V}{A}$, S : V, per 4
	VA. per 1
	R. per 18
	T. per 11
	Z. per 12

	Data	Quæsita.
27	V, VA, R:	A, per 5 $\frac{V}{A}$. per 2 T. per 11 Z. per 12 S. per 15
28	V, VA, T:	A, per 5 $\frac{V}{A}$. per 2 R. per 10 Z. per 12 S. per 15
29	V, VA, Z:	A, per 5 $\frac{V}{A}$. per 2 T. per 13 R. per 10 S. per 15
30	V, VA, S:	A, per 5 $\frac{V}{A}$. per 2 R. per 18 T. per 11 Z. per 12
31	V, $\frac{V}{A}$, R:	A, per 6 VA. per 1 T. per 11 Z. per 12 S. per 15
32	V, $\frac{V}{A}$, T:	A, per 6 VA. per 1 R. per 10 Z. per 12 S. per 15
33	V, $\frac{V}{A}$, Z:	A, per 6 VA. per 1 T. per 13 R. per 10 S. per 15
34	V, $\frac{V}{A}$, S:	A, per 6 VA. per 1 R. per 18 T. per 11 Z. per 12
35	VA, $\frac{V}{A}$, R:	A, per 7 V. per 8 T. per 11 Z. per 12 S. per 15
36	VA, $\frac{V}{A}$, T:	A, per 7 V. per 8 R. per 10 Z. per 12 S. per 15
37	VA, $\frac{V}{A}$, Z:	A, per 7 V. per 8 T. per 13 R. per 10 S. per 15
38	VA, $\frac{V}{A}$, S:	A, per 7 V. per 8 R. per 18 T. per 11 Z. per 12
39	A, R, T:	V = ARd VA, per 1 $\frac{V}{A}$. per 2 Z. per 12 S. per 15
40	A, R, Z: T. Nam A^2) ZR = TR².	V. per 39 VA. per 1 $\frac{V}{A}$. per 2 S. per 15

	Data Quæsita.
41	A,R,S: $V = \frac{A+3R-S}{R}$
	$\sqrt{A}$. per 1
	$\frac{V}{A}$. per 2
	T. per 11
	Z. per 12
42	A,T,Z: $V = AT\sqrt{Z}$
	$\sqrt{A}$. per 1
	$\frac{V}{A}$. per 2
	R. per 10
	S. per 15
43	A,T,S: R.
	Nam $Rt = \frac{RS-S+A}{A}$
	V: per 39
	$\sqrt{A}$. per 1
	$\frac{V}{A}$: per 2
	Z. per 12
44	V,R,T: $A = Rd\sqrt{V}$.
	$\sqrt{A}$. per 1
	$\frac{V}{A}$. per 2
	Z. per 12
	S. per 15
45	V,R,Z: T.
	Nam $Rd = \frac{Z}{\sqrt{T}}$.
	A. per 44
	$\sqrt{A}$. per 1
	$\frac{V}{A}$. per 2
	S. per 15
46	V,R,S: $A = \frac{VR+S-SR}{T}$.
	$\sqrt{A}$. per 1
	$\frac{V}{A}$. per 2
	T. per 11
	Z. per 12

	Data. Quæsita.
47	V,T,Z: $\sqrt{A}$, per 14
	A. per 5
	$\frac{V}{A}$. per 2
	R. per 10
	S. per 15
48	V,T,S: R. Nam $\frac{V}{S-V} = \frac{S}{S-V}$ Rd. Rt.
	A. per 44
	$\sqrt{A}$. per 1
	$\frac{V}{A}$. per 2
	Z. per 12
49	R,T,Z: $\frac{V}{A}$, per 9
	$\sqrt{A}$. per 14
	A. per 7
	V. per 8
	S. per 15
50	R,T,S: $\frac{V}{A}$, per 9
	$A = \frac{R-1}{Rt-1}S$.
	V. per 4
	$\sqrt{A}$. per 1
	Z. per 12
51	$\sqrt{A}$,R,T: $\frac{V}{A}$, per 9
	A. per 7
	V. per 8
	Z. per 12
	S. per 15
52	$\sqrt{A}$,R,Z: T, per 13
	$\frac{V}{A}$. per 9
	A. per 7
	V. per 8
	S. per 15

	Data.	Quæsita.
53	VA, R, S : A. Nam $A^2 + SRA - SA = VAR$.	V, per 3 $\frac{V}{A}$. per 2 T. per 9 Z. per 12
54	$\frac{V}{A}$, R, Z :	T. per 11 VA per 14 A. per 7 V. per 8 S. per 15
55	$\frac{V}{A}$, R, S :	T, per 11 A. per 50 V. per 4 VA. per 1 Z. per 12
56	$\frac{V}{A}$, T, Z :	R, per 10 VA. per 14 A. per 7 V. per 8 S. per 15
57	$\frac{V}{A}$, T, S :	R, per 10 A. per 50 V. per 4 VA. per 1 Z. per 12

Reliqui fere casus, parum aut nihil pandunt, ultra quod datum est.

CAP. XXXV.

Euclidis Elementum quintum Arithmeticè demonstratur,

PRiusquam Rationum doctrinam dimittam, libet & Euclidis Elementum quintum, quod de Rationibus & proportionibus agit breviter explicare. Cujus quidem utilitas in tota passim Mathesi, nemini vel leviter exercitato non innotescit.

Est autem illud Elementum quintum, ut & tota rationum Doctrina, Arithmetica potius quam Geometrica, (saltem prout Arithmetices fines nunc Dierum ampliari solent, ut non solos numeros integros, sed & fractos, & surdos recipiant; totamque Algebræ, & Arithmeticæ, ut loquuntur, Speciosæ vel Symbolicæ praxin.) Quid quod & ipsa Arithmetica tota, si intimius spectetur, vix aliud videatur quam Rationum doctrina. Ipsique Numeri rationum totidem indicia quarum communis consequens est 1, Unitas, Ubi enim 1, sive Unitas, habetur pro *quantitate exposita*; reliqui omnes numeri (sive integri, sive

fracti, sive etiam surdi) sunt rationum totidem aliarum ad expositam quantitatem indices sive exponentes.

Cur autem Lineis potius quam numeris rationum doctrinam tradere maluerint veteres; causa fuit non una. Partim scilicet, quod illi, vix alios numeros quam Integros admiserint; (nec enim materiam Arithmeticam ficut Geometricam, in infinitum divisibilem admiserunt, sed in unitate sistendum voluere;) adeoque non pariter numeris atque Lineis rationes omnes denotari posse perspexerint; Et propterea doctrinæ alioqui universalis, specimen saltem in lineis tradere maluerunt, eamque prout opus fuerit, inde in aliam quamvis materiam rationum capacem pro re nata transferre. Maxime autem uti mihi saltem videtur, quia non modo methodus Symbolica nondum obtinuerat, sed ne quidem figuræ numerariæ, quæ jam passim usitatæ sunt, ab Indis inventæ, fuerunt introductæ; ut non nisi difficulter admodum numerorum praxin exercere valuerint. Licet revera, ipsa sive linearum, sive planarum, vel etiam solidarum, aliarumve quantitatum, literis alphabeticis designatio, (puta A, B, &c. quibus designantur in textu anguli lineæve &c. in schemate conspecta,) symbolica designatio non minus dici poterit quam ubi similibus symbolis qnantitates (non tam in charta conspectæ, quam) mente conceptæ indicantur.

Utut fuerit; nihil impedit quin nos, ut reliquam Rationum doctrinam, ita speciatim totum illud quod Elemento quinto de rationibus traditur, Arithmetice (adeoque simpliciter & Universaliter) tradamus, quod ut opus fuerit (sicut & Arithmetica universa) cuivis subjecto poterit applicari.

Definitiones autem quas illic præmissas habemus, hic libet intactas transire; quoniam illæ, partim superius, Cap. XXV, XXIX, XXX, explicantur, partim etiam cum ipsa propositionum traditione, ubi opus fuerit, obiter exponentur.

Id saltem monendum erit de definitione 5ª, sive juxta Clavium 6ª, quæ est *magnitudinum*, sive quantitatum, *in eadem ratione* constitutarum: quam Euclides his verbis effert, Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, πρῶτον πρὸς δεύτερον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον: ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκάτερον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ λαμβάνεται κατάλ-

καταλληλα. *In eadem ratione magnitudines esse dicuntur, prima ad secundam & tertia ad quartam, quando primæ & tertiæ æque multiplices, secundæ & quartæ æque multiplices, juxta quamvis multiplicationem, utraq; utramq; vel una superant, vel una æquales sunt, vel una deficiunt, inter se comparatæ.* Nos hanc definitionem, quamvis veram quidem & Euclidis suscepto satis accommodam, in nostris demonstrationibus omittendam duximus; neq; ad hoc κεφαλαιον proportionalia examinamus. Quippe quod perplexius videtur, nec adeo forsan, tyronibus præsertim, perspicuum. Nec quidem tam proportionalium naturam immediate respicit, quam eorundem affectionem aliquam satis remotam. Nobis autem, qui rationes superius docuimus *Quoto* æstimandas, ad rationum sive æqualitatem sive identitatem probandam sufficere videtur, si fuerit æqualitas sive identitas quotorum. Puta si sit $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta}$, est & $a . \alpha :: b . \beta$. Et contra. Quod nobis erit, definitionis loco, ejusdem æqualisve rationis. Ubi autem quotus major est, ibi & major ratio; ubi minor, minor. Puta, si $\frac{a}{\alpha} \gtrsim \frac{b}{\beta}$, erit illa ratio major; si $\frac{a}{\alpha} \lesssim \frac{b}{\beta}$, hæc major erit, illa minor. Siquis tamen mallet affectionis alicujus opem in auxilium advocare, quo demonstrationes commodius procedant; ego nullam potiorem novi quam quæ a nobis prop. Cap. XXXII. demonstrata est; Et quidem (speciatim de lineis) ab ipso Euclide 16 e 6. Nempe *Si quatuor quantitates fuerint proportionales, factum ab extremis æquatur facto a mediis; & contra.* Puta si $A . \alpha :: B . \beta$; erit $A\beta = \alpha B$, & contra, Quod sic ostenditur. Cum sit $A . \alpha :: B . \beta$. hoc est $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$, erit (æqualiter utrinq; multiplicando) $A = \frac{\alpha B}{\beta}$ & $A\beta = \alpha B$. Contra vero; si $A\beta = \alpha B$, erit (æqualiter utrinq; dividendo) $A = \frac{\alpha B}{\beta}$ & $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$, hoc est, $A . \alpha :: B . \beta$. Atque ex hoc *Lemmate*, facilius quam ex illa Euclidis definitione memorata, demonstrari

possent omnes illæ propositiones ubi illam adhibet Euclides: quod itaque non incommode pro illa Euclidis definitione substitui poterit.

His præmonitis, Propositiones aggredior: postquam monuero, quod, pro *Magnitudinibus* (de quibus solis agit Euclides) nos simpliciter *Quantitates* ubiq; substituimus. Quippe de quantitatibus aliis non minus procedunt tum propositiones tum demonstrationes quam de magnitudinibus.

1 *Si fuerint quotcunq; quantitates, quotcunq; quantitatum sigillatim æque multiplæ; quotupla est una unius, totuplæ erunt & omnes omnium.* Puta si $A = M\alpha$, $B = M\beta$, $C = M\gamma$, &c. Erunt $A + B + C$ &c. $= (M\alpha + M\beta + M\gamma$ &c.$)$ $= M$ in $\alpha + \beta + \gamma$ &c, ut multiplicando patebit. Idem igitur est communis multiplicator M, quod erat probandum. Hic idem demonstratur universaliter pr. 12. de ratione qualibet, non minus quam multiplici.

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{M \qquad\qquad M\alpha + M\beta + M\gamma}$$

2. *Si prima secundæ æque multipla fuerit, & tertia quartæ,* $(A = M\alpha, B = M\beta,)$ *sitq; quinta secundæ æquemultipla ac sexta quartæ;* $(C = N\alpha, D = N\beta:)$ *erunt item prima & quinta simul, secundæ; atque tertia & sexta simul, quartæ, æque multiplices.* Nempe $A + C = M\alpha + N\alpha$, $= M + N:$ in α. & $B + D = M\beta + N\beta = M + N:$ in β. Communis itaque utrobique multiplicator, $M + N$. Idem ostenditur in quacunque ratione, utut non multiplici. prop. 24.

3. *Si fuerit prima secundæ æquemultipla atque tertia quartæ,* $(A = M\alpha, B = M\beta,)$ *& sumantur æque multiplices primæ & tertiæ* (NA, NB; hoc est $NM\alpha$, $NM\beta$,) *erunt & æque multiplices, illa secundæ, atque hæc quartæ.* Quippe utrobique est NM communis multiplicator. Estque hæc una species argumentationis *ex æquo*, sive *ex æquali*, &c.

4. *Si prima ad secundam, eandem habeat rationem, atque tertia ad quartam,* $(A . \alpha :: B . \beta.)$ *Eandem item rationem habebunt æque multiplices primæ & tertiæ ad æquemultiplices secundæ & quartæ, juxta quamlibet multiplicationem, respective sumptæ.* Puta $AM . \alpha\mu :: BM . \beta\mu$. $A . \alpha :: B . \beta$, hoc est $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$; erit, æqualiter utrinq;

trinque multiplicando $(\frac{A}{\alpha} \times M$, vel$)$ $\frac{AM}{\alpha} = (\frac{B}{\beta} \times M$ vel$)$ $\frac{BM}{\beta}$; &, æqualiter utrinque dividendo $\mu)$ $\frac{AM}{\alpha}$ vel $\frac{AM}{\alpha\mu} = \mu)$ $\frac{BM}{\beta}$ vel $\frac{BM}{\beta\mu}$. adeoque $AM.\alpha\mu::BM.\beta\mu$. Quod erat demonstrandum. Vel brevius, per Lemma nostrum, Si $A.\alpha::B.\beta$, erit $(A\beta = \alpha B$, adeoque $A\beta M\mu = \alpha BM\mu$ vel $AM\beta\mu = \alpha\mu BM$, & propterea$)$ $AM.\alpha\mu::BM.\beta\mu$.

Euclides Corollarium, hoc (ut in demonstrationis suæ curriculo demonstratum) adjungit; *Si quatuor quantitates proportionales sint, sunt & inverse* (ἀνάπαλιν) *proportionales.* Hoc est, si $A.\alpha::B.\beta$. erit $\alpha.A::\beta.B$. (Præterquam quod ex se videtur manifestum, puta si utrobique eadem sit Relatorum ad correlata, eadem erit & correlatorum ad illa, respective sumpta, relatio: vel, verbi gratiâ, si quoties A continet α, toties & B contineat β; vice versa, quoties α continetur in A, toties & β in B.) Sequitur directe ex lemmate nostro. Sive enim $A\beta$ sint extremæ, & αB mediæ; sive hæ extremæ, & illæ mediæ; erit utroque modo, si utrovis, $A\beta = \alpha B$; adeoque utrobique proportionalitas.

Hæc argumentatio ab Euclide definitur 13 d 5 (juxta Clavium;) *Inversa ratio est sumptio consequentis, ceu antecedentis, ad antecedentem velut ad consequentem.*

5. *Si quantitas quantitatis æque multipla sit, atq; ablata ablatæ; erit & reliqua reliquæ æque multipla atq; tota totius.* Puta si $A + B = M$; in $\alpha + \beta$: $= M\alpha + M\beta$, sitque $A = M\alpha$; erit & $B = M\beta$. Nam, propter æqualia æqualibus ablata, erunt & reliqua æqualia.

$$\begin{array}{rl} & A + B = M\alpha + M\beta \\ \text{mi:} & A = M\alpha \\ \hline & B = M\beta \end{array}$$

Idem universaliter ostenditur pr. 19. de quacunq; ratione, utut non multiplici.

6. *Si duæ quantitates* $(A + B$, & $C + D,)$ *sint duarum quantitatum* $(\alpha$, & $V,)$ *æque multiplæ,* (puta per $M + \mu$,) *sintque ablatæ quæ-* *am* $(A, C,)$ *earundem* $(\alpha, \gamma,)$ *æque multiplæ,* (puta per M:) *eum & reliquæ* $(B, D,)$ *vel ejusdem æquales* (si nempe μ per 1) *vel*

ipſarum æque multiplæ; (nempe per μ) Propter æqualia æqualibus ablata; ut patet.

$$\frac{A+B=M\alpha+\mu\alpha \quad -A=M\alpha}{B=\mu\alpha} \qquad \frac{C+D=M\gamma+\mu\gamma \quad -C=M\gamma}{D=\mu\gamma}$$

7 *Æquales ad eandem, eandem habent rationem, & eadem ad æquales.* Puta ſi $A=B$, erit (æqualiter dividendo) $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\alpha}$; adeoque $A.\alpha::B.\alpha$. Item $\frac{\alpha}{A}=\frac{\alpha}{B}$, adeoque $\alpha.A::\alpha.B$. Vel ſic (ſi opus) per lemma noſtrum; Quia ſi $A=B$ erit & $A\alpha=\alpha B$.

8. *Inæqualium major ad eandem, majorem habet rationem quam minor. Et eadem ad minorem, majorem habet rationem quam ad majorem.* Nam $\frac{A+E}{\alpha}\left(=\frac{A}{\alpha}+\frac{E}{\alpha}\right)>\frac{A}{\alpha}$. Item $\frac{\alpha}{A+E}<\frac{\alpha}{A}$. Quippe creſcente Dividendo creſcit quotus, ſed creſcente Diviſore, minuitur.

9. *Quæ ad eandem eandem habent rationem, ſunt inter ſe æquales: & ad quas eadem eandem habet rationem, ipſæ item æquales ſunt.* Nam, ſi $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\alpha}$, erunt (multiplicando per α) $B=A$. Item, ſi $\frac{\alpha}{A}=\frac{\alpha}{B}$ adeoque (per coroll. pr. 4.) $\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\alpha}$, erunt & $A=B$, ut prius. Vel, per lemma noſtrum, ſi $A.\alpha::B.\alpha$. vel $\alpha.A::\alpha.B$. erit $A\alpha=\alpha B$, adeoq; $A=B$.

10. *Quantitatum rationem ad eandem habentium, quæ majorem habet rationem eſt major; ad quam vero eadem majorem habet rationem, illa minor eſt.* Nam ſi $\frac{A}{B}$ major quam $\frac{\alpha}{B}$, puta æqualis $\frac{\alpha+\varepsilon}{B}$, erit, æqualiter multiplicando, $A(=\alpha+\varepsilon)>\alpha$. Item, ſi $\frac{B}{A}$ minor ſit quam $\frac{B}{\alpha}$, puta æqualis $\frac{B}{\alpha+\varepsilon}$ (per pr. 8.) erit per cor. pr. 4. $\frac{A}{B}=\frac{\alpha+\varepsilon}{B}$, adeoque $A>\alpha$;

11 *Quæ eidem eædem sunt rationes, inter se sunt eædem.* Nam si $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}$ erit $\frac{A}{\alpha} = \frac{C}{\gamma}$

12. *Si sint quotcunque quantitates proportionales; ut est una antecedentium ad suam consequentem, ita & omnes antecedentes ad omnes consequentes.* Esto $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}$ &c. $= R$. Erit igitur $A = R\alpha$ $B = R\beta$, $C = R\gamma$ &c. adeoq; $A + B + C$ &c. $= R\alpha + R\beta + R\gamma$ &c. $= R$ in $\alpha + \beta + \gamma$ &c. Ideoque (æqualiter dividendo) $\frac{A+B+C\text{ &c.}}{\alpha+\beta+\gamma\text{ &c.}} = R = \frac{A}{\alpha}$. Vel sic $A . RA :: A + B + C$ &c. (R in $A + B + C$ &c. $=$) $RA + RB + RC$ &c. ut patet. Aut per lemma nostrum, quia A in $RA + R_B + RC$ &c. $=$ ($ARA + ARB + ARC$ &c. $=$) RA in $A + B + C$ &c. Est autem hæc universalis propositio ad prop. 1. Quod enim illic ostenditur speciatim de Ratione multipla; hic ostenditur universaliter de qualibet ratione.

13. *Si prima A, ad secundam α, eandem habeat rationem quam tertia B, ad quartam β; tertia autem ad quartam majorem habeat rationem quam quinta C ad sextam γ: habebit & prima ad secundam majorem rationem quam quinta ad sextam.* Nam $\frac{A}{\alpha} (= \frac{B}{\beta}) > \frac{C}{\gamma}$. Vel sic, $\frac{B}{\beta} (> \frac{C}{\gamma}) = \frac{C+E}{\gamma} = \frac{A}{\alpha} > \frac{C}{\gamma}$.

14. *Si prima ad secundam eandem habeat rationem, quam tertia ad quartam, sitq; prima major quam tertia; & secunda quam quarta major erit: si æqualis, æqualis; si minor, minor.* Esto $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$. Si autem $A > B$, erit & $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\alpha}$, ergo & $\frac{B}{\beta} (= \frac{A}{\alpha}) > \frac{B}{\alpha}$, adeoque $\alpha > \beta$ per pr. 10. Vel sic, quia $A . B :: \alpha . C$. ut deinceps ostenditur prop. 16.

15. *Partes (aliquotæ) inter se comparatæ, eandem habent rationem quam habent earum æque multiplices inter se.* Hoc est $\frac{A}{\alpha} =$

$A +$

$\frac{A+A+A\ \&c}{\alpha+\alpha+\alpha\ \&c} = \frac{MA}{M\alpha}$ per pr. 12. Vel, per lemma noſtrum, $A.\alpha :: MA.M\alpha$. quia $A \times M\alpha = \alpha \times MA$.

16. *Si quatuor quantitates proportionales ſint, ſunt & alternè* (permutatim, viciſſim, ἐναλλὰξ,) *proportionales.* Hoc eſt, ſi $A.\alpha :: B.\beta$, erit & $A.B :: \alpha.C$. Per lemma noſtrum. nam utroque modo, ſi utrovis, erit $A\beta = \alpha B$.

Eſtq; hæc ea argumentatio quam definit Euclides 12 d 5. *Alterna ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.*

Notandum autem eſt, hanc propoſitionem ſolummodo illic obtinere, ubi quatuor quantitates ſunt invicem homogeneæ; non autem ubi bina binis heterogenea. Puta, ſi ſit, ut pondus A, ad pondus α; ſic linea B ad lineam β. non tamen dicendum erit, ut pondus A, ad lineam B; ſic pondus α, ad lineam β. Quia ponderis ad lineam, quippe quantitatem illi heterogeneam, nulla eſt Ratio; ut quæ inter homogeneas ſolas conſiſtit. Atq; eadem de cauſa, prop. 14. de ſolis homogeneis procedit; ut & prop. 1.5.6.7.8.9.10.12.15.19.25.27.33. proprie loquendo.

Verùm ſiquando alternatione opus fuerit, ubi de quantitatibus invicem heterogeneis agitur: poterit utraque ratio aliis exponi terminis invicem homogeneis; in quibus alternatione inſtituta, aliiſque ut opus fuerit operationibus peractis, nova alternatione reſtituendi ſunt in priſtinum ordinem termini mutuati, & deinde deponendi, reſumptis a principio poſitis. Ut ad prop. 19. mox oſtendetur.

17. *Si quantitates compoſitæ* (συγκείμενα) *proportionales ſint, erunt & diviſæ* (διαιρεθέντα) *proportionales.* Puta ſi ſit $A+\alpha.\alpha :: B+\beta.\beta$. erit & $A.\alpha :: B.\beta$. Manifeſtum enim eſt tum quantitatem $A+\alpha$ una vice pluries continere quantitatem α, quam eandem continet A: & ſimiliter $B+\beta$, una vice pluries quam B, continere β: Et propterea ab æqualibus quotientibus detracta utrobique unitate, manet adhuc æqualitas. Vel ſic. Quia $\frac{A+\alpha}{\alpha} = \frac{A}{\alpha}+1$, & $\frac{B+\beta}{\beta} = \frac{B}{\beta}+1$. Si ſit $\frac{A+\alpha}{\alpha}$ ſive $\frac{A}{\alpha}+1$ $= \frac{B+\beta}{\beta}$ ſive $\frac{B}{\beta}+1$; erit (detracta utrinque unitate)

A

$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$. hoc est A. α :: B. β. Vel sic, si $\frac{T}{A} = \frac{\tau}{\alpha}$, erit $\left(\frac{T}{A} - 1 = \frac{\tau}{\alpha} - 1\right.$, hoc est$)$ $\frac{T - A}{A} = \frac{\tau - \alpha}{\alpha}$. Vel etiam per lemma nostrum, Si A + α. α :: B + β. β. erit (Aβ + αβ = αB + αβ, adeoque Aβ = αB, &) A. α :: B. β

Definitur autem hæc argumentatio 15 d 5. *Divisio rationis* (διαίρεσις λόγου) *est sumptio excessus, quo antecedens superat consequentem, ad ipsum consequentem.*

Adjungit hic Clavius duas alias *Divisionis Rationis* formas; Primam vocat *Divisionem rationis conversam; quando consequens ad excessum quo consequentem superat antecedens refertur.* Si A. α :: B. β. Erit α. A − α :: β. B − β. Quæ non alia est, quam prop. 15. Euclidis inversio. Nam per illam erit A − α. α :: B − β. β. adeoque inverse (per cor. prop. 4.) α. A − α :: β. B − C. Vel sic, si A. α :: B. C. Erit (AC = αB, & αB − αβ = Aβ. − αC, hoc est, α in B − C := A − α: in C. & propterea) α. A − α :: C. B − C.

Ateram vocat *Divisionem Rationis contrariam; quando confertur antecedens cum excessu quo consequens antecedentem superat.* Si A. α :: B. C. Erit A. α − A :: B. C − B. Quæ continet Euclidis, divisionem rationis, duasque inversiones. Nam primo invertendo erit α. A :: β. B. tum dividendo, sive per divisionem rationis, α − A. A :: C − B. B. Et tandem iterum invertendo A. α − A :: B. C − B. Vel sic, per lemma nostrum, Si A. α :: B. C. erit (AC = αB, & AC − AB = αB − AB, hoc est, A in C − B: = α − A: in B. adeoque) A. α − A :: B. C − B.

18. *Si quantitates divisæ* (διηρημέναι) *proportionales sint, erunt & compositæ* (συντεθειμέναι) *proportionales.* Si A. α :: B. C, erit item A + α. α :: B + C. C. Nam cum sit $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{C}$, erit item (addendo utrobique 1) $\frac{A}{\alpha} + 1 = \frac{B}{\beta} + 1$. hoc est $\frac{A + \alpha}{\alpha} =$

$\frac{B+\beta}{\beta}$; ideoq; $A+\alpha . \alpha :: B+\beta . \beta$. vel sic; Si $\frac{T}{A} = \frac{\tau}{\alpha}$, erit $\left(\frac{T}{A}+1 = \frac{\tau}{\alpha}+1\right.$, hoc est) $\frac{T+A}{A} = \frac{\tau+\alpha}{\alpha}$. Imo vero, & $\frac{T}{A}+2 = \frac{\tau}{\alpha}+2$, sive $\frac{T+2A}{A} = \frac{\tau+2\alpha}{\alpha}$. Et quidem universim. Si sit $\frac{T}{A} = \frac{\tau}{\alpha}$, erit etiam $\frac{T}{A} \pm M = \frac{\tau}{\alpha} \pm M$, sive $\frac{T \pm MA}{A} = \frac{\tau \pm M\alpha}{\alpha}$. Quomodo tum hæc, tum præcedens junctim & universaliter demonstrantur. Sed & per Lemma nostrum, hæc junctim cum præcedente, sic demonstratur; Si $A \pm \alpha . \alpha :: B \pm \beta . \beta$; erit ($A\beta \pm \alpha\beta = \alpha B \pm \alpha\beta$, & $A\beta = \alpha B$, ideoque) $A . \alpha :: B . \beta$.

Definitur hic argumentandi modus, præsente propositione demonstratus, ab Euclide 14 d 5. *Compositio rationis* (συνθεσις λόγου) *est sumptio antecedentis cum consequente tanquam unius, ad ipsam consequentem.*

Atq; hic etiam Clavius duas alias Rationis compositiones adjungit. Primum appellat *Compositionis rationem conversam; quando sumitur antecedens & consequens veluti una, quæ cum antecedente conferatur.* Puta si $A . \alpha :: B . \beta$. erit $A+\alpha . A :: B+\beta . \beta$. Quæ duas involvit Euclidis operationes. Nam invertendo, erit $\alpha . A :: \beta . B$. & componendo $\alpha+A . A :: \beta+B . B$. vel $A+\alpha . \alpha :: B+\beta . \beta$. Vel sic; si $A . \alpha :: B . \beta$. erit ($A\beta = \alpha B$, &, $A\beta+\alpha\beta = \alpha B+\alpha\beta$, hoc est, $A+\alpha$ in $\beta = \alpha$ in $B+\beta$, adeoq;) $A+\alpha . \alpha :: B+\beta . \beta$.

Alteram vocat *Compositionem rationis contrariam; quando refertur eadem antecedens ad antecedentem & consequentem ceu ad unam.* Puta si $A . \alpha :: B . \beta$. erit $A . A+\alpha :: B . B+\beta$. Estque hæc præcedentis inversio; & tres Euclidis operationes conjungit. Nam invertendo erit $\alpha . A :: \beta . B$. & componendo $A+\alpha . A :: B+\beta . B$. iterumq; invertendo $A . A+\alpha :: \beta . B+\beta$. Vel etiam per Lemma nostrum; Si $A . \alpha :: B . \beta$. erit ($A\beta = \alpha B$, adeoque $AB+A\beta = AB+\alpha B$, hoc est A in $B+\beta = A+\alpha$ in B, ideoque) $A . A+\alpha :: B . B+\beta$.

19 *Si sit ut tota ad totam, sic ablata ad ablatam; erit & reliqua ad reliquam ut tota ad totam.* Esto enim $\frac{A+B}{\alpha+\beta} = \frac{A}{\alpha} = R$. Erit itaque tum $A+B = R$ in $\alpha+\gamma = R\alpha+R\gamma$, tum $A = R\alpha$, adeoque & residuum $B = R\gamma$. Et (utrinque æqualiter dividendo) $\frac{B}{\gamma} = R = \frac{A+B}{\alpha+\beta}$. Estque hæc $\frac{A+B = R\alpha+R\gamma \quad -A = R\alpha}{B = R\gamma}$ propositio universalis ad prop. 5.

Euclides illam sic demonstrat. Quoniam ut $A+B.\alpha+\gamma :: A.\alpha$. erit alterne (seu permutando) $A+B.A :: \alpha+\gamma.\alpha$. Et dividendo (sive per divisionem rationis) $B.A :: \gamma.\alpha$. iterumq; permutando, $B.\gamma :: A.\alpha :: A+B.\alpha+\gamma$.

Atque colligit hoc πόρισμα seu corollarium, *Si compositæ magnitudines sint proportionales; & per conversionem rationis proportionales erunt.* Cum enim ostenderit $A+B.\alpha+\gamma :: B.\gamma$. Et permutando $A+B.B :: \alpha+\gamma.\gamma$. quæ sunt quantitates compositæ proportionales; sed & ostensum est $A+B.\alpha+\gamma :: A.\alpha$. adeoq; permutando $A+B.A :: \alpha+\gamma.\alpha$. quæ est conversio rationis. Quippe 16 d 5, definitur *Conversio rationis* (ἀναστροφὴ λόγου) *sumptio antecedentis ad excessum, quo antecedens ipsam consequentem superat.*

Clavius hanc demonstrationem improbat, propter adhibitam alternationem, quæ in solis homogeneis obtinet, cum tamen conversio rationis etiam ubi bina binis sunt heterogenea locum habet; adeoque hanc substituit. Si $A+B.B :: \alpha+\gamma.\gamma$. erit (dividendo) $A.B :: \alpha.\gamma$, & (invertendo) $B.A :: \gamma.\alpha$. & tandem (componendo) $A+B.A :: \alpha+\gamma.\alpha$. quæ est conversio rationis. Nempe si ut tota prima ad sui partem ablatam, sic tota secunda ad sui ablatam; erit ut tota prima ad sui reliquam, sic tota secunda ad sui reliquam. Vel brevius, si ut tota ad ablatam, sic tota ad ablatam; erit & tota ad reliquam, ut tota ad reliquam.

More nostro sic demonstrabitur; Si $\frac{A+B}{B} (= \frac{A}{B} + 1) = \frac{\alpha+\gamma}{\gamma} (= \frac{\alpha}{\gamma} + 1;)$ erit $(\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\gamma}$, adeoque $\frac{B}{A} = \frac{\gamma}{\alpha}$, &

$\frac{B}{A}+1=\frac{C}{\alpha}+1$, hoc est) $\frac{B+A}{A}=\frac{C+\alpha}{\alpha}$.

Vel, si libet, sic; Si $\frac{T}{A}=\frac{\tau}{\alpha}$, erit $\left(\frac{T}{A}-1=\frac{\tau}{\alpha}-1\right.$, hoc est $\frac{T-A}{A}=\frac{\tau-\alpha}{\alpha}$ adeoque $T\frac{A}{-A}=\frac{\alpha}{\tau-\alpha}$, & $\frac{A}{T-A}+1=\frac{\alpha}{\tau-\alpha}+1$, hoc est $\frac{A+T-A}{T-A}=\frac{\alpha+\tau-\alpha}{\tau-\alpha}$, vel) $\frac{T}{T-A}=\frac{\tau}{\tau-\alpha}$. Et similiter institui poterunt demonstrationes non modo prop. 17, & 18. ut supra, sed & earum quas illis subjungit Clavius. Quod obiter dictum esto.

Vel etiam per lemma nostrum; Si $A+B.B::\alpha+\beta.\beta$, erit $(A\beta+B\beta=B\alpha+B\beta$, adeoque $A\beta=B\alpha$, & $A\alpha+B\alpha=A\alpha+A\beta$, ideoque) $A+B.A::\alpha+\beta.\alpha$.

Sed & restitui poterit eadem hujusce propositionis demonstratio quam modo repudiavit Clavius, eo adhibito remedio quod ad prop. 16. innuimus. Puta, si sit, verbi gratia, ut $A+B$ numerus pedum in linea tota, ad B numerum pedum in ablata; sic $\alpha+\beta$ numerus unciarum in toto pondere, ad β numerum unciarum in ablato; (ut Symbola jam non lineas & pondera, quantitates heterogeneas, immediate significent, sed utrobique numeros, adeoque homogeneas:) erit permutando $A+B.\alpha+\beta::B.\beta$. ut numerus totus ad totum sic ablatus ad ablatum; ideoq; &, per pr. 19. sic reliquus ad reliquum, nempe $A+B.\alpha+\beta::B.\beta)::A.\alpha$, iterumq; permutando $A+B.A::\alpha+\beta.\alpha$. ut pedum numerus totus ad reliquum, sic unciarum numerus totus ad reliquum; & propterea etiam, ut linea tota ad reliquam, sic pondus totum ad reliquum. Quod erat probandum. Vel sic; si sit linea tota ad ablatam, ut numerus T ad A, & pondus totum ad ablatum, ut numerus τ ad α; sitq; eadem utrobiq; ratio; hoc est $T.A::\tau.\alpha$; adeoque permutando (quippe jam de numeris agitur) $T.\tau::A.\alpha$; ideoq; per pr. 19, $T.\tau::T-A.\tau-\alpha$. iterumq; permutando $T.T-A::\tau.\tau-\alpha$. Ergo & (quia ponuntur numeri illic lineis, hic ponderibus proportionales) ut linea tota ad residuam, sic & pondus totum ad residuum. Quod erat probandum. Atq; hoc pa-

cto

to licebit alternationem adhibere etiam in proportionalibus non homogeneis. Ubi nempe secundâ permutatione restituitur quod primâ deturbatum erat: aut etiam, si plures, modo item quartâ restituatur quod tertiâ deturbatur; & sic toties quoties. Hoc enim si caveatur, nihil absurdi sequitur in quantitatibus, utut heterogeneis, alternandis.

20. *Si sint tres quantitates, A, B, C; aliæ̨ ipsis numero æquales, α, β, γ; quæ binatim sumptæ sunt in eadem ratione,* (puta A . B :: α . C. & B . C :: C . γ.) *ex æquali* (δι' ἴσου) *autem prima major sit quam tertia; & quarta quam sexta major erit: Et si æqualis, æqualis: sin minor, minor.* Nam A . C :: α . γ. ut ostendemus ad prop. 22.

21. *Si sint tres quantitates, A, B, C; aliæ̨ ipsis numero æquales, α, C, γ; quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione; sit autem perturbata earum proportio* (puta A . B :: C . γ. & B . C :: α . C.) *sitq; ex æquali prima major quam tertia; erit & quarta quam sexta major: &, si æqualis, æqualis; sin minor, minor.* Nam & hic A . C :: α . γ. ut ostendemus prop. 23.

Sunt enim hæ duæ propositiones, Lemmata ad duas sequentes, quas cum nos sine harum ope demonstraturi simus, erunt eadem opera & hæ a fortiori demonstratæ. Quid autem significent illæ voces *ex æquali*, sive *ex æquo*, & *proportio perturbata*; ostenditur 17, 18, 19, def. 5.

Ex æqualitate ratio, (sive ex æquali, vel ex æquo, δι' ἴσου) est, *ubi plures sunt quantitates, sumptio extremorum per subtractionem mediorum*; sive, omissis mediis. 17 d. 5.

Ordinata proportio (τεταγμένη ἀναλογία) *est, quando est ut antecedens ad consequentem, sic antecedens ad consequentem; ut autem consequens ad aliam quampiam, sic consequens ad aliam quampiam.* 18 d 5. Cujus exemplum habemus per 20, & 22.

Perturbata vero proportio (τεταραγμένη ἀναλογία) *est, quando, cum tres sint quantitates aliæ̨ illis numero æquales, est, ut in primis quantitatibus antecedens ad consequentem, ita in secundis quantitatibus antecedens ad consequentem; ut autem in primis quantitatibus consequens ad aliam quampiam, ita in secundis alia quæpiam ad antecedentem.* 19 d 5. Cujus exemplum habetur prop. 21, & 23. Vel sic; si ut in primoribus prima ad secundam, sic in alteris secunda ad tertiam; ut autem in primoribus secunda ad tertiam, sic in alteris prima ad secundam.

22 *Si sint quotcunq; quantitates* A, B, C, &c. *aliæq; ipsis numero æquales,* α, β, γ, &c. *quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione,* (puta A . B :: α . β, & B . C :: β . γ. &c.) *& ex æquali in eadem ratione erunt;* Nempe A . C :: α . γ. Nam quia $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$ & $\frac{B}{C} = \frac{\beta}{\gamma}$ erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \left(= \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\gamma} \left(= \frac{\alpha\beta}{\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \right)$ adeoque A . C :: α . γ. Et similiter quotcunque fuerint utrobique quantitates. Habetur autem hîc exsemplum rationis compositæ; ut & prop. sequente.

23 *Si sint tres quantitates* A, B, C, &c. *aliæq; ipsis numero æquales* α, β, γ; *quæ binatim sumptæ sint in eadem ratione, sit autem perturbata earum proportio;* (nempe A . B :: β . γ. & B . C :: α . β.) *& ex æquali in eadem ratione erunt.* Nempe A . C :: α . γ. Nam quia $\frac{A}{B} = \frac{\beta}{\gamma}$, & $\frac{B}{C} = \frac{\alpha}{\beta}$; erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \left(= \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C} \right) = \frac{\beta}{\gamma} \times \frac{\alpha}{\beta} \left(= \frac{\beta\alpha}{\gamma\beta} = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \right)$ adeoq; A . C :: α . γ.

24 *Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam;* A . α :: B . β: *quinta item ad secundam eandem habuerit rationem quam sexta ad quartam:* C . α :: D . β. *habebit etiam composita ex prima & quinta ad secundam, eandem rationem quam tertia cum sexta ad quartam.* A + C . α :: B + D . β. Nam si $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta}$, & $\frac{C}{\alpha} = \frac{D}{\beta}$: erit $\frac{A}{\alpha} + \frac{C}{\alpha} \left(= \frac{A+C}{\alpha} \right) = \frac{B}{\beta} + \frac{D}{\beta} \left(= \frac{B+D}{\beta} \cdot \right)$ adeoque A + C . α :: B + D . β. Vel sic, si opus, per lemma nostrum; Si A . α :: B . β. & C . α :: D . β. erit (tum Aβ = αB, tum Cβ = αD, ergo Aβ + Cβ = αB + αD, ideoque) A + C . α :: B + D. β. Estque hæc propositio, universalis ad prop. 2.

25 *Si quatuor magnitudines proportionales fuerint* A + B . α + β: A . α. (sitq; A + B omniũ maxima, adeoq; & α minima;) *maxima & minima reliquis duabus majores erunt.* (A + B + α > α + β + A.) Nam per prop. 19. A + B . α + β (:: A . α) :: B . β adeoque, ex hypothesi, B > β. Ideoque A + α + B > A + α + β.

Atque

Atque hactenus propositiones Euclidis tradidimus. Sequuntur aliæ quæ, a Clavio aliisque, his subjungi solent; eadem facilitate demonstrandæ: quæ & Euclidéis virtualiter contentæ videantur.

26 *Si prima* A *ad secundam* B, *majorem habuerit rationem, quam tertia* α *ad quartam* β; *habebit, invertendo, secunda ad primam minorem rationem quam quarta ad tertiam.* Nam quo major est ratio quævis, eo minor ipsius conversa. Vel sic. Quoniam $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$, esto per prop. 8. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{A}{B+E}$; ideoque invertendo $\frac{\zeta}{\alpha} = \frac{B+E}{A} > \frac{B}{A}$. vel $\frac{B}{A} < \frac{\beta}{\alpha}$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B} > \left(\frac{A}{B} =\right) \frac{\alpha}{\zeta}$; erit inverse $\frac{B}{A+E} < \left(\frac{B}{A} =\right) \frac{\zeta}{\alpha}$. per Cor. pr. 4.

27 *Si prima ad secundam, majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam; habebit vicissim prima ad tertiam, majorem rationem quam secunda ad quartam.* Nam si $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\zeta}$, esto $\frac{A}{B+E} = \frac{\alpha}{\zeta}$, ideoque, vicissim, $\frac{A}{\alpha} = \frac{B+E}{\beta} > \frac{B}{\zeta}$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B} > \left(\frac{A}{B} =\right) \frac{\alpha}{\zeta}$; erit alterne $\frac{A+E}{\alpha} > \left(\frac{A}{\alpha} =\right) \frac{B}{\zeta}$. per pr. 16.

28 *Si prima ad secundam, majorem habeat rationem, quam tertia ad quartam; habebit quoq; composita prima cum secunda ad secundam, majorem rationem, quam composita tertia cum quarta ad quartam.* Nam si $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\zeta}$, erit quoque $\left(\frac{A}{B} + 1 > \frac{\alpha}{\zeta} + 1\right.$, hoc est $\left.\right) \frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\zeta}{\zeta}$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B} > \left(\frac{A}{B} =\right) \frac{\alpha}{\zeta}$; erit componendo $\frac{A+E+B}{B} > \left(\frac{A+B}{B} =\right) \frac{\alpha+\zeta}{\zeta}$. per pr. 18.

29 *Si composita prima cum secunda, ad secundam, majorem habeat rationem, quam composita tertia cum quarta, ad quartam; habebit quoq; dividendo prima ad secundam, majorem rationem, quam tertia ad quartam.*

Nam

Nam si $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\zeta}{\zeta}$, (hoc est $\frac{A}{B}+1, > \frac{\alpha}{\beta}+1$;) erit quoque $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\zeta}$. Vel sic; Si $\frac{A+E+B}{B} > \left(\frac{A+B}{B}=\right) \frac{\alpha+\zeta}{\zeta}$; erit dividendo $\frac{A+E}{B} > \left(\frac{A}{B}=\right)\frac{\alpha}{\beta}$. per pr. 17.

30 *Si composita prima cum secunda, ad secundam, majorem rationem habeat, quam composita tertia cum quarta, ad quartam; habebit, per conversionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem rationem quam tertia cum quarta, ad tertiam.* Nam si $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\beta}{\beta}$, adeóque dividendo (ut prop. præced.) $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\zeta}$; erit inverse (per pr. 26.) $\frac{B}{A} < \frac{\zeta}{\alpha}$, & componendo (ut prop. 28.) $\frac{A+B}{A} < \frac{\alpha+\zeta}{\alpha}$.

31 *Si sint tres quantitates* A, B, C; *aliæ ipsis numero æquales* α, β, γ; *sitq; major ratio primæ priorum ad secundam, quam primæ posteriorum ad secundam; item secundæ priorum ad tertiam* (sive æqualis, sive) *major quam secundæ posteriorum ad tertiam; erit quoq; ex æqualitate major ratio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.* Nam si $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\zeta}$, & $\frac{B}{C} \geq \frac{\zeta}{\gamma}$; erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \left(= \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C}\right) > \left(\frac{\alpha}{\zeta} \times \frac{B}{C} \geq\right) \frac{\alpha}{\zeta} \times \frac{\zeta}{\gamma} \left(= \frac{\alpha\zeta}{\zeta\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}.\right)$ Hoc est $\frac{A}{C} > \frac{\alpha}{\gamma}$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B} > \left(\frac{A}{B}=\right)\frac{\alpha}{\zeta}$, & $\frac{B}{C} = \frac{\zeta}{\gamma}$; erit ex æquali, $\frac{A+E}{C} > \left(\frac{A}{C}=\right)\frac{\alpha}{\gamma}$. per pr. 22.

32

32 *Si sint tres quantitates* A, B, C; *aliæ totidem ipsis numero æquales* α, β, γ. *Sitq; major ratio primæ priorum ad secundam, quam secundæ posteriorum ad tertiam; item secundæ priorum ad tertiam (sive æqualis, sive) major quam primæ posteriorum ad secundam: erit quoque ex æqualitate major ratio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.* Nam, si $\frac{A}{B} \rhd \frac{\beta}{\gamma}$, & $\frac{B}{C} \trianglerighteq \frac{\alpha}{\beta}$; erit $\frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \left(= \frac{AB}{BC} = \frac{A}{C}\right) \rhd \left(\frac{\beta}{\gamma} \times \frac{B}{C} \trianglerighteq\right) \frac{\beta}{\gamma} \times \frac{\alpha}{\beta} \left(= \frac{\beta\alpha}{\gamma\beta} = \frac{\alpha}{\gamma}\right.$. Vel sic; Si $\frac{A+E}{B} \rhd \left(\frac{A}{B} =\right) \frac{\beta}{\gamma}$, & $\frac{B}{G} \trianglerighteq \frac{\alpha}{\beta}$, erit ex æquali, $\frac{A+E}{C} \rhd \left(\frac{A}{C} =\right) \frac{\alpha}{\gamma}$, per pr. 23.

33 *Si sit major ratio totius ad totam, quam ablatæ ad ablatam; erit & reliquæ ad reliquam major ratio quam totius ad totam.* Nam si $\frac{A+B}{\alpha+\beta} \rhd \frac{B}{\beta}$, erit permutando (per pr. 27.) $\frac{A+B}{B} \rhd \frac{\alpha+\beta}{\beta}$, & per conversionem rationis, (pr. 30.) $\frac{A+B}{A} \lhd \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ iterumque permutando, $\frac{A+B}{\alpha+\beta} \lhd \frac{A}{\alpha}$, vel $\frac{A}{\alpha} \rhd \frac{A+B}{\alpha+\beta}$. Vel sic; Quoniam $\frac{A+B}{\alpha+\beta} \rhd \frac{B}{\beta}$ adeoque $\frac{A+B}{B} \rhd \frac{\alpha+\beta}{\beta}$ & $\frac{A}{B} \rhd \frac{\alpha}{\beta}$, adeoque $\frac{B}{A} \lhd \frac{\beta}{\alpha}$ erit quoque $\frac{A+B}{A} \lhd \frac{\alpha+\beta}{\alpha}$, & $\frac{A+B}{\alpha+\beta} \lhd \frac{A}{\alpha}$. Vel sic; Si $\frac{A+E+B}{\alpha+\beta} \left(= \frac{A+B}{\alpha+\beta} + \frac{E}{\alpha+\beta}\right) \rhd \left(\frac{A+B}{\alpha+\beta} =\right) \frac{B}{\beta} \left(= \frac{A}{\alpha}\right.$. per prop. 19.) Erit $\frac{A+E}{\alpha} \left(= \frac{A}{\alpha} + \frac{E}{\alpha} = \frac{A+B}{\alpha+\beta} + \frac{E}{\alpha}\right) \rhd \left(\frac{A+B}{\alpha+\beta} + \frac{E}{\alpha+\beta}\right.$ per prop. 8. $=\left.\right) \frac{A+E+B}{\alpha+\beta}$.

Superest adhuc apud Clavium, alia propositio, quæ quorsum hic loci inferatur, ego plane non video; Cum tamen illic reperiam, etiam & hic apponam.

34 *Si ſint quotcunq; quantitates*, A, B, C, &c. *aliæq; ipſis numero æquales*, α, β, γ, &c; *ſitq; major ratio primæ priorum ad primam poſteriorum, quam ſecundæ ad ſecundam, & hæc major quam tertiæ ad tertiam, & ſic deinceps:* $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta} > \frac{C}{\gamma}$ &c. *Habebunt omnes priores ſimul, ad omnes poſteriores ſimul, majorem rationem quam omnes priores relicta prima, ad omnes poſteriores relicta prima; Minorem autem quam prima priorum ad primam poſteriorum; Majorem denique etiam, quam ultima priorum ad ultimam poſteriorum.*

Sunto primum utrinque duæ, A, B, & α, β. Quoniam igitur $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta}$, adeoque permutando $\frac{A}{B} > \frac{\alpha}{\beta}$, & componendo $\frac{A+B}{B} > \frac{\alpha+\beta}{\beta}$; Erit, permutando, & per prop. 33. $\frac{A+B}{\alpha+\beta} \left(> \frac{B}{\beta} \right) < \frac{A}{\alpha}$. Quæ erant probanda. Et ſimiliter probandum erit $\frac{B+C}{\beta+\gamma} \left(> \frac{C}{\gamma} \right) < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$. Item $\frac{C+D}{\gamma+\delta} \left(> \frac{D}{\delta} \right) < \frac{C}{\gamma} < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$: Et ſic ubivis.

Secundo, ponantur utrinque tres, $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta} > \frac{C}{\gamma}$. Quoniam per membrum primum $\frac{A}{\alpha} \left(> \frac{B}{\beta} \right) > \frac{B+C}{\beta+\gamma}$, erit permutando $\frac{A}{B+C} > \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, & componendo $\frac{A+B+C}{B+C} > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma}$, iterumque permutando, & per membrum primum, & per pr. 33. Erit $\frac{A+B+C}{\alpha+\beta+\gamma} \left(> \frac{B+C}{\beta+\gamma} > \frac{C}{\gamma} \right) < \frac{A}{\alpha}$. quæ erant demonſtranda. Et ſimiliter probabitur $\frac{B+C+D}{\beta+\gamma+\delta} \left(> \frac{C+D}{\gamma+\delta} > \frac{D}{\delta} \right) < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$:

Eodem

Eodem modo, positis utrobiq; quatuor, $\frac{A}{\alpha} > \frac{B}{\beta} > \frac{C}{\gamma} > \frac{D}{\delta}$. Erit per membrum præcedens, $\frac{A}{\alpha} \left(> \frac{B}{\beta} \right) > \frac{B+C+D}{\beta+\gamma+\delta}$. ideoq; (permutando, & componendo, iterumq; permutando, &c. ut prius,) $\frac{A+B+C+D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \left(> \frac{B+C+D}{\beta+\gamma+\delta} > \frac{C+D}{\gamma+\delta} > \frac{D}{\delta} \right) < \frac{A}{\alpha}$. Quæ erant probanda. Et similiter $\frac{B+C+D+E}{\beta+\gamma+\delta+\varepsilon} \left(> \frac{C+D+E}{\gamma+\delta+\varepsilon} > \frac{D+E}{\delta+\varepsilon} > \frac{E}{\varepsilon} \right) < \frac{B}{\beta} < \frac{A}{\alpha}$:

Et pari modo, positis utrobiq;, quinq; sex, septem, &c. demonstratio gradatim procedet. Constat itaq; propositum.

Atque hactenus Euclidis Elementum quintum, cum propositionibus adjunctis, exposuimus: succincte quidem, sed nec propterea minus dilucide.

Si quem interim male habeat, quod in demonstrationibus non raro, ea quæ ad Fractionum Divisionem, Multiplicationem &c. attinent, adhibuerim; quarum doctrinam nondum ex professo tradiderim: Poterit ille totum hoc caput, cum sequente, Fractionum tractationi postponere, vel saltem quasi essent postposita reputare. Quanquam revera vix quicquam eorum hic assumitur, quod non & in superioribus exponitur; præsertim ubi de Fractionum notatione dictum est, & de Multiplicatione Divisioneq; Algebrica sive Speciosa.

CAP. XXXVI.

Elementi Quinti Synopsis.

QUod præcedente Capite fusius traditum est, in brevem Synopsin redigemus.

Ubi $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$, ibi A, B :: α. β. Definitio.

$$\text{Ergo}\begin{cases} \left.\begin{array}{l} A : B :: \alpha(=A) . B. \\ A . B :: A . \beta(=B). \end{array}\right\} \text{prop. 7. 9.} \\ \left.\begin{array}{l} A . B \\ :: \\ \alpha . \beta \end{array}\right\} \begin{array}{l} > \\ :: \\ < \end{array} \left\{ C . D \right. . \text{ prop. 11. 13.} \\ A . B :: RA . RB . \text{ prop. 15.} \end{cases}$$

Item $\frac{A+E}{B} > \frac{A}{B}$ Et $\frac{A}{B+E} < \frac{A}{B}$. prop. 8. 10.

Suntque hæ propositiones, Intellectui satis obviæ, Sequuntur aliæ.

$$\text{Si } A . B :: \alpha . \beta .$$

$$\text{Erit}\begin{cases} A \times \beta = B \times \alpha . & \text{Lemma.} \\ B : A :: \beta . \alpha . & \text{Cor. pr. 4.} \\ A . \alpha :: B . \beta . & \text{pr. 14. 16.} \\ \left.\begin{array}{l} RA . B :: R\alpha . \beta . \\ A . \varrho B :: \alpha . \varrho\beta . \\ RA . \varrho B :: R\alpha . \varrho\beta . \end{array}\right\} \text{prop. 3. 4.} \\ A : B :: \left\{\begin{array}{l} A \pm \alpha . B \pm \beta . \\ RA \pm \varrho\alpha : RB \pm \varrho\beta . \end{array}\right\} \text{prop. 1. 5. 12. 19.} \\ \left.\begin{array}{l} A \pm B . \left\{\begin{array}{l} B \\ A \end{array}\right\} :: \alpha \pm \beta : \left\{\begin{array}{l} \beta . \\ \alpha . \end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right\} : A \pm B :: \left\{\begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array}\right\} : \alpha \pm \beta . \\ MA \pm RB . \left\{\begin{array}{l} \varrho A \\ \varrho B \end{array}\right\} :: M\alpha \pm RB . \left\{\begin{array}{l} \varrho\alpha : \\ \varrho\beta . \end{array}\right. \\ \left.\begin{array}{l} \varrho A \\ \varrho B \end{array}\right\} . MA \pm RB :: \left\{\begin{array}{l} \varrho\alpha \\ \varrho\beta \end{array}\right\} . M\alpha \pm RB . \end{array}\right\} \text{pr. 17. 18. cor. pr. 19.} \end{cases}$$

Suntq; & hæ propositiones, earumque conversæ, vel per se satis

satis obviæ, vel per Lemma nostrum facile demonstrantur; adeoque si de harum analogiarum una quavis constiterit, constabit & deomnibus. Sequuntur aliæ.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \left\{\begin{matrix} A \\ C \end{matrix}\right\} . \; B :: \left\{\begin{matrix} \alpha \\ \gamma \end{matrix}\right\} . \; \beta \; . \\ \text{Erit } A \pm C . \; B :: \alpha \pm \gamma : \beta \; . \end{array}\right\} \text{prop. 2.24.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \left\{\begin{matrix} A \pm C \\ A \end{matrix}\right\} . \; B :: \left\{\begin{matrix} \alpha \pm \gamma \\ \alpha \end{matrix}\right\} . \; \beta \; . \\ \text{Erit } C . \; B :: \gamma . \; \beta \; . \end{array}\right\} \text{prop. 6.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } A \pm \alpha . \; B \pm \beta :: A . \; B \; . \\ \text{Erit } A \pm \alpha . \; B \pm \beta \; (:: A . B) :: \alpha . \; \beta \; . \end{array}\right\} \text{pr. 5.19.}$$

$$\text{Si } A . \; B . \; C : \alpha . \; \beta . \; \gamma \; :$$

$$\text{Vel } A : \; B . \; C : \alpha . \; \beta . \; \gamma \; :$$

$$\text{Erit } A : \; C :: \alpha : \gamma \; . \text{pr. 20.21.22.23.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Si maxima } A , B :: \alpha , \beta . \text{ minim.} \\ \text{Erit } A + \beta > B . \; \alpha . \text{ prop. 25.} \end{array}$$

Harum item propositionum demonstrationes, vel ex superiore

riore Lemmate, vel aliunde, ſunt ſatis obviæ, vel ſaltem ex ſupra traditis illarum expoſitionibus peti poſſunt. Adeoque Euclidis Elementum quintum, compendio traditum eſt; locis interim aliquammultis locupletatum.

Quæ ſequuntur, apud interpretes, propoſitiones de non-proportionalibus; ad alias ab Euclide traditas facile reducuntur, in quibus quaſi virtualiter continentur. Puta prop. 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33. In Cor. pr. 4 Pr. 16, 17, 18, 19, 22, 23. Cor. pr. 19. ut cap. præced. oſtenſum eſt.

De Marci Meibomii Dialogo, Monitio.

De Meibomii Dialogo. Ubi hactenus perveneram, incidi in *Marci Meibomii, De Proportionibus Dialogum*; anno ſuperiori editum. Quo, novam de Proportionibus doctrinam ſpondet: Atque tum *Pythagoram, Eudoxum, Euclidem, & quotquot unquam Pythagorici floruere*; tum *Archimedem, Apollonium, Pappum*; *Theonem* item, atque *Eutocium*; *Commandinum* deniq; & *Clavium, omniumq; juniorum Mathematicorum filios*; ſive, ſummatim, tum *totam antiquitatem*, tum *recentiores omnes*; ſive, *totam Mathematicorum cohortem ad noſtra uſque tempora*; *hallucinatos eſſe*, contendit: *Nec tantum ignoraſſe authores illos, quid ſit rationum compoſitio; ſed &, quid ſit ratio*: quodque *ipſe primus, omnem eruditam vetuſtatem, ingenti molimine, ſuperaverit*; *Pluraq;* tradiderit, *quam ab ullo Geometra exſpectari poſſe, putandum erat.* Quippe *is præcipuus*, inquit, *narrationis ſcopus eſt, ut totam antiquitatem ignoratæ in quibuſdam Elementis Geometriæ convincat*; *deinde autem juniorum pravas explicationes, & monſtroſas hallucinationes demonſtret.* Cum enim, tum veteres, *Pythagoras, Eudoxus, &c. ad rei veritatem non omnino penetrarint*; tum, *quæ veteres recte docuerant, ſiniſtra recentiorum interpretatione ſint depravata*: *Itaque*, inquit, *& recentiores omnes reprehendam*; *qui antiquos non intellexerunt*: *& antiquos corrigam*; *qui male quædam prodiderunt*: *utroſq; inſuper non doctturus.*

Ejuſdem ſumma. Totius autem novæ doctrinæ ſuæ, hoc eſt, erratorum ſuorum, originem, qui examinat, hanc eſſe deprehendet; quod inter λόγον διπλάσιον, & λόγον διπλασίονα; ſive, (ut loquuntur interpretes) inter *rationem duplam*, & *duplicatam*; vel neſciat, vel nolit, diſtinguere. Quæ cum ille pro eodem habere velit; tum ſeparanda perperam commiſcet; tum, quæ ab authoribus de utriſque vere tradita ſunt, quaſi inter ſe pugnantia committit. Adeoque Theonem, alioſque, graviter culpat, quod putaverint

tripli

tripli duplum esse sextuplum: Dum ille, *tripli duplum, nonuplum esse*, contendit; quia nempe, rationis triplæ, ratio duplicata, est, nonupla.

Deinde; cum ratio $\frac{1}{4}$, rationis $\frac{1}{2}$, sit *ratio duplicata*; quam ille pro eodem habet atque *rationem duplam*; nec interim dubitaverit; quin dupla sit major, quam simpla: statuit, *rationem* 1 *ad* 4, *majorem esse quam* 1 *ad* 2.

Adeoque rationem illam *majorem* esse vult, non quam definit Euclides, 8 *d* 5. sed, quæ ab æqualitate magis recedit; sive, ut loquitur ille, *cujus termini longius inter se distant*. (Quasi quidem, idem esset *Ratio*, atq; *Inæqualitas*.) Ipsamque *Æqualitatis* rationem, *Rationem nihili* appellat; utpote ubi nulla est Inæqualitas.

Et propterea *Prop.* 8. & 10. e 5. (& quæ inde dependent omnes) falsas esse contendit; quod per eas, dicenda esset ratio $\frac{1}{2}$, major quam ratio $\frac{1}{4}$. Adeoque & 8 def 5. (cui innituntur) falsam esse.

Rationes autem $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{2}$, item $\frac{4}{3}$ & $\frac{1}{4}$, (atque de aliis pariter,) æquales invicem dicendas vult: Tum; quod idem sit intervallum inter 1 & 2, atque inter 2 & 1; adeoque, secundum illum, eadem ratio: Tum quod utraque, ab æqualitatis ratione æque recedat. Sicuti enim $+1$ & -1 (si ipsi credamus) sunt inter se æquales; quia uterque ab 0, seu nihilo, (numeri omnis initio,) æqualiter distat: ita & ratio $\frac{2}{1}$ & $\frac{1}{2}$ æquales erunt dicendæ; cum utraque ab æqualitatis (sive nihili) ratione $\frac{1}{2}$, æque recedat.

Estque hæc totius novæ suæ doctrinæ summa; breviter quidem, sed fideliter recensita; & magis forsan perspicuè quam ipse vellet. Cujus quidem ego refutationem, putassem, primo, hic loci inseruisse; tum quod hanc novam suam doctrinam non antea viderim, quam præcedentia descripta fuerant, & prope omnia jam impressa; tum, quod locus hic sit satis opportunus. Cum vero refutationem, quam, currente prelo, paravi, prolixiorem videam, quam ut uno capiti inseratur; totumq; hoc de proportionibus negotium jam supra satis dilucide tradatur, ut, qui a nobis tradita intelligat, non admodum solicitus sit futurus de nova ipsius traditione: Lectorem hic nimia digressione detinendum non censui. Adeoque Refutationem illam seorsim potius, vel, si opus sit, huic tractatui subjungendam reliqui. Ut

sicui

ſicui videatur illius nova doctrina quicquam in ſe habere ponderis; videre poſſit, & quid nobis illi reponendum eſſe duximus.

Refutatio brevis. Interim vero dicimus 1°. Λόγον διπλάσιον, aliud plane eſſe quam Λόγον διπλασίονα, ut ſupra oſtenſum eſt; &, quid inter ſe diſtent. 2°. Λόγον διπλάσιον, rationem duplam, ſimplâ majorem eſſe, agnoſcimus: ſed non ita ſemper λόγον διπλασίονα· (quippe quoties expoſita ratio, ſeu radix, ſupponitur minor quam 1 vel $\frac{1}{1}$; ratio duplicata, triplicata, &c; hoc eſt, quadratum, Cubus, &c. perpetuo decreſcunt.) 3° Adeoque non inde ſequi dicimus, rationem $\frac{1}{2}$ majorem eſſe quam $\frac{1}{3}$, utut illa ſit hujus duplicata. adeoque tum 8 *d* 5, tum 8 & 10 *e* 5, (tum quæ hinc dependent,) ſatis conſtare. 4°. Æqualitatis rationem $\frac{1}{1}$, non rationem *nihili* dicendam eſſe, ſed ſimplam. quippe, ut, ubi terminus antecedens conſequentem bis continet, duplus dicitur; ubi ter, triplus, &c; ita, ubi ſemel, ſimplus dicendus eſt: adeoque $\frac{1}{1}$ ratio ſimpla. 5°. Negamus item, tum + 1 & − 1, eſſe æquales numeros; tum $\frac{1}{1}$ & $\frac{1}{2}$ æquales eſſe rationes. quippe + 1, binario major eſt quam − 1, (nam + 1 = − 1 + 2) & ratio $\frac{1}{1}$ eſt rationis $\frac{1}{2}$ (non inquam, quadruplicata, ſed) quadrupla: nempe $\frac{1}{1} = 4 \times \frac{1}{2}$. 6° Negamus item, *Rationem* tantundem eſſe atq; *Inæqualitatem*, (quippe & æqualium ad invicem eſt ratio, non minus quam inæqualium:) Aut etiam idem atq; *Intervallum*. Uti enim, in ratione, ut loquuntur, Arithmetica; eadem eſt Differentia (quæ ſubductionem ſpectet) inter 5 & 3, atque inter 3 & 5; non autem eadem ratio Arithmetica, 5 ad 3, & 3 ad 5; quippe illic, exceſſus binarii; hic, binarii Defectus: Ita, in ratione Geometrica, idem eſt intervallum (diviſione æſtimandum) inter 2 & 1, atque inter 1 & 2: non autem eadem ratio; ſed illic, dupla; hic, ſubdupla: ſive, illic innuitur duplo majus; hic, duplo minus. Et quidem, ut illic, licet eadem Differentia, non tamen idem Reſiduum; ſed 5 − 3 = + 2; 3 − 5 = − 2: ita & hic, licet idem Intervallum, non tamen idem Quotiens; ſed 1) 2 (2, 2) 1 ($\frac{1}{2}$. Neque magis ſequitur, Quoniam inter 2 & 1, atque 1 & 2, eſt idem intervallum, ergo & eadem Ratio, ſive Relatio: quam, Quoniam inter Patrem & Filium, atq; Filium & Patrem, eadem eſt diſtantia, Ergo & eadem Relatio. Et quidem, ut, Generatio, commune Fundamentum eſt tum Paternitatis, tum Filiationis

Filiationis, relationum ſibi mutuo oppoſitarum: Ita & Intervallum idem, eſt commune Fundamentum Rationis (quæ ipſa eſt Relatio) tum Duplæ tum Subduplæ; quæ interim ipſæ ſunt Rationes oppoſitæ, ſive Inverſæ. Sed de his hactenus.

CAP. XXXVII.

De Aurea Regula. Ejuſdem praxis & Demonſtratio. Exempla varia. Altitudinum per umbras menſuratio. Horæ diei, ſub diverſis meridianis, comparatio. Terminorum proportionalium præparatoria Reductio. Cautela, de non-proportionalibus. Gravium deſcenſus acceleratus. Effluentis aquæ vis langueſcens. Terminorum proportionalium ordinatio. Terminorum præparatio; per Diviſionem: per multiplicationem. Dubii, de quantitatibus Heterogeneis, ſolutio. Operationis probatio.

AD Proportionum doctrinam, (quam in ſuperioribus fuſius tradidimus,) ſpectat, quæ dicitur, *Aurea Regula*; ſive *Regula Trium* (Quæ ob inſignem ſuam, quam, in tota Matheſi, uſum habet, *Aurea* dici ſolet.) Qua nempe, *Terminorum quatuor proportionalium, datis Tribus, Quartus inveſtigatur.* *Aurea Regula.*

Si enim, *Tertius per ſecundum multiplicetur* (vel hic per illum,) *& productum dividatur per primum; Quotiens exhibebit Quartum quæſitum.* *Praxis.*

Sunto enim quatuor termini proportionales A. B:: α. β Datis A, B, α, prodibit $C = \frac{B\alpha}{A}$. Cum enim ſit, ex hypotheſi, A. B:: α. C. adeoque (invertendo) B. A:: C. α. hoc eſt. $\frac{B}{A} = \frac{\beta}{\alpha}$. Utrinque multiplicando in α, prodibit $\frac{B\alpha}{A} = \beta$. vel A) B α (C. *Demonſtratio.*

Vel item (ab origine) ſic, Quoniam eſt; ex hypotheſi, A. B:: α. C. hoc eſt $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$ multiplicando utrinque in Bβ, erit Aβ = Bα. Adeoque, dividendo utrinque per A, erit $\beta = \frac{B\alpha}{A}$.

Vel, ut tyronibus sit magis adhuc perspicuum, cum sit A. B :: α . β. hoc est (per def. proportionalium, sive, ejusdem rationis) $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$. Si æqualia æqualiter multiplicentur, prodibunt æqualia. Adeoq; si tum $\frac{A}{B}$, tum $\frac{\alpha}{\beta}$, ducantur in B; fiet, illic $\frac{A}{B} \times B = A$; hic, $\frac{\alpha}{\beta} \times B = \frac{B\alpha}{\beta}$: adeoque $A = \frac{B\alpha}{\beta}$. Iterumque, ductis utrisque in β; fiet, illic $A \times \beta = A\beta$; hic, $\frac{B\alpha}{\beta} \times \beta = B\alpha$: adeoque $A\beta = B\alpha$. (Hoc est; Ex quatuor proportionalibus, factum ab extremis æquatur facto a mediis: quod & superius aliquoties demonstravimus.) Denique, si æqualia æqualiter dividantur, orta erunt æqualia. Adeoque, si tum Aβ, tum Bα, dividatur per A; erit, illic A) Aβ (β; hic, A) Bα ($\frac{B\alpha}{A}$. adeoque $\beta = \frac{B\alpha}{A}$. quod erat demonstrandum.

Per hanc Regulam solvi solent hujusmodi Problemata.

Exempla. *Si 3 pondo mercium constant 5 solidos, quot solidos constabunt earundem mercium pondo 15.* Quoniam in questione supponitur, merces esse æque charas; erit, ut merx ad mercem, sic precium ad precium; Adeoque ut 3, numerus mercium emptarum; ad 15, numerum emendarum: ita 5 numerus pretii dati; ad numerum pretii quæsiti.

pondo. pondo. sol. sol.
Nempe 3 . 15 :: 5 . Q.

Vel, quia jam de numeris ubique agitur, erit, alternando, ut merx, ad pretium; sic merx, ad pretium. Nempe

pondo. sol. pondo sol.
3 . 5 :: 15 . Q.

Solvitur autem, juxta præsentem regulam, ducendo terminum secundum in tertium, (sive, quod perinde est, tertium in secundum,) unde fit 5 × 15 = 75: & dividendo per primum, 3) 75 (25 = Q. sive $\frac{75}{3} = 25 = Q$. Adeoq pretium quæsitum est, 25 solidorum.

15
5
3) 75 (25 = Q.

Item

Item, *Si 3 dierum ſtipendium, ſit 2 ſolidi; dierum 12 ſtipendium, quantum erit.* Hoc eſt 3d. 2s :: 12d. ♌s. Multiplicentur invicem 2 in 12, fiet 2 × 12 = 24. tum dividendo per 3, prodibit 3) 24 (8 = ♌. Dierum itaque 12, ſtipendium eſt 8 ſolidorum.

12
2
3) 24 (8 = ♌.

Pariter, *Si Argenti unciæ duæ valeant (in moneta Anglicana) decem ſolidos; quæritur, quanti valebunt unciæ duodecim, ſive una libra Argenti?* Solvitur, ut prius; inventoq; termino quarto ♌ = 60. Adeoq; una libra argenti valere deprehenditur 60 ſolidos Anglicanos, ſive tres libras monetæ.

2 . 10 :: 12 . ♌
10
2) 120 (60

Pariter, Sicui libeat *altitudinem Turris, in plano erectæ, per umbram æſtimare*; id ita fiat. Erigatur in eodem plano (vel ſaltem parallelo) palus ſeu baculum, notæ longitudinis A (puta pedum 6;) umbram ſplendente Sole projiciens, cujus menſura ſit B, (puta pedum 2.) Eodem tempore, menſuretur umbra Turris, quæ ſit β, (puta pedum 20.) & quæritur, Quanta ſit Turris altitudo? Quoniam itaq; in ſimili ſitu, umbræ ſint Altitudinibus proportionales; erit B, A :: β . α. hoc eſt 2 . 6 :: 20 . α. Et, facta operatione, invenitur α = 60 ped. Altitudo Turris.

Altitudinum per umbras menſuratio.

B . A :: β . α.
A
B) Aβ (Aβ/B = α.

2 . 6 :: 20 . ♌.
6
2) 120 (60 = ♌.

Similiter, Si quæratur. *Quota ſit hora Athenis, quando eſt, Oxoniæ, octava.* Præſciendum autem hic eſt, ex Geographia, Athenas magis ad Orientem poſitas, quam eſt Oxonia, gradibus (plus minus) triginta. Ideoque citius ad Athenarum Meridianum perventurus eſt Sol, quam ad noſtrum Oxoniæ. Quæritur autem, quanto citius? Hoc autem ut expediatur, ſciendum eſt inſuper, Solem horis (circiter) 24, integrum diurnum circulum transigere, & ad eundem unde abierat Meridianum redire. Ponuntur autem, in circulo integro, gradus 360. His poſitis, ſic inſtituitur Analogiſmus. *Si Sol, in horis 24, peragat gradus*

Horæ diei, ſub variis meridianis, comparatio.

360; *quot horis peragit gradus* 30? Adeoque, cùm eâdem æquabili celeritate motum, transigat spacia temporibus proportionalia; erit, ut gradus 360. ad gradus 30. : ita tempus horarum 24. ad tempus quæsitum, nempe horarum 2, ut ex adjuncta operatione constabit.

gr.	gr.		h.		h.	gr.		h.		gr.	h.
360 .	30	::	24 .	Q =	2.	360 .		24	::	30.	Q = 2.
			30					30			
	360)		720 (	2 =	Q	360)		720 (	2 =	Q.	

Horis itaque duabus (circiter) ad meridianum Atheniensem Sol citius pervenit, quam ad Oxoniensem; adeoque illorum meridies est, nostro, duabus horis prior. Nempe illic, meridies est, sive hora duodecima; dum hic, est decima. Adeoque illic hora decima, dum hic octava est.

Terminorum per Reductionem præparatio.

Si vero contingat, Homologos terminos, in quæstione propositos, non ejusdem (ut loquuntur) denominationis esse; reducendi prius erunt termini ad denominationem, prius procedat peculiaris hujusce regulæ praxis. Puta, Si proponatur hujusmodi quæstio; *Posito, quod tres unciæ argenti valeant quindecim solidos Anglicanos, quanti valebunt argenti pondo quatuor?* Cum hic quatuor supponantur termini proportionales, quorum duo, pondus respiciunt; reliqui duo, valorem; qui autem pondus respiciunt, non eandem sortiantur denominationem; sed de unciis, ille; hic, de libris seu pondo, pronunciat; Reducendi sunt hi duo termini ad eandem denominationem; priusquam instituatur praxis hac regulâ imperata. Adeoque; vel, pro 3 unciis, substituendum $\frac{1}{4}$ libræ; (quippe, cum libra contineant duodecim uncias, erunt, tres unciæ, libræ quadrans;) ut quæstio sic instituatur; *Ut* $\frac{1}{4}$ *libræ, ad* 4 *libras; sic* 15 *solidi, ad valorem quæsitum.* Vel, pro 4 libris, substituendum, 48 uncias; (quippe, cum libra contineat 12 uncias, 4 libræ continebunt $4 \times 12 = 48$ uncias,) ut quæstio sic instituatur; *Ut* 3 *unciæ, ad* 48 *uncias; sic* 15 *solidi, ad valorem quæsitum.* Utrovis modo, prodibit valor quæsitus, 240 solidorum; hoc est, 12 librarum monetæ Anglicanæ. ut ex operatione patet.

$\frac{1}{4}$. 4

$\frac{1}{4} . 4 :: 15 . Q.$ $3 . 48 :: 15 . Q.$

$\frac{1}{4})60(240 = Q$ $3)720(240 = Q.$

Quomodo autem hujusmodi instituendæ sint reductiones, superius ostensum est, ubi de Multiplicatione & Divisione verba fecimus: nec opus est hic repetere.

Verum hic cavendum est, nequando fraudi sit, indeque error suboriatur; quod ea tanquam proportionalia habeantur, quæ proportionalia non sunt. *Cautela de non proportionalibus.*

Exempli gratia; Si, *posito, quod pondus gravitate sua motum, duobus temporis momentis* 20 *pedes descendat; quæratur, quot pedes descensurum sit momentis* 10. Si fiat hic multiplicatio numeri tertii per secundum, atque producti divisio per primum, prodibit quartus 100. At ille numerus quæsito non satisfacit. Quamvis enim verum sit, pondus illud eadem velocitate motum, 100 pedes, 10 momentis, peracturum, qua, 20 pedes, 2 momentis peragebat; quia tribus datis 2 . 10 : : 20. quartus proportionalis est 100: attamen haud recte sic responsum iri dicimus; quia grave descendens, non æquabili procedit motu, sed motu accelerato; atque eo quidem celerius quo diutius fuerit in motu. Dico, *quo diutius fuerit in motu*, non autem, (quod vulgo aiunt Physici,) *quo sit centro propius.* Non enim propinquatio ad centrum, sed ab initio motus elongatio, seu potius continuatio motus, est causa auctæ celeritatis. Nam si grave demissum a puncto C, cadat ad punctum D; atque idem grave a puncto A demissum cadat item ad punctum D, (per lineam A B C D;) utroque casu transibit spacium C D, sed non eadem celeritate; segnius enim per illud spacium movebitur, si moveri, incipiat a puncto C, quam si motus, per spacium A C inchoatus, per reliquum C D continuetur. At vero spacium illud C D, eadem distantia abest a centro, sive ab A, sive a C, motus inchoetur.

Gravium descensus accelleratus.

t t p p
2 . 10 : : 20 . Q = 100

10
2)200(100 = Q.

Porro

Porro, si ponantur æqualia spacia, AB, BC, CD: Pondus per spacium AB jam delapsum, continuabit motum per spacium B C, majori velocitate, quam per spacium C D moveretur, si motum a puncto C inchoaverit. Propius tamen a centro abest spacium C D, quam B C: verum illud (B C) ab initio motus (a puncto A inchoati,) magis distat, quam ab initio motus (inchoati a C) distat spacium C D. Quæ omnia tum experienti erunt comprobata, tum ab iis tradita qui de motuum acceleratione acutissime scripserunt. Omnes itaq; rationes illæ, quæ apud Physicos passim occurrunt, de motus naturalis celeritate aucta, a propinquitate ad centrum ductæ, penitus evanescunt. Quippe non tam terminus ad quem, quam terminus a quo, in motuum acceleratione spectandus erit.

Effluentis aquæ vis languescens,

Idem peccabitur, si hujusmodi proponatur problema quasi hac regula solvendum; *Si vas* 12 *congiorum capax, aqua impleatur; atque, aperto in fundo foramine, exeant in duobus horæ minutis tres congii; quæratur autem, quanto tempore tota exibit aqua?* Proposita quippe quæstione, si 3 congii effluant in 2 minutis, 12 congii in quot minutis exibunt?

Respondendum esset, juxta hujusce regulæ tenorem, totam exitarum aquam minutis octo; quia 3 . 2 :: 12 . 8. Atque hoc quidem verum esset; modo aqua eadem pergat velocitate exire qua cœperat. At secus omnino se res habet. Siquidem continue decrescit exeuntis aquæ celeritas, & quo minus supereſt exhauriendum aquæ, eo segnius exit. Majore nempe & violentia & velocitate effluet aqua vase pleno, quam semipleno; quoniam aqua inferius exitura majore mole superioris aquæ premitur. (Non obstante, quod vulgo admitti solet; principio, *De gravi in loco suo*, hoc est, in rem vel æque vel magis gravem, *minime gravitante.*) Cui fidem facient ipsi oculi, si attendatur quanto majore vi & velocitate, ex dolio cervisiæ pleno, per eundem canalem, exeat cervisia, quam cum propemodum evacuatur.

3 . 2 :: 12 . Q

$$3\overline{)24}\,(8 = Q$$

Quibus autem gradibus vel crescit velocitas cadentis ponderis, vel decrescit velocitas per canalem exeuntis aquæ non hujus loci est inquirere. Sufficit impræsentiarum monuisse, hanc, quam præ manibus habemus, regulam, non nisi de quanti-

quãtitatibus vere proportionalibus procedere. Docet enim, *Datæ quantitati aliam in data ratione ponere.* Nempe quæritur quantitas quarta, quæ, ad tertiam datam, eandem habeat rationem, quam habet secunda ad primam; vel, ad quam tertia data, eandem habeat rationem, quam habet prima ad secundam.

Cavendũ porrò, ut datarum trium quantitatum, quælibet suo loco ponatur. Non enim promiscue quælibet in quolibet loco ponenda est, sed in suo singulæ. Neq; etiã illi semper priorem debetur, quæ in quæstione proposita, primo occurrit. Sæpe enim quæstio proposita variis ambagibus & involucris involvitur; quæ prius tollenda sunt, quã proportio rite constituta appareat: Ut in ea quã modo exposuimus de differentia meridianorũ Athenien sis & Oxonien sis. Sæpe etiam quæstio minus directe proponitur. Uti si exposita de Argenti valore quæstio, ita proponeretur, *Si 10 solidi Anglicani tantundem valeant atque 2 unciæ argenti; quanti valebunt unciæ 12?* Non enim hic 10, sed 2, est proportionis terminus primus; utut ille in quæstione primum audiatur.

De Proportionis rite ordinandis.

Ut igitur suo ponantur loco singuli termini; curandum est, ut quatuor quantitates (nempe tres datæ & quarta quæsita) ita disponantur ut prima supponatur eam habere rationem ad reliquarum alteram, quam habet reliqua ad quartam. Secus enim non erunt quatuor proportionales. Adeoque, in quæstione proxime exposita, primus terminus nec erit 10, nec 12. sed 2. Secundus autem, pro libitu, erit vel 10, vel 12. Nempe, Ut 2 unciæ, ad 10 solidos sic 12 unicæ, ad solidos quot? Nam ut numerus ponderis prioris, ad numerum valoris sui dati; sic supponitur numerus ponderis posterioris, ad valorem suũ quæsitum? Vel etiã, ut 2 unciæ, ad 12 uncias; Sic 10 solidi, ad solidos quot, Nam quæ ratio est ponderis ad pondus, ea supponitur & valoris ad valorem. Atque hæc de terminis ordinandis sufficiant.

$2^{unc}.10^{sol}::12^{unc}.Q^{sol}.$

$2^{unc}.12^{unc}::10^{sol}.Q^{sol}.$

Terminis ita rite ordinatis; perinde omnino est (quod & jam diximus) sive terminum tertium in secundum, sive hunc in illum ducamus. Non modo, quia (quod modo dictum est) perinde est utrum duorum secundo tertiove loco ponamus.

De praxios varietate.

Sed

Sed maxime, quic duorum invicem ducendorum, perinde eſt utrum duorum multiplicatorum eſſe faciamus, aut muliplicandum: quod de multiplicatione ſuperius univerſim dictum eſt.

Sed & perinde eſt, ſive Mutiplicationem, ſive Diviſionem, prius inſtituamus. Sive enim terminorum ſecundi tertiique invicem ductorum productum per primum dividamus; ſive mediorum (ſecundi & tertii) utrovis per primum diviſo, quotientem in reliquum ducamus; perinde omnino eſt: Idem enim utcunque prodibit terminus quartus. (quod & ſuperius de multiplicatione & Diviſione tradidimus univerſim: Nempe, quoties plures continue faciendæ ſunt multiplicationes & Diviſiones, perinde eſt quo ordine inſtituantur.) Nam ſi A. B :: α. C, erit omnino $\frac{B\alpha}{A} = \frac{\alpha B}{A} = \frac{B}{A}\alpha = \frac{\alpha}{A}B = C$. Vel, ſpeciatim in numeris ſi ſit verbi gratia, 3.9 :: 6. 18. erit $\frac{9\times 6}{3} = \frac{6\times 9}{3}\ (=\frac{54}{3}) = \frac{9}{3}\times 6\ (=3\times 6) = \frac{6}{3}\times 9\ (=2\times 9)$ $=18$. Adeoque cujusvis arbitrio permittitur, ut, pro re nata, eo ordine inſtituat operationes, quo magis pro hic & nunc (ut loquuntur) videbitur accommodum.

Interim vero, in tradenda regula, nos (cum aliis) multiplicationem potius præpoſuimus, quà fractionum incommodum melius caveatur. Si enim verbi gratia, inſtituatur proportio 2. 5 :: 8. Q. velim autem ſecundum per primum dividere, prodibit 2)5 (2$\frac{1}{2}$, adeoque terminus tertius 8 per 2$\frac{1}{2}$, (numerum fractionis adjectione impeditum) multiplicandus: Si vero mediorum productum $5\times 8 = 40$, dividam per primum, 2)40(20, prodibit utrobique numerus integer; eodem autem ſucceſſu, (utut minori labore,) nam tum $8\times 2\frac{1}{2} = 20$, tum $\frac{42}{2} = 20 = Q$. Item ſi inſtituatur proportio 2. 5 :: 7. Q. Et velim ſecundum per primum dividere, 2)5(2$\frac{1}{2}$, adeoque multiplicare $7\times 2\frac{1}{2}$; vel etiam tertium per primum dividere, 2)7(3$\frac{1}{2}$, adeoque mutiplicare $5\times 3\frac{1}{2}$: operatio utrovis modo impeditior erit, quam ſi prius multiplicatis mediis, $5\times 7 = 35$, fiat tandem diviſio per primum 2)35(17$\frac{1}{2}$. Quamvis enim & hic tandem prodeat fractio, tamen quæ ulteriorem difficultatem non procreabit; quippe

quippe illic fistendum est, nec alia secutura operatio quæ per fractionis adjectionem reddatur perplexior. Si quando autem, jam ante peractas operationes, prospiciat quis mediorum alterum posse per primum ita dividi ut nulla superfit fractio; commodum erit divisionem illam præmittere; ita enim operationes minoribus numeris exercebuntur. Puta in analogia jam dicta 2.5::8.Q. commodum esse poterit, (non quidem secundum, sed) tertium, per primum dividere, 2)8(4; & quotientem in reliquum ducere, $4 \times 5 = 20 = Q$.

Terminorum præparatio, per Divisionem.

Nonnunquam item commodum erit, præcedaneâ terminorum expositorum diminutione, operationem expeditiorem reddere. Fit autem illud vel terminum primum & secundum, vel primum & tertium, ubi id fieri posse perspicitur, per communem divisorem dividendo; vel etiam eorum utrumque nonnunquam faciendo. Puta in proportione 6.9::8.Q. Si primum & secundum, per 3 dividamus; (eorumque loco quotientes substituamus;) habebitur proportio 2.3::8.Q. Sin primum & tertium dividamus per 2; prodibit 3.9.4.Q. Si denique utrumque fiat; puta tum primo primum & secundum dividamus per 3, tum primum (jam abbreviatum) & tertium per 2; prodibit 1.3::4.Q. Eodem ubique successu: Erit enim ubique terminus quartus quæsitus $Q = 12$.

2 3
6.9::8.Q = 12.

3 4
6.9::8.Q = 12.

1 3 4
6.9::8.Q = 12.

Similiter in speciebus, sive symbolis; Si exponatur

Analogismus	A B C. A D E:: B E F. Q.
substituatur	B C. D E:: B E F. Q.
vel etiam	A C. A D E:: E F. Q.
vel denique	C. D E:: E F. Q.

Idem etiam utcunque prodibit terminus quartus, vel qui tan-

tantundem valent; puta $\frac{ADE \times BEF}{ABC} = \frac{DE \times BEF}{BC} = \frac{ADE \times EF}{AC} = \frac{DE \times EF}{C} = DEqF = Q$. Et similiter alibi.

Per Multiplicationem.

Aliquando item, multiplicatione, fiet accommoda terminorum præparatio. Si nempe vel primus & secundus, vel primus & tertius, eodem communi multiplicatore multiplicentur; (vel etiam utrumque fiat:) quo pacto fractionum molestia facile evitatur. Puta si exponatur analogismus, $\frac{1}{2}.4::3.Q.$ commode substituamus vel primi & secundi, vel primi & tertii duplum; puta $5.8::3.Q.$ vel $5.4::6.Q.$ Item pro $3)\ \frac{1}{2}.\frac{2}{3}::\frac{1}{2}.Q.$ substituamus vel $\frac{1}{2}.2::\frac{1}{2}.Q.$ vel $\frac{1}{3}.\frac{2}{3}::1.Q.$ vel etiam $5.2::1.Q.$ Similiter in symbolis pro

Analogismo $\frac{Aq}{BC} . \frac{DE}{BF} :: \frac{GH}{CF} . Q.$

Substituamus (ductis primo & tertio in C) $\frac{A-q}{B} . \frac{DE}{BF} :: \frac{GH}{F} . Q.$

vel etiam, (ductis primo & 2° in B) $\frac{Aq}{C} . \frac{DE}{F} :: \frac{GH}{CF} . Q.$

vel potius (utroque facto) $\frac{Aq}{F} . \frac{DE}{F} :: \frac{CH}{F} . Q.$

vel (ductis item 1° & secundo in F) $\frac{AqF}{F} . DE :: \frac{GH}{F} . Q$

vel deniq; (ductis ad hùc primo & 3° in F) $AqFq . DE :: GH . Q = \frac{DEGH}{AqFq}$

Commune harum præparationum fundamentum est, quod Multiplorum ad æquimultipla, eadem est ratio atque simplorum ad simpla. Puta $3 \times 2 :: 4 \times 2 :: 3.4.$ Item $\frac{1}{2}.\frac{4}{2} :: 3.4.$ Item $3A.4A :: 3.4.$ Et $BA, CA :: B.C.$ $\frac{B}{A} . \frac{C}{A} :: B.C.$ Et similiter alibi.

Dubium, de Quantitatibus Heterogeneis.

Unus adhuc superest, qui nonnullùm morari possit, scrupulus. Nempe cum certùm sit analogias non raro institui inter quantitates heterogeneas, (puta ut linea A, ad lineam B; sic pondus α, ad pondus ζ;) quî possit una in alteram multiplicari, aut per eam dividi? item, quid sit, verbi gratia,

pondus

pondus α in lineam B multiplicare, aut per lineam A dividere? Quale enim factum illud erit cujus longitudo est Linea; latitudo pondus? aut qualis quotiens, ubi quæritur quoties pondus α contineat lineam A?

Dicimus itaque, non hic tam comparari lineam ad pondus; quæ quidem plane heterogeneæ sunt, nec invicem comparanda: sed rationem duarum inter se linearum, ad rationem duorum invicem ponderum: Quæ quidem rationes invicem homogeneæ sunt, puta dupla, tripla, sequi altera; sumpta nempe denominatione a quotiente antecedentis per consequentem divisæ. Est autem quotiens ille, ut superius traditum est, vel numerus, vel saltem in genere numeroso aliquid, ipsisque numeris homogeneum; puta numerus fractus, aut surdus, aut tale quid. Adeoque quum dicitur $A.B::\alpha.\beta.$ hoc tantum innuitur, rationem A ad B sive $\frac{A}{B}$, æqualem esse rationi α ad C, sive $\frac{\alpha}{\beta}$. Vel quod tantundem valet, quotientem quantitatis A per homogeneam B divisæ, æqualem esse quotienti quantitatis α per sibi homogeneam (utut prioribus heterogeneam) divisæ. Puta, si A sit linea bipedalis; B, pedalis; erit illa hujus dupla, sive ut 2 ad 1. Item, si α sit quadripondium; β, bipondium, erit illud hujus duplum, sive ut 2 ad 1. Quippe erit, tum B) A(2, tum β) α(2. Adeoque $\frac{A}{B} = \frac{\beta}{\alpha} = 2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ &c. Cum itaque nihil hic aliud spectetur, quam ratio, sive etiam quotiens: licebit, pro expositis quantitatibus, alias cujuscunque generis substituere, quæ in eadem sint ratione constitutæ, sive eundem quotientem exhibeant; utut expositis sint heterogeneæ. Arithmeticus itaque, quo operationes suæ rectius constent, pro expositis quantitatibus cujuscunque generis, quarum tantum ratio consideratur, numeros substituit (sive quod numeri instar est) in eadem ratione constitutos. Puta, pro lineis A, B, bipedali & pedali, binos quosvis in eadem ratione numeros, puta 2, 1; vel 4, 2; vel 6, 3; &c. quia utcunque $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{A}{B}$. Et, pro expositis, æqualia substituendo, quantitas non immutatur; sed utrobique tantundem est. Proinde itaq;

Ejusdem solutio.

est sive dicat, ut linea bipedalis A, ad pedalem B; sive, ut numerus 2 ad 1; sive ut 4 ad 2; &c. propter Quotientem, adeoque & Rationem, (quæ hic solum spectatur,) utrobique æqualem. Et quamvis, pro numeris his, nonnunquam & symbola iterum substituat vel etiam quæ linearum erant retineat; ea tamen quasi pro numeris habet, eaque numerorum instar tractat versatque. Nec tam lineas & pondera, quam numeros, in iisdem, cum lineis & ponderibus, rationibus, constitutos, se versare cogitat. Itaque in exemplo expositio, si A, B, supponantur significare 4, 2: (quia nempe $\frac{A}{B} = \frac{4}{2}$) manentibus interim si placet α, β, ut ponderum symbolis: tantundem erit dicere $A.B::\alpha.\beta$; atque $4.2::\alpha.\zeta$. Adeoque secundi & tertii rectangulum $B \times \alpha$, est $2 \times \alpha$, sive ponderis α duplum: Et $\frac{B \times \alpha}{A}$, est $\frac{2 \times \alpha}{4}$, sive istius dupl quadrans. At vero, pondus duplare, iterumque quadrifariam partiri, nihil absurdi sonat.

Vel etiam simplicius rem ita explicemus. Quoniam ponuntur tum A, B, tum α, β, quantitates utrobique homogeneæ, (utut hæ ad illæ heterogeneæ;) divisa quantitate B per A, quotiens erit numerus (sive quod numeri instar est) rationem denominans; puta $N = \frac{B}{A}$. Adeoque $\frac{B \times \alpha}{A}$, hoc est $\frac{B}{A} \times \alpha$, tantundem est atque $N \times \alpha$. Et propterea $\frac{B}{A} \times \alpha = \beta$ vel hoc $N \times \alpha = \beta$: significat quantitatem α (cujuscunque fuerit generis) ductum in N numerum quæ denominat rationem B ad A, (quantitatem autem quamlibet, per numerum multiplicari, nihil est absurdi,) æquabitur quantitati β: vel quod tantundem est, quantitatis α totuplum, quotuplum B est ad A, (vel etiam tantuplum quantuplum &c.) æquatur quantitati β.

Solent hic nonnulli Arithmetices practicæ Magistri, operationis hujus examen adjicere; ut nempe melius constet, si quod oriatur dubium, num probe peracta sit operatio. Potest autem id variis modis fieri.

Nonnulli sic instituunt. Ductis tum termino primo in quartum

quartum, tum secundo in tertium, si utrobique idem productum emergat, indicio est rem probe peractam esse. (Puta si propositis 3.5::9.Q. prodeat quartus Q = 15. Facto examine, reperietur 3 × 15 (= 45) = 5 × 9. adeoque 3.5::9.15. Proportionales esse, atque operationem recte institutam.) Nam si, quatuor terminorum, factum ex mediis æquetur facto ab extremis, sunt illi quatuor termini proportionales. Cujus Demonstratio superius aliquoties adducta est.

Vel sic. Si terminus quartus, modo inventus, jam fiat primus, atq; operatio inverse instituatur: Nempe ut qui quartus erat ad tertiũ, ita qui secundus erat, ad quæsitũ; factaq; operatione prodeat qui fuerat primus, recte processit operatio; sin minus, alicubi erratum est. Puta, si, ut prius, expositis 3.5::9.Q, & prodeat quartus Q = 45. adeoque 3.5::9.45. Examen instituo invertendo proportionem 45.9::5.Q. (Nam si quantitates sint proportionales, erunt & inverse proportionales; ut supra ostensum est.) Et quoniam, sic facta operatione, prodit quæsitus Q = 3, (qui prius fuerat terminus primus, jam autem quartus,) patet operationem recte peractam esse. Sed aliis hujusmodi multis modis institui potest hoc examen: Nec tamen tanti est ut plures recenseam.

Atque hactenus de *Aurea Regula* quæ dicitur *Directa*, dictum esto. De *Regula inversa* dicetur Capite sequente.

CAP. XXXVIII.

De Aurea Regula reciproca. Ejusdem a Directa, discrimen. Praxis, & Demonstratio. Quæstiones per hanc regulam solvendæ. De operationum compendiis & probationibus. Reductio hujus ad regulam Directam.

Regula aurea Inversa.

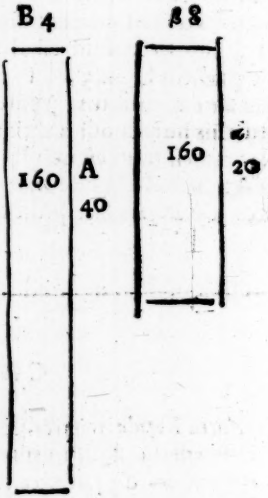
AUrea quæ dicitur *Regula inversa*, sive *Reciproca*, est ubi *expositis tribus quantitatibus quæritur quarta reciproce proportionalis.*

Quomodo a directa differt.

Differt autem a *Regula Directa*, quam præcedente capite exposuimus,

posuimus, quod ut illic spectatur æqualitas Rationum, vel Quotorum; ita hic, æqualitas Rectangulorum sive Factorum. Nempe illic, ut terminus primus ad secundum, sic tertius ad quartum quæsitum: adeoque idem emergit Quotiens tum ubi primus per secundum, tum tertius per quartum dividitur, (quod est æqualium sive earundem rationum genuinum & simplicissimum criterion.) Hic autem, rectangulum sive factum a primo in secundum ducto, æquatur Rectangulo sive Facto a tertio in quartum quæsitum ducto.

Exempli gratia *Si ager longus perticas* 40, *latus* 4, *contineat jugerum terræ*, (Acram, vulgo dicimus:) *quæritur, quam latus sit oportet, qui nonnisi* 20 *perticas longus est, ut eadem terræ quantitas habeatur?* Manifestum hic est, cum utrobique æqualis terræ quantitas spectetur, quæ ex latitudine & longitudine comparatis emergit; quò in altero longitudo major sit, eo minor sit latitudo necesse est, & contra; ut alterius defectum alterius excessus compleat. Adeoque, ut prioris longitudo ad latitudinem suam, sic posterioris longitudo (non directe, nam sic prodiret figura similis, non æqualis, sed) reciproce ad suam latitudinem. Sive, ut longitudo secundi ad longitudinem primi, sic primi latitudo ad latitudinem secundi. Nam hoc est, *reciproce proportionales esse*, per 2 *def.* 5. Adeoque si prioris longitudo ponatur A, latitudo B; secundi longitudo α, latitudo β: erit $A . \alpha :: \beta . B$, sive $\beta . B :: A . \alpha$. ut fit $A \times B = \alpha \times \beta$.



Ejus praxis. Hujusce Regulæ praxis hæc est. *Si, trium terminorum, quod fit ex primo in secundum ducto, dividatur per tertium, prodibit quartus reciproce proportionalis.* Adeoque, cum in exposito exsemplo, prioris agri

agri longitudo A, ducta in ſuam latitudinem B, faciat rectangulum AB; facta diviſione per α ſecundi longitudinem, prodibit hujus latitudo quæſita $\beta = \frac{AB}{\alpha}$. Vel, in numeris, cum prioris longitudo 40, ducta in latitudinem ſuam 4, fit $160 = 40 \times 4$. facta diviſione per datam ſecundi longitudinem 20, prodibit hujus latitudo $8 = \frac{160}{20}$. In hoc itaque differt praxis hæc, a praxi præcedentis regulæ, directæ; quod illic, terminus primus eſt diviſor; hic, tertius.

A
× B
α) A B (β

40
× 4
20) 160 (8

Demonſtratio praxeos hæc erit. Quoniam, ex hypotheſi, ponitur rectangulum primi in ſecundum, æquale rectangulo tertii in quartum; hoc eſt $A \times B = \alpha \times \beta$, ſive $AB = \alpha\beta$; erit utrinque dividendo per α, $\frac{AB}{\alpha} = \beta$. *Demonſtratio.*

Quæſtiones per hanc regulam ſolvendæ, ab iis quæ ſolvendæ ſunt per præcedentem; ſic diſtinguant Tyrones. Si, ex natura quæſtionis, quo major ſit terminus tertius, eo major requiratur quartus; regulæ directæ opus eſt: Sin, quo major tertius eo minor requiritur quartus, ſive quo minor tertius, eo major quartus, inverſæ regulæ opus erit. *Quæſtiones per hanc regulam ſolvendæ.*

Verbi gratia; *Si quis* 12 *horis conficiat milliaria* 20; *idem horis* 6, *quot conficiet.* Quoniam, hic manifeſtum eſt, longiori tempore plura conficienda milliaria; quo major eſt terminus tertius (numerus horarum) eo major erit & quartus, numerus milliarium quæſitus. Et propterea, per auream regulam directam, invenitur terminus quartus quæſitus, 10.

12 . 20 : : 6 . Q = 10.

6
12) 120 (10 = Q.

Contra vero; *Opus a viris* 12, *diebus* 20 *perficiendum*; *ſi aggrediantur viri* 6, *quot illi diebus hoc perficient?* Quoniam liquet, ex quæſtionis natura, pauciores viros nonniſi pluribus diebus idem opus confecturos; adeoque

12 . 20 : 6 . Q = 40

12
6) 240 (40 = Q

quo

quo minor eſt terminus tertius, (virorum numerus;) eo major futurus ſit terminus quartus, (numerus dierum requiſitus;) per regulam itaque inverſam, quærendus eſt terminus quartus, 40.

Eodem modo: *Si tapeti lato pedes 9, longo 20; abducendus pannus vilior, qui totum tegat, latus pedes 3; quæritur quot pedes longus eſſe debeat, ut negotio ſufficiat?* Quoniam hic manifeſtum ſit, quo minorem habeat latitudinem pannus hic, eo majorem requiri longitudinem, qua latitudinis defectus ſuppleatur: per regulam inverſam, reperietur longitudo quæſita, pedum 60. Atque in aliis pariter.

9 . 20 : 3 . Q = 60.

9

3) 180 (60 = Q

De operationum compendiis; & probationibus.

Quæ autem operationum compendia, de Regula directa, in Capite præcedente oſtendimus, (ſive quoad ordinem operationum perficiendarum, ſive etiam terminorum præcedaneam reductionem,) etiam hic, mutatis mutandis, locum habent. Nec opus eſt ut ea ſigillatim hic repetam; ſed potius ut lectoris ſagacitati permittatur, quæ illic dicta ſunt his aptare. Quod & de Probationibus illic traditis, intellectum velim; quas, qui tanti eſſe putet, etiam huc, mutatis mutandis, non difficulter transferat.

Reductio hujus Regulæ ad directam.

Notandum denique, *Proportionem Reciprocam, in Directam converſum iri, ſi qui in reciproca eſt terminus tertius, ſtatuatur in directa primus.* Nempe ſi ſit

In proportione reciproca 9 . 20 : 3 . Q = 60.

Erit in proportione directa 3 . 20 : : 9 . Q = 60.

Reciproce.	Directe.
9 . 20 : 3 . Q = 60.	3 . 20 : : 9 . Q = 60
9	9
3) 180 (60 = Q	3) 180 (60 = Q

Atque hactenus de Aurea Regula ſimplici; ſive Regula Trium; tam directa, quam Reciproca. Sequitur ut de Multiplici verba faciam; ubi nempe plures quam tres occurrunt termini, ipſaque Proportionis Regula ſæpius repetenda. Eſtque ea, vel,

vel, quæ vocatur *Aurea Regula compoſita*; vel quæ *Regula Societatis* dicitur. De quibus in ſequentibus Capitibus dicetur.

CAP. XXXIX.

De Aurea Regula compoſita. Tum ubi omnes Analogiæ componentes, ſunt directæ: tum ubi altera, vel etiam plures, ſunt reciprocæ.

Regula Aurea Compoſita.

Regula quæ dicitur *Aurea Compoſita*, ex duabus vel pluribus Analogiis conſtat. Adeoque Regulæ ſimplicis operationem aliquoties iterandam eſſe (ſaltem virtualiter) poſtulat. Iiſdem autem nititur principiis Regulæ compoſitæ, atq; ſimplicis proceſſus: ut non ſit opus longa præparatione, ſed exſemplis aliquot operandi methodum exhibere.

Eſto hoc Exſemplum. *Si 4 Academici, in 3 Menſibus, expendant 20 libras; quot libras expendent Academici 6, in menſibus 12, ſive anno integro?*

4. 20 :: 6.
3. 12. Q

Manifeſtum eſt, in hac quæſtione, duplicem Analogiam reperiri. Comparantur enim tum perſonæ perſonis, tum tempus tempori, ut ex utriſque collatis reperiatur ratio expenſarum.

Reſoluta itaque hac Analogia compoſitâ in duas ſimplices; Dicimus Primo, *Si 4 Academici, expendant 20 libras; quot libras expendent 6 Academici eodem tempore?* (Adeoque ſeponimus pauliſper diverſorum in quæſtione temporum conſiderationem.) Et, operatione peracta, patebit, 30 libras, a 6 Academicis, expendendas eodem tempore quo Academici 4 expendunt libras 20: hoc eſt, ex hypotheſi, in 3 menſibus.

4. 20 :: 6. q.
6
4) 120 (30 = q.

Deinde, (reſumpta jam temporis conſideratione) *Si ſex illi Academici expendant* (uti jam inventum eſt) *in 3 menſibus, 30 libras; quot libras expendent in menſibus 12?* (ubi terminus quartus

3. 30 :: 12. Q
30
3) 360 (120 = Q.

quartus, priori analogia inventus; fit, in secunda analogia, secundus: ut tandem habeatur terminus ultimo quærendus.) Facta itaque operatione, prodibit Q = 120, numerus quæsitus principalis.

Exposita itaque analogia composita resolvitur in has binas simplices.

4. 20 :: 6.
3 12. Q.

Idem autem omnino tandem prodiret, si prius temporis, deinde autem personarum collatio instituatur.

4. 20 :: 6. q.
3. q :: 12. Q.

Puta Primo, *Si* (quatuor expositi Academici) *expendant, mensibus* 3 *libras* 20; *iidem mensibus* 12 *expendent quot libras?* Respondendum, 80. Deinde, *si* (in tribus mensibus expositis) 4 *Academici expendant* (ut jam ex priori quæsito liquet) 80 *libras; quot libras* (eodem tempore) *expendent* 6? Respondendum (ut ex operatione peracta liquet) libras 120.

3. 20 :: 12. q = 80.
12
3) 240 (80 = q

4. q = 80 :: 6. Q = 130.
6
4) 480 (120 = Q

Resoluta nempe analogia composita; [Si 3 mensibus, 4 viri expendant libras 20; mensibus 12, viri 6, quot expendent?] in binas simplices; alteram de temporum, alteram de personarum, collatione.

Composita	Simplices.
3. 20 :: 12	3. 20 :: 12. q = 80.
4 6. Q.	4. q = 80 :: 6. Q = 120.

Totius processus ratio, ex se satis patet; cum non aliud sit quam operatio simplex bis peracta; nec nova indigebit demonstratione.

Praxis altera. Quod autem binis Aureæ Regulæ operationibus jam peractum est, *Potest id ipsum una operatione composita peragi: Si nempe utriusq; analogiæ simplicis primi termini invicem ducti, habeantur pro termino primo analogiæ compositæ: & similiter simplicium termini tertii,*

invicem

invicem ducti, pro tertio compositæ: terminus autem alter, quæsito homologus, pro secundo.

Verbi gratia; in exemplo prius expositio: *Si 4 viri, 3 mensibus, expendant libras 20; 6 viri, 12 mensibus, expendent quot libras?*

Pro termino primo analogiæ compositæ, sumatur $12 = 4 \times 3$, (nempe qui fit ex numero virorum primorum in numerum primorum mensium ducto;) pro tertio, $72 = 6 \times 12$, (qui fit ex numero secundorum virorum, in numerum suorum mensium ducto;) pro secundo autem, 20, numerus nempe librarum, hoc est, terminus quæsito homologus. Adeoque totus processus sic constabit

$$\begin{array}{l} 4.20 :: 6 \\ \times 3 \quad\quad \times 12. \ Q. \\ 12. \ 20 :: 72. \ Q = 120. \end{array}$$

$$12 \overline{)1440} \ (120 = Q$$

Similiter in Symbolis: *Si personæ P, tempore T, expendant libras L, personæ π, tempore τ, expendent quot?* puta λ, numerum quæsitum. Dico, erit ut PT (= P×T) ad L; sic πτ (= π×τ) ad λ, numerum quæsitum. Nempe PT) πτ×L (λ. Processus hic erit.

$$\begin{array}{l} P.L :: \pi \\ \times T \quad\quad \times \tau. \lambda. \\ PT.L :: \pi\tau. \lambda = \frac{\pi\tau \times L}{PT}. \end{array}$$

$$PT) \overline{\pi\tau \times L} \ \left(\frac{\pi\tau}{PT} L = \lambda. \right.$$

Operationis hujus compositæ Ratio, sive Demonstratio, dependet ab ejusdem cum præcedente convenientia. Cum enim, ut supra ostensum est, Analogia composita, resolvitur in binas simplices

Ejusdem demonstratio.

$$\begin{array}{ll} P.L :: \pi & P.L :: \pi.q. \\ T \quad \tau.\lambda & T.q :: \tau.\lambda. \end{array}$$

Erit primo $q = \frac{\pi \times L}{P}$. Adeoque 2°, $\lambda = \frac{\tau \times q}{T} = \frac{\tau \times \pi L}{T \times P}$ $= \frac{\pi \tau L}{PT}$. quod erat demonſtrandum.

Eodem plane modo ſtatuendum eſt, ſi exponatur Analogia etiam adhuc magis compoſita. Puta *Si trabis ligneæ, cujus longitudo, pedum* 4 = A; *latitudo, pedum* 3 = B; *altitudo, pedum* 2 = C; *pondus ſit librarum* 240 = D: *trabs alia longa pedes* 10 = α; *lata, pedes* 4 = β; *alta, pedem* 1 = γ; *quanti erit ponderis?* (puta, librarum ♃.) Dico, ut A × B × C, ad D; ſic α × β × γ, ad ♃, $= \frac{\alpha\beta\gamma}{ABC} D$. Hoc eſt $\frac{10 \times 4 \times 1 = 40}{4 \times 3 \times 2 = 24} * 240 = 400$. Quod patet, reſoluta analogia compoſita, in tres ſimplices.

A. D :: α.	A. D :: α. q.	4. 240 :: 10. 600.
B. β.	B. q :: β. ♀.	3. 600 :: 4. 800.
C. γ. ♃.	C. ♀ :: γ. ♃.	2. 800 :: 1. 400.

Nam primo $q = \frac{\alpha}{A} D$. adeoque ſecundo $♀ = \frac{\beta}{B} q = \frac{\alpha\beta}{AB} D$. Et tertio $♃ = \frac{\gamma}{C} ♀ = \frac{\alpha\beta\gamma}{ABC} D$. Quod erat demonſtrandum.

Notandum autem, quod quē nos in præcedentibus 2^dum appellavimus terminum, fieri poteſt tertius; adeoque quem tertium appellavimus, ſecundus: hos enim duos terminos, in Proportione directa, pro arbitrio ſedes mutare poſſe, jam ſupra univerſaliter diximus. Adeoque perinde omnino eſt ſive dicamus PT. L :: πτ. λ, ſive PT. πτ :: L. λ. Item perinde eſt ſive dicamus ABC. D :: αβγ. ♃. ſive ABC. αβγ :: D. ♃. Quod monuiſſe ſufficiat.

Analogia ex directa & inverſa, compoſita.

Atque hæc quidem dixiſſe ſufficiat de Proportionum Regula compoſita, dummodo ſingulæ Analogiæ componentes ſint directæ.

Fieri autem poteſt ut Analogiarum componentium altera directa ſit, altera Reciproca.

Exſempli

Exsempli gratia. Si 36 = A, *libræ panis, sufficiant militibus* 3 = B, *in dies* 6 = C; *libræ* 180 = α, *militibus* 9 = β, *in quot dies sufficient?* puta in dies γ.

Est quidem hic analogiarum altera directa, nempe Si *libræ* 36 = A, *sufficiant in dies* 6 = C; *libræ* 180, *sufficient in dies quot?* puta q = 30. At altera est Reciproca, nempe Si *militibus* 6 = B *sufficiant in dies* 30 = q; *militibus* 9 = β, *sufficient in dies quot?* certe non nisi in dies pauciores, propter plures milites, nempe, in dies 10. Adeoque illic, regula directa est adhibenda; hic, reciproca.

Nempe 36 . 6 :: 180 36 . 6 :: 180 . q = $\frac{6}{6}$ × 180 = 30.

3 : 9 . 2 3 . q : 9 . 2 = $\frac{3}{9}$ × q = $\frac{3}{9}$ × 30 = 10.

Item A . C :: α A . C :: α . q.

B : β . γ. B . q : β . γ.

Adeoque q = $\frac{\alpha}{A}$ C. Et γ = $\frac{B}{\beta}$ × q = $\frac{B\alpha}{\beta A}$ C.

Si autem libeat pro duabus his operationibus, unam compositam substituere: *Factus ex duabus divisoribus* (puta termino primo analogiæ directæ, & tertio reciprocæ) *erit compositus divisor*; (*adeoque in analogia directa, terminus primus*:) *factusque ex multiplicatoribus, compositus multiplicator*: (*Adeoque, in eadem analogia terminus tertius, in secundum ducendus.*) Hoc est, (in exposita quæstione,) A β . C :: α B . γ = $\frac{\alpha B}{A\beta}$ C. ut prius.

Aβ . C :: Bα : γ = $\frac{B\alpha}{A\beta}$ C.

A . C :: α

B β . γ.

Et quidem, quotcunque fuerint analogiæ componentes, sive directæ item, sive reciprocæ, id universaliter dicendum: *Ex omnibus Divisoribus* (nempe terminis primis analogiarum directarũ & tertiis reciprocarum,) *continue ductis, fiat Divisor; ex reliquis omnibus* *Regula generalis.*

ibus continuè ductis, Dividendus ; adeoque Quotiens exhibebit terminum quæsitum.

Atque hactenus de Regula Aurea Compositâ, sequitur *Regula Societatis*, dicta.

CAP. XL.

De Regula Societatis : Tum sine Tempore ; tum cum Tempore.

REgula quæ dicitur *Societatis*, cum nihil aliud quam sit regula Aurea pluries repetita : non opus erit ut longâ disquisitione illam exponam aut etiam novas exquiram operationum demonstrationes.

Regula societatis. Est autem ea hujusmodi ; *Ubi data in duobus terminis ratione, tertio loco quotlibet, ut res ferat, positis, totidem quæruntur quarti proportionales* ; dici hæc solet *Regula societatis*. Nomen suum inde forsan sortita, quod in Mercatorum consortiis, sive societatibus maximi usus esse soleat.

Sine tempore. Exemplum esto. *Si tres mercatores societatem ineuntes sortem ita componant ut primus A conferat libras* 60 ; *secundus B, libras* 50 ; *tertius* C, *libras* 40 ; (Adeoque omnium aggregatum, lib. 150. = 60 + 50 + 40) *Lucrum vero negotiando conquisitum sit lib.* 30. *Quæritur, quantum inde cuique debeatur ?*

Quo autem huic quæsito satisfiat, nihil aliud requiritur quam ut Aureæ regulæ praxis toties repetatur quoties res ipsa postulat. Nempe si totius sortis summæ 150, lucrum sit lib. 30. quantum erit lucrum partis A, seu 60 ? quantum partis B seu 50 ? quantum C seu 40 ? Et, facta toties aureæ regulæ operatione, parti A convenire comperientur lib 12: parti B lib. 10. parti C lib 8 Nam ut 150, ad 30 ; sic 60, ad 12 ; & 50, ad 10 ; & 40, ad 8. Vel, in symbolis, ut conjunctim A + B + C = Z, ad L ; sic, sigillatim, A, B, C, ad $\frac{LA}{Z}$; $\frac{LB}{Z}$; $\frac{LC}{Z}$.

$$\left.\begin{matrix}60\\50\\40\end{matrix}\right\} = 150.30 :: \left\{\begin{matrix}60.12.\\50.10.\\40.8\end{matrix}\right. \quad \left.\begin{matrix}A\\B\\C\end{matrix}\right\} = Z.L :: \begin{cases} A.\frac{LA}{Z} \\ B.\frac{LB}{Z} \\ C.\frac{LC}{Z} \end{cases}$$

Atque hæc est quam vocant *Regulam Societatis sine tempore*.

Si autem, præter diversitatem sortis congestæ, accedat etiam diversitas temporis, vocari solet *Regula societatis cum Tempore*. Et sicuti, prius, repetenda erat *Aurea Regula simplex*: Ita hic. *Aurea regula composita* erit repetenda. *Cum tempore*

Puta si collata sors prima 60 = A, per menses $4 = \alpha$; secunda 50 = B, per menses $3 = \beta$; tertia, 30 = C, per menses $2 = \gamma$: sitque totius negotiationis lucrum 30 = L: quæritur quantum cuique debetur?

Cum itaque hic composita ratio sit, nempe ex ratione sortis ad sortē, & temporis ad tempus: Multiplicandæ sortes singulæ in suum tempus, puta $A \times \alpha = 60 \times 4 = 240$. $B \times \beta = 50 \times 3 = 150$. $C \times \gamma = 30 \times 2 = 60$. Et numeri sic facti, conjunctim sumpti, constituent terminum primum, $A\alpha + B\beta + C\gamma = 240 + 150 + 60 = 450 = Z$. Idemque figillatim, totidem terminos tertios: Ipsumque lucrum, terminum secundum, Adeoque convenient primo, 16; secundo, 10; tertio 4. Et in symbolis pariter.

$$\left.\begin{matrix}60\times4=240\\50\times3=150\\30\times2=60\end{matrix}\right\} = 450.30 :: \left\{\begin{matrix}240.16.\\150.10.\\60.4.\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}A\alpha\\B\beta\\C\gamma\end{matrix}\right\} = Z, L :: \begin{cases} A\alpha.\frac{A\alpha L}{Z}. \\ B\beta.\frac{B\beta L}{Z}. \\ C\gamma.\frac{C\gamma L}{Z}. \end{cases}$$

Atque

Atque ad eandem formam de aliis hujuſmodi quæſtionibus ſtatuendum erit. quæ cum cuivis ſatis obvia ſint, non eſt cur illis diutius immoremur.

Regulas quas vocant *Alligationis*, & *Falſæ poſitionis*, intactas prætereo: tum aliis de cauſis; tum quod illa non adeo frequentis uſus ſit; hæc autem ſine magno diſpendio, poſt introductam Arithmeticam ſpecioſam, careri poſſit; quæ enim per eam ſolvi ſolebant quæſtiones, illæ quidē omnes, aliæq; plures tum facilius, tum magis perſpicue, ſolvuntur per Arithmeticam ſpecioſam. Eas autem ſiquis ſcire expetat, ex vulgaribus Arithmeticæ Practicæ Magiſtris, petat licet.

Sed & aliæ etiam apud eoſdem practicos Arithmeticos paſſim exſtant *Regulæ* quas *Praxeos* vocant. Quæ compendio inſerviunt in Monetis, Ponderibus, Menſuris &c. reducendis; & Mercatorū negotiationibus maxime inſerviunt. Cum vero illas pro variis variarum gentium Monetis, Ponderibus, Menſuriſque, eorumque ſingillatim rationibus, omnino varias eſſe neceſſe ſit: Non exſpectandum eſt, ut eas ego, dum quæ in Arithmetica ſunt communia trado, omnino attingam; ſed quæ cuiquæ genti ſunt peculiaria, ſuis cujuſque ſcriptoribus tradenda permittam. Nec quidem etiam eſt neceſſe, cum earum omnium Regularum fundamenta, non aliunde quam ex iis quæ jam tradidimus petenda ſint; & unicuique interim, ut, pro ingenii ſui ſagacitate, & pro re nata, permittendum ſit, quæ ſuis negotiis maxime ſint accommoda, Regularum hujuſmodi compendia tum exquirere, tum etiam exercere.

His itaque omiſſis, ad Fractionum ſive Minutiarum doctrinam feſtinabo. Sed hoc prius monito; Quæ ſuperius de Rationibus ſive Proportionibus dicta ſunt, quæque inde ortæ Regulæ jam fuerunt traditæ; non minus in numeris fractis, ſive etiam ſurdis, (de quibus deinceps dicetur,) locum habent, quam in Numeris Integris. Sicut enim numeri integri, invicem Addi, Subduci, Multiplicari, Dividique ſolent, variiſq; modis Rationes ſive Analogias ſubire: ita & Fracti, Surdique, conſimiles ſubeunt operationes, & eaſdem leges. Quo pacto autem operationes illæ Arithmeticæ, Puta Additio, Subductio, Multiplicatio, & Diviſio, in Fractis & Surdis ſint adminiſtrandæ; jam deinde dicendum erit.

CAP.

CAP. XLI.

De Fractionibus sive Minutiis. Fractionum origo. Numeri fracti, an veri numeri. Fractionum Explicatio: Notatio. Denominator. Numerator. Fractiones Propriæ; Impropriæ. Fractionum explicatio altera. Divisionum Quotientes indicant. Explicatio tertia; quæ & Irrationalibus conveniat. Fractionum æquipollentia. Earumque cum Rationibus comparatio.

FRactionum, sive *Minutiarum* doctrina, qui & *Numeri fracti* dici solent, post absolutam Rationum traditionem, facile absolvitur. *Fractionum origo.*

Fractionum Originem, in superioribus jam ante tradidimus. Nimirum, cum supponat Arithmetica *Unitatem*, sive *Unum*, numerorum primum esse, minimumque; (quòd Uno Paucius, dici non possit:) reliquosque omnes Unitatum collectione componi: Siquando supponendum sit (quod non raro fit) aliquid Uno minus, sive Unum aliquod in partes dirimendum; quoniam illud vero aliquo numero designari non potest, *Numeris* (ut loquuntur) *Fractis*, illud utcunque designare satagunt. (Puta, si supponatur Unum aliquod bisecandum, totius Semisses sic sic designant, $\frac{1}{2}$.) Quod ipsum etiam faciunt, siquando duobus quibusvis numeris invicem proximis intermedium aliquod designandum est. Puta, si numerus Ternarius 3, supponatur bisecari; quoniam hujus Semissis, Unitate major est, & Binario minor, nec tamen inter hos numeros (Unitatem & Binarium) alius intercedat intermedius verus numerus; semissem illum utcunque sic designant $\frac{3}{2}$, vel etiam $1\frac{1}{2}$. Et similiter alias.

Adeoque numeri *Fracti* dicti, pro veris Numeris haberi non solent, neque sub *Numeri* appellatione apud Euclidem aliosque censentur; (apud quos numerorum appellatione non nisi Integri insigniuntur.) Quippe revera qui verbi gratia, *Horæ Semissem* sive $\frac{1}{2}$, dicit; non tam ille *Quot horas* dicit, quam *Quantum horæ*: adeoque ex campo Arithmetico, in Geometricum transfit. Quamvis enim, in Arithmetica, non reperiatur *Paucius Uno*; reperitur tamen, in Geometria, *Minus integro*: Et quidem quemadmodum supponit Arithmetica, Unitatem in infinitum Multiplicabilem; ita Geometria, Integrum in infinitum divisibile: *Numeri Fracti, non veri Numeri.*

sive, ut Vnum Arithmeticum est multiplicabile, sic Vnum Geometricum, divisibile, in infinitum.

Fractionum explicatio.

Hanc autem infinitam Geometriæ divisibilitatem, cum quodammodo imitari velit Arithmetica; supponit Vnitatem sive Vnum, quasi jam quid integrum, in quotvis Partes divisibile; easque demum Partes numerabiles, adeoque suæ considerationi subjectas. Quamvis enim illa Integri in partes Divisio, Geometricum quiddam rite censeatur; Partium tamen illarum, in quas dividitur, Numeratio, est plane Arithmetica.

Fractionum notatio.

Cum itaque in fractionibus, sive numeris Fractis, omnino duo designanda veniant; Puta, Vnius sive integri, in partes deremptio; (nunc plures, nunc pauciores;) Earumque partium, unius pluriumve assumptionem: Quo utrumque indigitetur, Duobus propterea numeris Fractio signari solet, altero superne, altero inferius, positis; ad hanc formam: $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}$, &c. Quorum Inferior indicat, in quot æquales partes Integrum aliquod sive Vnum, dirimi supponimus; & *Denominator* dici consuevit: Superior, quot earum assumi volumus; dicique solet *Numerator*. Adeoque Fractio $\frac{2}{3}$, unius alicujus Integri, in tres æquales partes dirempti, duas assumendas innuit.

Denominator.

Numerator.

Denominator autem ille dicitur, quia partes in quas dirimitur integrum Dinominat, seu quales dicit; puta Semissem, Trientem, Quadrantem, Sextantem, &c. sive partem Dimidiam, Tertiam, Quartam, Sextam, &c. prout fractionis denominator est 2, 3, 4, 6, &c.

Numerator verò dicitur hic alter, quia partium (sic denominatarum) assumendarum numerum indicat; puta, $\frac{2}{3}$, duos trientes; $\frac{3}{4}$, tres quadrantes; $\frac{5}{6}$, quinque sextantes, sive partes sextas; $\frac{3}{5}$, tres quintas, &c.

Fractiones propriæ.

Estq; hæc simplicissima Fractionum expositio, earumve naturæ explicatio; quæ *Fractionibus propriis*, uti dici solent, sive propriè dictis, apprimè quadrat: Quæ nempe quid Vnitate minus innuunt.

Integro minores.

In his itaque Fractiõnibus propriis, Numerator semper Denominatore minor erit. Cum enim Denominator ostendat quot omnino sint vel supponantur istiusmodi in Integro, partes æquales; si Numerator Denominatori æqualis fuerit, indicabit ille tot ejusmodi assumendas partes, quot omnino in integro continentur; adeoque totum integrum, non ipsius aliquam portio-

portionem, assumptum iri: (quippe partes simul omnes; tantundem sunt atque ipsum integrum:) Sin Denominatore major esset numerator, innueret illud jam plures istius Integri partes ejusmodi assumendas, quam inibi omnino contineantur; quod esset impossibile: Supereſt itaque ut Numerator, sive partium assumendarum numerus, minor sit quam Denominator, sive numerus partium omnium in integro contentarum.

Fractiones impropriæ.

Si quando itaque conspiciatur (quod tamen usu non raro obvenire solet) Numerator vel Denominatori æqualis, vel ipso major; Hujusmodi Fractio *Impropria* dici solet; ut quæ quid Unitati æquale vel etiam ipsa majus indicet. Sunt enim hujusmodi Fractiones $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, &c. tantundem atque ipsa Unitas 1. Nempe tum duo semisses, tum tres trientes, tum quatuor quadrantes, &c. ipsum præcise Integrum absolvunt. At $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, &c. etiam duo integra; quippe bis tot partes numerat fractio, quot denominator indicat integro contineri. Item $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{3}$, &c. tantundem valent atque 3, sive tria integra. Et in reliquis pariter. Similiter de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, &c. judicandum. Cum enim $\frac{2}{2}$, duo semisses, tantundem sint atque 1; erunt $\frac{1}{2}$, tres semisses, tantundem atque $1\frac{1}{2}$, unitas cum semisse. Item cum $\frac{6}{3}$, sex trientes, tantundem valeant atque 2; erunt $\frac{8}{3}$, octo trientes, tantundem atque $2\frac{2}{3}$, duo cum duobus trientibus. Et similiter in aliis, ubi Numerator Denominatore major, nec tamen hic illius aliquota pars. Si enim Denominator sit Numeratoris pars aliquota, fractio hæc impropria æquivalet numero integro: Sin minor, nec tamen pars aliquota; æquivalet impropria fractio numero integro cum adjuncta particula seu fractione propria.

Fractionum explicatio altera.

Cum verò prior illa Fractionum expositio, per Unius Integri in æquales aliquot partes diremptionem, ut ut fractionibus propriis explicandis satis accommoda, impropriis tamen haud usque adeo conveniat, (quippe Unius Integri plures assumi partes non possunt, quam in ipso omnino continentur; quod exigere videatur Impropriæ Fractionis numerator denominatore major:) Poterit secundo modo fractionum natura, commodius huic negotio, explicari, per diremptionem, non unius tantum, sed plurium simul Integrorum (quot nempe indicat Numerator) in partes aliquot æquales, (tot nempe quot Denominator postulat,) quarum unam aliquam assumendam fra-

ctio indicat. Perinde enim est sive dicamus fractionem $\frac{2}{3}$, Unius integri Duos trientes, sive Duorum integrorum Unum trientem: Tantundem enim utrovis modo indicatur. Exempli gratia. Cum Solidus Anglicanus contineat 12 Denarios; Unius solidi triens sunt denarii 4; adeoque eiusdem duo trientes, bis Quatuor, sive 8 denarii. Sed &, cum solidus unus contineat denarios 12; continebunt solidi Duo, denarios bis duodecim, hoc est, 24: at denariorum 24 pars tertia, sunt item 8 denarii, ut prius. Perinde itaque est sive dicamus $\frac{2}{3}$ sol. indicare duos trientes unius Solidi, sive duorum solidorum trientem unum.

Fractiones indicant divisionum Quotientes.

Atque hæc quidem expositio perinde quadrat propriis atque impropriis fractionibus: Nempe $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}$, &c. nil aliud indicant, quam numerorum 2, 3, 4, &c. trientes; Nec aliud sunt quam totidem quotientes numerorum 2, 3, 4, &c. per numerum 3 divisorum; quod & superius, dum Divisionem tradidimus, dictum est. Et quidem, sicut ex imperfecta sive etiam impossibili subductione, oriuntur numeri negativi, (3 — 2, 2 — 3, &c;) ita ex imperfecta sive etiam impossibili Divisione, oriuntur numeri fracti, ($\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}$, &c.) sicut etiam ex imperfecta impossibilique radicum extractione, oriuntur numeri surdi, ($\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$, &c.) ut deinceps dicetur.

Fractionum explicatio tertia quæ irrationalibus etiam convenit.

Verum adhuc notandum est; cum Arithmeticæ Fractiones, Geometricas (ut dictum est) Continui Divisiones æmulentur, quæ non semper sunt in partes rationales, sed satis nonnunquam irrationales; Quò huic incommodo subveniatur, tertius adhuc Fractiones explicandi modus, prioribus universalior, tradi potest. Cum enim, verbi gratia, fractio $\frac{2}{3}$ indicet (ut prius dictum est) Unius integri in tres partes æquales secti partes duas; manifestum est, hac fractione indicari eam integri partem, quæ ad integrum illud eandem habeat rationem quam 2 ad 3. Quippe cum totum contineat partes 3, quales assumpta illius portio habet partes 2; erit portionis ad integrum ea ratio quæ est partium duarum, ad partes tres; hoc est, numeri 2, ad numerum 3. Dicimus itaque, *Fractione* (*propriâ*) *eam indicari unius alicujus integri* (vel expositæ quantitatis) *partem, quæ, ad totum, illam rationem habeat, quam habet fractionis Numerator ad Denominatorem.* Vel etiam universaliter *Fractione* (sive propria sive impropria) *tantundem quantitatis Homogeneæ designari, quantum*

tum ad unum Integrum, sive expositam quantitatem, eam rationem habeat quam habet fractionis Numerator ad Denominatorem. Puta, si dicamus circuli Radium esse $\frac{1}{2}$ Diametri; tantundem est ac si dicamus, circuli Radium eam esse Diametri partem, quæ ad totam habeat rationem 1 ad 2: vel, Radium tantum esse, ut ad diametrum habeat rationem 1 ad 2. Et pariter, cum Latus quadrati esse dicimus $\frac{1}{\sqrt{2}}$ Diagonii; tantundem est ac si dicamus, Latus quadrati tantum esse ut ad illius Diagonium rationem habet 1 ad $\sqrt{2}$. Item, Quadrati ambitum, esse $\frac{4}{\sqrt{2}}$ Diagonii; tantundem est atque, Ambitum quadrati tantum esse ut ad ipsius diagonium rationem habeat 4 ad $\sqrt{2}$. (quo pacto satis commode exponuntur fractiones illæ irrationales, licet neque juxta methodum primam, neque etiam secundam, commode dici possit, vel 1 vel 4 digonia, in $\sqrt{2}$ partes æquales dividi, quò earum una assumatur.) Atque eodem modo, sumptis duobus vel numeris, vel lineis, vel aliis quibusvis quantitatibus invicem homogeneis, a, b, fractio $\frac{a}{b}$, vel $\frac{a}{b}$ D, id innuit quod ad Unum Integrum, vel assignatam aliquam quantitatem D, eam rationem habeat quam habet a ad b; sive sit ea ratio rationalis sive irrationalis.

Fractionum Æquipollentia.

Atque hinc quidem sequitur, Tum *Eandem quoad valorem Fractionem, pluribus posse, & quidem infinitis modis, designari*: Tum *fractiones eas omnes, quarum Numeratores ad suos respective Denominatores eandem habent rationem, invicem æquales sive æquipollentes esse.* Quippe cum nihil aliud innuat Fractio, quam *Rationem* designandæ quantitatis ad expositam Homogeneam, sive unum Integrum: dummodo eadem ratio, quibuscunque id fiat quantitatibus, designatur, eandem & (quoad valorem) Fractionem designari, intelligendum erit. Adeoque, verbi gratia, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{100}{200}$, &c, eandem, quoad valorem, Fractionem designant, (puta semissem,) quia eadem est in singulis Numeratoris ad Denominatorem Ratio; (quippe, ea quæ est 1 ad 2;) Quod quidem non de numeris tantum, sed quibusvis etiam quantitatibus invicem homogeneis, intellectum velim. Puta

$\frac{A}{A+A}$, $\frac{A}{2A}$, $\frac{A}{B}$, (posito quòd B sit duplum quantitatis A:) sive numeri sint, sive Lineæ, sive etiam Superficies, Corpora, Pondera, Tempora, &c. quæ Symbolis A, B, designantur. Aut etiam

A ——
B ——————

$\frac{Pondo}{Bipond.}$, $\frac{Bipedal:}{Quadriped.}$, &c. Sic $\frac{1}{2}$ D, $\frac{2}{4}$ D, $\frac{A}{A+A}$ D, $\frac{A}{B}$ D, $\frac{Pondo}{Bipond:}$ D, &c. tantundem designant; Nempe id quod ad expositam quantitatem D (quæ pro uno Integro habetur) eam rationem habeat, quam habet 1 ad 2, vel 2 ad 4, vel A ad A + A, vel A ad B, vel Pondo ad Bipondium, &c. quæ quidem rationes omnes eædem sunt, sive æquales.

Fractionum & Rationum affinitas.

Sed & hinc etiam patet, Rationum & Fractionum, sive identitas, sive affinitas maxima. Cum enim omnino perinde sit, sive dicamus, verbi gratia $\frac{3}{4}$, indicare unius integri tres quadrantes, (juxta primam fractionis explicationem;) sive trium integrorum quadrantem unum, aut numeri 3 per 4 divisi quotientem, (quæ est explicatio secunda;) sive denique rationem 3 ad 4, aut eam integri portionem quæ ad totum eam rationem habeat, (qui est tertius explicandi modus:) manifestum est eadem opera tum Fractionem, tum divisionis Quotientem, tum Rationem, vel saltem Rationis Denominatorem, designari.

Adeoque, quæ deinceps de Fractionum Additione, Subductione, Multiplicatione, Divisione, aut etiam Proportione, &c. dicenda erunt: Eadem etiam de Rationibus, sive Rationum potius Denominatoribus, intelligenda velim. quippe nil aliud sunt Fractiones (sive propriæ, sive impropriæ, sive etiam irrationales,) quam Rationum Denominatores.

quod quidem si satis attendat *Gregorius de Sancto Vincentio*, non est cur ille totum ipsius *de Rationum Proportionibus*, aut etiam *Proportionalitatibus*, doctrinam, ut plane novam venditet: nec *Rationum inæqualium* comparationem, quasi rem incognitam & inauditam plane exhibere videatur. Ecquis enim nescit, *Regulam Auream, in Fractionibus* exercere, nil aliud esse, quam *Rationum Rationes* invicem comparare? Et sicut idem sit omnino opus

pus arithmeticum, partium ſummam (addendo) colligere, atque ſummarum ſummam; ita & ad eandem Rationum doctrinam ſpectat, ſive Numerorum, Linearum, &c. rationes; ſive ipſarum Rationum rationes, contemplemur. Quod autem ille quantitatum abſolutarum rationes, *Rationes* ſimpliciter appellet; rationum autem rationes, *Proportiones*; & *Proportionum* rationes, *Proportionalitates*: (aut etiam, ſi rationibus proportionalitatum, novum indidiſſet nomen, & ſic deinceps quouſque libet:) licitum omnino eſt, ſi ita videbitur, ad pleniorem accuratioremque, ubi res poſtulat, diſtinctionem, ita loqui, & vitandæ confuſionis ergo: At interim non inde nova magis dicenda eſt in Arithmeticam (vel, ſi libet, Geometriam,) introducta ſpeculatio; quam ſi in Additione, (ob continuas ſæpe repetendas operationes,) libeat expoſitas aliquot minutas quantitates (diſtinctionis gratia) *Particulas* appellare; particularum autem collectiones, *Partes*; & collectiones partium, *Integra*; integrorum autem collectiones, *Summas*; & ſummarum denique, *Summam totalem*. Sicut enim eâdem arte tum particularum in Partes, tum partium in Integra, & integrorum in Summas, &c. collectio inſtituitur: & collectiones omnes intermediæ, quanquam præcedentium reſpectu, ſint Aggregata; ſequentium tamen, pro Membris habeantur: Eodem modo per omnia, iiſdem plane principiis eademq; arte procedendum eſt, tum in ſimplicium ſive abſolutarum quantitatum rationibus contemplandis, tum in rationum rationibus, ſive proportionibus, harumque proportionalitatibus, & ſic deinceps: & quidem ſicut intermediæ rationes ſive comparationes, reſpectu quantitatum abſolutarum primo expoſitarum, Relationes ſive Reſpectivæ quantitates merito habeantur; illæ ipſæ tamen, cum invicem comparandæ ſint, in ſequentibus illis comparationibus, pro terminis quaſi ſimplicibus ſive abſolutis ſunt habendæ; ipſæque relationes, cum invicem comparantur, jam fiunt, eâ comparatione, novæ relationis termini, ad inſtar aliorum Entium plane abſolutorum. Neq; aliud, credo, eſt, quod in tota illa tractatione ſatagit V. Cl. Sed de his hactenus.

Arq; hactenus de Fractionum tum Natura, tum Æquipollentia, dictum eſto; tum de illarum cum Rationibus affinitate.

CAP.

CAP. XLII.

De Additione & Subductione Fractionum; tum Cognominum, tum non-Cognominum. Fractionum ad communem Denominatorem Reductio. Minimus communis Denominator. Maximus communis Divisor.

EXpositis, in præcedente Capite, quæ ad veram Fractionum naturam intelligendam necessaria videbantur: Ad operationes Arithmeticas in numeris fractis exercendas accedendum est. Quæ quidem eædem ipsæ sunt quæ in numeris veris, hoc est, Integris, superius exponuntur. Puta Additio, Subductio, Multiplicatio, Divisio. &c.

Additio & Subductio.

Ab Additione & Subductione, ordiemur.

Si *Fractiones* invicem Addendæ, aut Subducendæ, sint *Cognomines*, (hoc est, eundem habeant Denominatorem,) nulla difficultate res absolvitur; *Substituta nempe, pro Numeratoribus expositis Numeratorum illorum Summa vel Differentia, retento communi qui prius erat Denominatore, habetur Summa vel Differentia fractionum expositarum.*

Fractionum cognominum.

Sic si Addendæ sint fractiones $\frac{2}{6}$ & $\frac{3}{6}$, prodibit summa $\frac{5}{6}$. Quippe numeri 2 & 3 simul additi constituunt 5, quæcunque res illæ sint quæ numerantur: puta, sive integræ, sive partes. Et quâ ratione 2 & 3 homines, sunt 5 homines; aut 2 & 3 equi, 5 equi; vel 2 & 3 integra, 5 integra &c. Eadem plane ratione 2 & 3 partes, sunt 5 partes; 2 & 3 semisses, 5 semisses: 2 & 3 sextantes 5 sextantes hoc est $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}=\frac{2+3}{6}$.

Ita, si ex $\frac{5}{6}$, auferantur $\frac{3}{6}$, manebunt $\frac{2}{6}$. Quippe universaliter verum est, $5-3=6$, sive res numeratæ integræ sint, sive partes. Sicut enim $5-3$ homines, sunt 2 homines; & $5-3$ decades, 2 decades; & $5-3$ centuriæ, 2 centuriæ: ita $3-3$ sextantes, sunt 2 sextantes; hoc est $\frac{5}{6}-\frac{3}{6}=\frac{2}{6}=\frac{5-3}{6}$.

Et similiter faciendum est ubi plures adhuc Fractiones cognomines, continue addendæ sunt, aut subducendæ. Puta $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$. quia $2+3+4=9$. Sic $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$. quia $2+3-4=1$. Et similiter alibi.

Atque

Atque eodem plane modo in fractionum Additione & Subductione Specioſa, ſive Symbolica. $\frac{A}{D} + \frac{B}{D} + \frac{C}{D} = \frac{A+B+C}{D}$. Et $\frac{A}{D} + \frac{B}{D} - \frac{C}{D} = \frac{A+B-C}{D}$. &c.

Fractionum non cognominum.

Si vero Fractiones invicem Addendæ aut Subducendæ, non ſint cognomines, adhibenda prius eſt præparatio, qua ad idē nomen reducantur, quàm Additio illa vel Subductio inſtituatur. Et tum demum factâ hac ad idem Nomen ſive Denominatorem reductione, Additio Subductiove inſtituenda eſt, ut prius. Puta ſi addendæ ſint fractiones $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$; aut etiam hæc ab illa ſubducenda: pro $\frac{1}{2}$, ſubſtituatur ipſi æquipollens $\frac{2}{4}$, (cum enim eadem ſit ratio 1 ad 2, atque 2 ad 4, oſtenſum eſt cap. præced. fractiones $\frac{1}{2}$ & $\frac{2}{4}$ æquipollentes eſſe:) adeoque $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Et $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Sic $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$. Et $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{12}$.

Eodem modo, ſi numero 3, ſive $\frac{1}{1}$, (quæ æquipollent; nam diviſio per 1, neutiquam immutat diviſi quantitatem,) addatur fractio $\frac{2}{5}$, poteſt quidem id fieri immutatis terminis, ſic $3 + \frac{2}{5}$, vel etiam $3\frac{2}{5}$: ſed etiam (quod nonnunquam fieri convenit) in fractionem impropriam coaleſcent, puta $3 + \frac{2}{5} = \frac{3}{1} + \frac{2}{5} = \frac{15}{5} + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$: ſubſtituto ſcilicet, pro 3 vel $\frac{3}{1}$, (tribus integris;) $\frac{15}{5}$, hoc eſt, quindecim quintis, quippe tantundem valent; cum enim 5 quintæ conſtituant unum integrum, 15 quintæ, hoc eſt ter 5 quintæ, conſtituent integra tria.

Item ſi ex 3 auferre oporteat $\frac{2}{5}$: pro 3 integris ſubſtituatur $\frac{15}{5}$, vel etiam $2\frac{5}{5}$, aut $2 + \frac{5}{5}$; & facta demum ſubductione, erit $3 - \frac{2}{5} = \frac{15}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$. vel etiam $3 - \frac{2}{5} = 2 + \frac{5}{5} - \frac{2}{5} = 2 + \frac{3}{5}$: (nam $\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, quibus ſi præponamus 2, fiet $2 + \frac{3}{5}$ vel $2\frac{3}{5}$.)

Reductio ad communem Denominatorem.

Reducuntur autem fractiones quælibet duæ datæ, ad alias invicem cognomines, & datis æquales, ſi prioris tum Numerator tum Denominator, ducatur in poſterioris Denominatorem; & contra, poſterioris tum Numerator tum Denominator, in Denominatorem prioris. Cum enim utrobique fractionis uterq; terminus per communem multiplicatorem multiplicetur, terminorum ad invicem ratio non immutatur, (quippe duplo-

rum ad dupla, triplorum ad tripla, &c. eadem est ratio quæ simplorum ad simpla;) dum novus interim emergens Denominator, fit utrique communis, (quippe qui fit ex datarum Denominatoribus invicem ductis.) Sic in modo exhibitis, $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$: si prioris uterque terminus ducatur in 4, fiet $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; item, si posterioris terminus uterque ducatur in 3, fiet $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; adeoque junctim $\frac{4}{8} \pm \frac{3}{12} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4}$. Sic, pro 3 & $\frac{2}{5}$, vel $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{5}$; substituendum est $\frac{15}{5} = \frac{1}{1} = 3$, & $\frac{2}{5}$: adeoque $\frac{15}{5} \pm \frac{2}{5} = 3 \pm \frac{2}{5}$. Et sic ubique.

Et pariter in Symbolis: pro expositis $\frac{A}{B}, \frac{\alpha}{\beta}$; substituantur $\frac{A\beta}{B\beta}, \frac{B\alpha}{B\beta}$. Eritque tum $\frac{A\beta}{B\beta} = \frac{A}{B}$, tum $\frac{B\alpha}{B\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$, tum denique $\frac{A\beta}{B\beta} \pm \frac{B\alpha}{B\beta} = \frac{A}{B} \pm \frac{\alpha}{\beta}$.

Atque eadem plane methodo utendum est, si plures quotcunque fractiones occurrant ad communem Denominatorem reducendæ. Nempe singularum tum Numeratorem tum Denominatorem in reliquarum omnium Denominatores continuè multiplicando. Sic $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$, reducuntur ad $\frac{15}{30}, \frac{20}{30}, \frac{18}{30}$. Nam $1 \times 3 \times 5 = 15$, & $2 \times 3 \times 5 = 30$, adeoque $\frac{1}{2} = \frac{15}{30}$: Item $2 \times 2 \times 5 = 20$, & $3 \times 2 \times 5 = 30$, adeoque $\frac{2}{3} = \frac{20}{30}$: Denique $3 \times 2 \times 3 = 18$, & $5 \times 2 \times 3 = 30$, adeoque $\frac{3}{5} = \frac{18}{30}$. Et propterea junctim $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \pm \frac{3}{5} = \frac{15}{30} + \frac{20}{30} \pm \frac{18}{30}$. Et pariter in Symbolis pro $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}, \frac{d}{\delta}$, substituantur $\frac{a\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}, \frac{b\alpha\gamma\delta}{\beta\alpha\gamma\delta}, \frac{c\alpha\beta\delta}{\gamma\alpha\beta\delta}, \frac{d\alpha\beta\gamma}{\delta\alpha\beta\gamma}$; quæ tum expositis sunt figillatim æquales, tum invicem cognomines; (nam denominatores $\alpha\beta\gamma\delta$, $\beta\alpha\gamma\delta$, $\gamma\alpha\beta\delta$, $\delta\alpha\beta\gamma$, sunt invicem æquales, quippe ex iisdem factoribus compositi; alternatio enim situs æqualitatem non immutat, cum in continuis multiplicationibus perinde omnino est quo ordine fiant, ut superius suo loco traditum est.) Et pariter alibi.

Communis denominatoris diminutio.

At interim verum est (neque id vel dissimulandum vel ignorandum) minorem nonnunquam Denominatorem communem assumi posse quam qui hoc pacto ex datorum Denominatorum omnium

omnium continuo ductu emergit. Nempe quoties Denominatores dati non ſunt *inter ſe primi*, hoc eſt, in eadem ratione minimi, ſed communem aliquem Diviſorem admittant. Sic in pridem expoſitis, $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{4}$; quæ reduci poſſunt, non modo ad communem denominatorem $8 = 2 \times 4$ (ex datis denominatoribus factum,) puta $\frac{4}{8}, \frac{2}{8}$; ſed etiam ad minorem, nempe 4, puta $\frac{2}{4}, \frac{1}{4}$, ut ſupra oſtenſum eſt: Cujus rei cauſa eſt, quod denominatores, dati, 2, 4, non ſunt numeri inter ſe primi, ſive in eadem ratione minimi, ſed uterque per communem diviſorem 2, præciſe dividi poterit; Eſt enim $2)2(1$, & $2)4(2$. Sic fractiones duæ $1\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$; reduci poſſunt, non modo ad $\frac{24}{16}, \frac{12}{16}$; ſed etiam ad $1\frac{8}{12}, \frac{6}{12}$: quia tum 12, tum 3, communem admittunt diviſorem 3. nam $3)12(4$. & $3)3(1$. Et pariter in Symbolis; $\frac{A}{BC}, \frac{E}{C}$, reduncuntur non modo ad $\frac{AC}{BCC}, \frac{EBC}{BCC}$, ſed & ad $\frac{A}{BC}, \frac{BE}{BC}$; quia nempe tum BC, tum C, communem admittunt diviſorem C; nam $C)BC(B$, & $C)C(1$.

Sed neque hoc ſemper fit; (ſunt enim non raro denominatores dati, inter ſe primi:) neque etiam tanti eſt, ut minimum ſemper denominatorem communem ſtudioſius prima vice inveſtigemus; ſed potius, ſi opus ſit, fractionum tandem ſumma vel differentia ad minimos terminos reducatur. (Nam revera etiamſi illud prius præſtitum fuerit, hoc alterum nihilominus deinceps aliquando præſtandum erit. Puta, ſi ex fractione $1\frac{7}{8}$ auferenda ſit $\frac{1}{3}$; nec acquieſcamus in æquipollentibus $\frac{21}{36}, \frac{12}{36}$; ſed ad minores adhuc deprimere cupiamus: minimi ad quos reduci poſſunt termini, communem denominatorem habentes, ſunt $1\frac{7}{12}$ & $1\frac{4}{12}$. Reſiduum itaque $1\frac{7}{12} - \frac{1}{3} = 1\frac{7}{12} - 1\frac{4}{12} = \frac{3}{12}$. At vero reſiduum hoc nondum eſt in minimis terminis, ſed ad minores adhuc reduci poterit, nempe $\frac{1}{4}$. Si autem, omiſſa depreſſione prima, ſumptis, pro $1\frac{7}{12} - \frac{1}{3}$, æquipollentibus $\frac{21}{36} - \frac{12}{36}$, ut habeatur reſiduum $\frac{9}{36}$; deprimi tandem, ſive abbreviari, ſemel poterit hoc reſiduum ad terminos $\frac{1}{4}$, in eadem ratione minimos.) Si tamen ſe ſponte offerat ejuſmodi communis denominator, qui minor ſit quam qui ex datorum communi multiplicatione emergit; poterit quidem ille non incommode

assumi; Eâ tamen lege, ut quotupluscunque sit vel quamcunq; habeat rationem, denominator ille communis, ad cujusque fractionis datæ denominatorem; totuplus omnino sit, sive eandem rationem obtineat assumendus Numerator ad numeratorem datum: ne fractionum scilicet valor immutetur. Puta si fractiones $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, ad eundem denominatorem 12, reducendæ sint; sicut pro 3, posterioris fractionis denominatore, substituitur 12, ipsius quadruplus; ita pro numeratore 1, ponendus erit numerator 4, dati quadruplus; ut $\frac{4}{12}$ & $\frac{3}{12}$, eandem retineant terminorum ad invicem rationem.

Minimus communis Denominator.

Si vero, antequam instituatur Additio vel Subductio, libeat fractiones expositas non modo ad communem aliquem denominatorem, sed ad communem denominatorem minimum reducere: id fiet hac regulâ. *Expositarum duarum Fractionum Denominatores, per maximum communem divisorem dividantur; & per alternos quotientes, multiplicentur utriusque uterque terminus: & prodibunt termini Fractionum cognominum, datis æqualium.* Exemplum esto in Symbolis, id ipsum quod antea exposuimus; $\frac{A}{BC}$, $\frac{E}{C}$: Denominatorum B C, & C, maximus communis Divisor, (saltem quantum ex Symbolis liquet,) est C: per hoc si dividatur Denominator prior, quotiens est B; nam C) B C (B; per quem si multiplicentur posterioris fractionis uterque terminus, prodibit $\frac{BE}{BC} = \frac{E}{C}$: Si per eundē C, divisorem communē, dividatur denominator posterior, C; quotiens est 1; nam C) C (1: per quem quotientem si præcedentis fractionis uterque terminus multiplicetur, prodibit eadem quæ prius fractio, $\frac{A}{BC}$, (quippe 1, multiplicando nihil immutat:) adeoque fractiones inventæ cognomines $\frac{A}{BC}$, $\frac{BC}{BC}$, datis sunt æquales; & quidem in minimis terminis. Pariter in numeris; Si fractionum $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{4}$, denominatores 6, 4, per communem maximum divisorem 2 dividantur, prodibunt quotientes 3, 2: Si autem per posteriorem 2, multiplicentur fractionis prioris uterque terminus, prodibit $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$; & per quotientem priorem 3, si multiplicentur

tur posterioris fractionis terminus uterque, prodibit fractio $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$: adeoque pro expositis $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ habeatur æquales minimæ cognomines $\frac{2}{12}, \frac{9}{12}$. Eodem modo, pro $\frac{7}{12}, \frac{1}{3}$, habentur minimæ cognomines, istis æquales $\frac{7}{12}, \frac{4}{12}$. Et similiter alibi.

Duorum autem numerorum *maximus communis Divisor*, hac mothodo invenietur. *Si major per minorem dividatur, & deinde divisor hic per divisionis si quod sit residuum; & sic deinceps donec eo tandem perveniatur ut residuum nullum sit; divisor ille ultimus, est datorum numerorum maximus communis divisor.* (uti ab Euclide ostensum est, 2 e 7.) Si autem non prius sistatur quam ad Unitatem deveniatur; argumento est expositos numeros in eadem ratione minimos esse: quippe 1, utrumque dividendo, non minuit. Sic numerorum 12 & 3, maximus communis divisor (intellige, qui dicendos numeros ita dividat, ut nullum supersit residuum,) invenitur 3; quia nempe 3) 12 (4 sine ullo residuo. Sic numerorum 12 & 34, maximus communis divisor est 2: Nam si 12 in 34 bis continentur, & supersunt 10; Deinde 10 in 12 continentur semel, & supersunt 2; Tandem 2 in 10 continentur quinquies præcise: postremus itaque hic divisor 2; est duorum expositorum 12, 34, maximus communis divisor. Numerorum autem 13 & 34, maximus communis divisor est 1; (adeoque ipsi jam inter se primi, sive in eadem ratione minimi;) ut ex adjunctis operationibus patet. *Maximus communis Divisor.*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & 0 & & 2 & & 10 & & & & & & \\ 2 &) & \cancel{10} &) & \cancel{12} &) & \cancel{34} & (& 2 & (& 1 & (& 5 \\ & & \cancel{10} & & \cancel{10} & & \cancel{24} & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} & & 1 & & 2 & & 3 & & 5 & & 8 & & & & & & & & \\ 1 &) & \cancel{2} &) & \cancel{3} &) & \cancel{5} &) & \cancel{8} &) & \cancel{13} &) & \cancel{34} & (& 2 & (& 1 & (& 1 & (& 1 & (& 1 & (& 2 \\ & & \cancel{2} & & \cancel{2} & & \cancel{3} & & \cancel{5} & & \cancel{8} & & \cancel{26} & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Atque hæc ipsa methodus nonnunquam etiam in Symbolicis commode adhibetur. Exsemplî gratia; $a^3 - e^3$, & $a^2 - e^2$: si quantitas illa per hanc dividatur, prodibit quotiens a (cujus tamen in hoc negotio nulla ratio habetur,) & residuum $ae^2 - e^3$. Si per hoc residuum dividatur ille Divisor $a^2 - e^2$, prodibit (quotiens $\frac{a}{e^2}$, &) Residuum $ae - e^2$. Denique si

per hoc Residuum $ae - e^2$, dividatur proximus Divisor $ae^2 - e^3$, prodibit quotiens e, & nihil restabit. Ut ex adjuncta operatione patet.

$$ae - e^2 \,)\, ae^2 - e^3 \,)\, a^2 - e^2 \,)\, a^3 - e^3 \,(\, a \,(\, \frac{a}{e^2} \,(\, 0.$$

$$\frac{ae^2 - e^3}{00.} \qquad \frac{a^2 - ae}{ae - e^2.} \qquad \frac{a^3 - ae^2}{ae^2 - e^3}$$

Atq; hinc liquet, postremum hunc divisorem $ae - e^2$, expositarum quantitatum $a^3 - e^3$, $a^2 - e^2$, communem esse Divisorem. Quod & experimento facto patebit.

$$ae - e^2 \,)\, a^3 - e^3 \,(\, \frac{a^2}{e} + a + e.$$

$$\frac{a^3 - a^2e}{a^2e - e^3}$$

$$\frac{a^2e - ae^2}{ae^2 - e^3}$$

$$\frac{ae^2 - e^3}{00}$$

$$ae - e^2 \,)\, a^2 - e^2 \,(\, \frac{a}{e} + 1$$

$$\frac{a^2 - ae}{ae - e^2}$$

$$\frac{ae - e^2}{00}$$

Adeoq; communis hujus divisoris ope, reducuntur expositæ quantitates $a^2 - e^2$, $a^3 - e^3$, ad simpliciores in eadem ratione, $\frac{a^2}{e} + a + e$, $\frac{a}{e} + 1$; vel etiam (tollendo fractionem) $a^2 + ae + e^2$, $a + e$. Et propterea $\frac{a^3 - e^3}{a^2 - e^2} = \frac{a^2 + ae + e^2}{a + e}$. Atque hujusmodi exempla plurima facile annecti possunt.

Verum hoc in Symbolis neque ita prompte, nec universaliter expediri potest atque in numeris. Exempli gratia; quantitatum $a^2 + ac - b^2 - bc$, & $ab + af - b^2 - bf$, haud ita facile, continua hac divisione, communis divisor innotescit: cum interim communem habeant divisorem $a - b$; ut ex adjunctis operationibus patet.

$a - b)$

$$\begin{array}{l} a-b\,)\,a^2+ac-b^2-bc\,(\,a+b+c \\ \quad a^2-ab \\ \hline \quad ab+ac-b^2-bc \\ \quad ab\quad\quad -b^2 \\ \hline \quad\quad\quad ac\quad\quad -bc \\ \quad\quad\quad ac\quad\quad -bc \\ \hline \quad\quad\quad\quad 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a-b\,)\,ab+af-b^2-bf\,(\,b+f \\ \quad ab\quad\quad -b^2 \\ \hline \quad\quad\quad af\quad\quad -bf \\ \quad\quad\quad af\quad\quad -bf \\ \hline \quad\quad\quad\quad 00 \end{array}$$

Adeoque communis illius Diviſoris ope reducentur expoſitæ quantitates a^2+ac-b^2-bc & $ab+af-b^2-bf$, ad terminos in eadem ratione minores $a+b+c$, & $b+f$. Adeoq; $\frac{a^2+ac-b^2-bc}{ab+af-b^2-bf}=\frac{a+b+c}{b+f}$.

In hujuſmodi itaque caſibus, atque hiſce ſimilibus, ſagacitate opus erit, & conſilium in arena capiendum, ut expoſitæ quantitates compoſitæ, ad ſimpliciſſimas in eadem ratione reducantur.

Sed de Additione & Subductione hactenus.

CAP. XLIII.

Fractionum Multiplicatio & Diviſio: per numerum Integrum; per numerum fractum. Multiplicationis, & Diviſionis inverſæ, æquipollentia. Producti, & Quotientis, in minimis terminis exhibitio. Operationum præcedentium (Additionis, Subductionis, Multiplicationis, & Diviſionis) brevis Synopſis.

Fractionis per numerum integrum Multiplicatio.

SEquitur Fractionum Multiplicatio & Diviſio.

Si *Numerus fractus per Integrum multiplicandus* ſit, nihil hic difficultatis ineſt: Quippe id *ſola Numeratoris multiplicatione* peragitur. Sic $\frac{2}{3}\times 2=\frac{4}{3}$. Nam bis duo ſunt quatuor, quæcunq; demum

demum ea sint quæ numerantur: sive integra sint, sive partes. Qua enim ratione, bis duo homines, sunt quatuor homines, bis duo corpora, quatuor corpora; bis duo integra, quatuor integra; bis duo millia, quatuor millia; &c. (nempe, quia bis duo simpliciter, sunt quatuor:) eâdem, & bis duæ partes, quatuor partes; bis duo quadrantes, quatuor quadrantes; bis duo quintantes, quatuor quintantes, (sive partes quintæ.) &c. Sic $\frac{2}{3} \times A$, vel $\frac{2}{1} A$, erit $\frac{2A}{3}$. Sic $D \times \frac{A}{B}$, vel, $\frac{A}{B} \times D$, vel $\frac{A}{B} D$, erit $\frac{AD}{B}$. Et sic in aliis.

Vel etiam, quoties id commode fieri potest, pro *Multiplicatione Numeratoris*, substitui poterit *Denominatoris Divisio*. Quippe idem omnino fit, quoad fractionis valorem, sive multiplicemus Numeratorem, sive Denominatorem dividamus: & contra. Si enim verbi gratia, duplandus sit numerus fractus $\frac{3}{4}$: perinde est sive duplicetur numerator, ut fiat $\frac{6}{4}$; sive denominator bisecetur, ut fiat $\frac{3}{2}$: eadem enim utrobiq; prodibit fractionis quantitas, $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, quoniam eadem est utrobique numeratoris ad denominatorem ratio, quippe 6.4::3.2. Sic alib; $\frac{4}{5} \times 3 = \frac{12}{6} = \frac{6}{3} = 2$. Et $\frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{3} = \frac{2}{1} = 2 \cdot \frac{3}{5} \times 5 = \frac{15}{15} = \frac{3}{3}$ &c. Et pariter in Symbolis. Est $\frac{A}{BC} \times B = \frac{BA}{BC} = \frac{A}{C}$.

Fractionis per numerum integrum Divisio.

Contra vero: Si *per numerum integrum dividendus sit numerus fractus: diviso numeratore per divisorem datum, dividitur fractio.* Puta si dividenda sit fractio $\frac{4}{5}$, per 2: prodibit quotiens $\frac{2}{5}$. quia nempe 2)4(2. Cum enim universaliter semissis numeri 4, sit 2; quæcunque sint quæ numerentur: qua ratione semissis quatuor integrorum, sunt duo integra; & semissis quatuor decadum, duæ decades; &c. Eâdem & semissis quatuor partium, sunt duæ partes; semissis quatuor quintantum, duo quintantes. &c.

Vel etiam, si ejusmodi divisio commode fieri non possit; (puta, cum divisor datus, non est Numeratoris aliquota pars, adeoque non illum præcise metiatur sine residuo:) pro *Divisione numeratoris*, substituatur, *Denominatoris multiplicatio*; tantundem siquidem valet, ut modo dictum est. Quò enim major est denominator, eo minores supponuntur integri partes; adeoque, manente

manente eodem numeratore, minuitur fractio. Et perinde est sive sumatur partium numerus, verbi gratia, duplo minor, hoc est, semissis; sive idem numerus partium duplo minorum, hoc est, dimidiatarum: utrobique enim assumitur designatæ quantitatis dimidium. Sic $2)\frac{4}{5}(\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$. Et $2)\frac{1}{2}(\frac{1}{10}$. Et in Symbolis similiter $A)\frac{AB}{C}(\frac{B}{C}=\frac{AB}{AC}$. Item $C)\frac{A}{B}(\frac{A}{BC}$. Et $A)\frac{A}{B}(\frac{A}{AB}=\frac{1}{B}$. Et potest quidem posterior hæc methodus (per denominatoris multiplicationem) sat commode ubivis adhiberi: prior autem illa (per numeratoris divisionem) haud ita commode nisi cum divisor est numeratoris aliquota pars.

Fractionis per fractionem, Multiplicatio & Divisio.

Cum vero *Fractio* proponitur, sive *Multiplicanda sive Dividenda*, non per numerum integrum, sed *per aliam fractionem*: operatio paulo magis intricata est, nec nisi duabus operationibus distinctis absolvitur. Nempe, *postquam per dati Multiplicatoris vel Divisoris Numeratorem, tanquam per numerum integrum* (ut modo ostensum est) *fuerit multiplicata vel divisa; quantitas inde prodiens, deinceps per dati multiplicatoris aut divisoris Denominatorem, contrariâ operatione afficienda est.* Quippe hæc posterior operatio quasi corrigit priorem, quæ numeratorem fractionis, tanquam si esset numerus integer, assumpserat.

Sic si multiplicetur $\frac{4}{5}$ in 2, prodibit $\frac{8}{5}$; at si in $\frac{2}{3}$ (nempe prioris multiplicatoris trientem) prodibit $3)\frac{8}{5}(\frac{8}{15}$, (nempe prioris producti triens,) adeoque $\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$. Ratio satis patet. Nam qui multiplicat per 2, petit duplum; at qui multiplicat per $\frac{2}{3}$, petit dupli trientem (sive trientis duplum,) adeoque quod ex duplicatione prodit, est trisecandum, ut habeatur dupli triens. Sic $\frac{A}{B}\times C=\frac{AC}{B}$, & $D)\frac{AC}{B}(\frac{AC}{BD}$; ergo $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$.

Eodem modo, si dividenda sit fractio $\frac{4}{5}$ per $\frac{2}{3}$: Divisi prius $\frac{4}{5}$ per divisoris Numeratorem 2; nempe $2)\frac{4}{5}(\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$: quæ provenit fractio $\frac{2}{5}$ vel $\frac{4}{10}$, multiplicanda erit in divisoris Denominatorem 3; puta $\frac{4}{10}\times 3=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=\frac{2}{5}\times 3$: adeoque

$\frac{2}{3})\frac{4}{5}(\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$. Ratio patet. Nam qui dividit per 2, petit quasi quoties in numero dividendo contineatur numerus 2: quod ubi ex quotiente resciverit, multiplicando porro per 3, cognoscet quoties cõtineatur $\frac{2}{3}$, nempe numeri 2 trien: quippe numerus trientum binarii, triplo major sit necesse est quam binariorum numerus, cum quilibet binarius contineat sui tres trientes. Sic in Symbolis, $D)\frac{A}{B}(\frac{A}{BD}$, & $\frac{A}{BD}\times C=\frac{AC}{BD}$, ergo $\frac{D}{C})\frac{A}{B}(\frac{AC}{BD}$.

Multiplicationis & Divisionis inversæ, æquipollentia.

Atque hinc statim constat, (quod apprime notandum est,) *Idem omnino fieri sive multiplicemus per* $\frac{C}{D}$, *sive dividamus per* $\frac{D}{C}$: quippe eadem utrobique prodibit quantitas. Item sive multiplicemus per $\frac{1}{2}$, sive dividamus per 2 vel $\frac{2}{1}$; quippe utrobique quæritur expositæ quantitatis semissis. Item, sive per $\frac{2}{3}$ multiplicemus, sive per $\frac{3}{2}$ dividamus. Et sic ubique; sit licet quantitas (sic dividenda aut multiplicanda) vel integrum quid, vel fractum.

$$\frac{D}{C})A(\frac{AC}{D}=A\times\frac{C}{D}.\quad \frac{D}{C})\frac{A}{B}(\frac{AC}{BD}=\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}.$$

$$\frac{D}{C})AD(\frac{ADC}{D}=AC=AD\times\frac{C}{D}.$$

$$\frac{D}{C})\frac{A}{C}(\frac{AC}{CD}=\frac{A}{D}=\frac{A}{C}\times\frac{C}{D}.$$

$2)\frac{4}{5}(\frac{4}{10}=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2})\frac{4}{5}(\frac{4}{5}\times\frac{2}{1}$:

$\frac{1}{2})4(\frac{4}{1}=4\times\frac{2}{1}$. vel $\frac{1}{2})\frac{4}{1}(\frac{4}{1}=\frac{4}{1}\times\frac{2}{1}$.

$\frac{1}{2})9(\frac{18}{2}=\frac{9}{1}=6=9\times\frac{2}{1}$. $\frac{2}{1})\frac{9}{1}(\frac{18}{3}=6=\frac{9}{1}\times\frac{2}{3}$.

Breviter; Multiplicationis & Divisionis (in Fractionis) doctrina, hujusmodi est (ut ex prædictis liquet:)

Numeratoris

Numeratoris { Multiplicatio, Multiplicat / Divisio, dividit } fractionem.

Denominatoris { Multiplicatio, dividit / Divisio, multiplicat } fractionem.

Quia verò numerus quilibet per quemlibet multiplicari potest commode, at non ita per quemlibet dividi (ut nempe nullum sit residuum:) utraque igitur operatio, tum Multiplicatio scilicet, tum Divisio Fractionis, per solam Multiplicationem a plerisque institui solet; illic quidem Numeratoris, hic Denominatoris. Adeoque

Multiplicando { Numeratorem, multiplicant / Denominatorem, dividunt } Fractionē.

Si itaq; ejusdem alicujus fractionis (vel etiam quantitatis integræ) tum Multiplicatio tum Divisio simul instituenda sit (quod quidem: ubi expositus multiplicator aut divisor est fractio, contingit,) utrumque faciendum est. Nempe qui multiplicat per $\frac{2}{3}$; ille revera multiplicat per 2, & dividit per 3: qui autem per $\frac{3}{2}$ dividit; ille dividit 2, & per 3 multiplicat. Et propterea, illic numerator (quantitatis expositæ) hic Denominator est per 2 multiplicandus: atque etiam Denominator illic, hic Numerator, multiplicandus per 3. (Eodem plane modo, atque in Additione & Subductione contingit: Puta qui addit $2 - 3$; ille revera addit 2, & 3 demit: & qui subducit $2 - 3$; ille revera 2 tollit, & addit 3.) Atque hæc quidem ad fractionum tum Multiplicationem tum Divisionem rite intelligendum, dictu sufficiant.

Producti & Quotientis exhibitio in minimis terminis.

Si autem id expetat aliquis, non modo verum ut habeat sive Productum Multiplicationis, sive Divisionis Quotientem; sed in minimis terminis: Potest quidem illud obtineri, vel Productum aut Quotientem jam inventum reducendo; (eo nempe modo quem in præcedente capite indicavimus; puta tum numeratorem, tum denominatorem maxima communi mensura dividendo

dividendo:) vel etiam, si id potius expetatur, præparatione facta antecedaneâ: nempe hoc modo. Reducantur primo, expositæ fractiones ad terminos suos minimos; Numeratores scilicet singulos, suosq; respective Denominatores communi mensura maxima dividendo. Deinde vero, in Multiplicatione, Numeratores singuli, cum Denominatoribus alternis, sic comparentur & reducantur; at, in Divisione, tum Numeratores invicem, tum etiam Denominatores invicem, sic comparentur & reducantur: Et præparatione sic facta, tum tandem fiat ea quæ præcipitur terminorum Multiplicatio; Nempe fractionis Multiplicandæ, Numerator in Numeratorem, & Denominator in Denominatorem Multiplicanti ducatur; fractionis autem Dividendæ, Numerator in dividentis Denominatorem, & Denominator in Numeratorem. (Quod sic breviter enunciat Oughtredus, *Multiplicatio comparat heterologos terminos, & multiplicat homologos: Divisio comparat homologos, & multiplicat heterologos.*) Sic si fractio $\frac{4}{8}$ in $\frac{12}{32}$ ducenda sit: Reducta prius $\frac{4}{8}$ ad $\frac{2}{3}$; comparo adhuc 2 numeratorem prioris, & 32 denominatorem posterioris, proque illis substituo 1 & 16: tum etiam pro 9 denominatore prioris, & 15 numeratore posterioris, substituo 3 & 5. Adeoque tandem prodibit $\frac{5}{48}$.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{9}{\cancel{18}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{16}{\cancel{32}}} = \frac{5}{48}. \qquad \text{Sic} \quad \frac{\overset{1}{a^2}}{\underset{b}{ab}} \times \frac{d}{a} = \frac{1}{b} \times \frac{d}{1} = \frac{d}{b}.$$

Similiter, si dividenda fractio $1\frac{4}{8} = \frac{12}{8}$, per $2\frac{2}{12} = \frac{26}{12}$: operatio sic procedet.

$$2\tfrac{2}{12} = \frac{\overset{16}{\cancel{32}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} \Big) \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{9}{\cancel{18}}} \Big(\frac{5}{48}. \qquad \text{Sic} \quad \frac{\overset{1}{a}}{d} \Big) \frac{\overset{1}{a^2}}{ab} \Big(\frac{d}{b}.$$

Totum

Totum itaque tum Additionis & Subductionis, tum Multiplicationis & Divisionis negotium, in numeris Fractis; duobus his capitibus absolvimus. Quod brevi hac Synopsi conspiciendum subjicimus. *Operationum in numeris fractis, Synopsis.*

$\frac{a}{b} \pm \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\beta \pm \alpha b}{b\beta}$ Additio & Subductio.

$\frac{a}{b} \times \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a\alpha}{b\beta}$ Multiplicatio.

$\frac{\alpha}{\beta}) \frac{a}{b} (\frac{a\beta}{\alpha b}$ Divisio.

CAP. XLIV.

De Fractionum Reductionibus variis. Impropriæ fractionis ad numerum integrum vel mistum reductio: & contra. Reductio ad minimos terminos: Ad communem Denominatorem: Ad Denominatorem datum: Ad communem datumve Numeratorem. De fractionum fractionibus reducendis. De fractionibus Sexagenariis & Decimalibus, tum ad invicem, tum ad fractiones ordinarias reducendis.

CUm eadem quoad valorem fractio, mille modis designari possit, uti superius traditum est: Expedit nonnunquam ex una in aliam formam fractiones transmutare; variasque illarum Reductiones instituere: quarum præcipuas hoc sumus capite tradituri.

Fractionem Impropriam, ad Numerum Integrum, vel saltem Mistum reduci posse; ex superioribus patet. Nempe, Numeratorem per Denominatorem dividendo. Sic $\frac{24}{6} = 4$, quia 6) 24 (4. Et $\frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$. quia 7) 24 ($3\frac{3}{7}$. Item $\frac{4a}{a} = 4$. quia a) $4a$ (4. Et $\frac{4a}{2a} = 2$. quia $2a$) $4a$ (2. Sic *Fractionis impropriæ ad numerum integrum vel mistum Reductio: & contra.*

$\frac{AB}{A} = B$. $\frac{2a+b}{a} = 2+\frac{b}{a}$. &c. Cum enim (ut superius dictum est) Fractio, (sive propria sive impropria,) non sit nisi Divisionis imperfectæ indicium: Divisio illa, actu præstita, id ipsum efficit, quod Fractio indicabat faciendum.

Et Contra, Numerus quilibet vel Integer vel Mistus, ad Fractionem impropriam reducitur. Nempe multiplicando numerum integrum, in datum denominatorem. Sic $3 = \frac{12}{4}$. $2 = \frac{6}{3}$. &c. (quia nempe $3 \times 4 = 12$. & $2 \times 3 = 6$.) Cum enim in singulis integris, continuantur *quatuor* quadrantes; in tribus integris continebuntur quadrantes *ter quatuor*, hoc est duodecim: sic de cæteris. Item $1\frac{1}{2} = \frac{2}{2}+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. $6\frac{1}{3} = \frac{18}{3}+\frac{1}{3} = \frac{19}{3}$. &c. eadem plane de causa. Et in Symbolis pariter $A = \frac{AB}{B}$. Et $3a+\frac{b}{c} = \frac{3ac+b}{c}$. Et $a+\frac{a^2}{c} = \frac{ac+a^2}{c}$ &c. Atque hæc quidem numeri integri mistive in fractionis formam reductio non raro usui est, præsertim in addendis, subducendis comparandis, hisce numeris fractionibus immistis: Sicut, e contra, fractionis impropriæ ad numerum integrum mistumve reductio, ad earundem æstimationem facilius & clarius mente assequendam maximè conducit.

Fractionis reductio ad minimos terminos.

Fractionis ad minimos terminos reductio, ex dictis Cap. XLII. satis innotescit. Diviso nempe utroque termino per maximam communem mensuram (quæ ex ibidem traditis inveniatur,) prodeunt termini in eadem ratione minimi, sive inter se primi: adeoque minimi qui eundem fractionis valorem exhibere poterunt. Sic $\frac{1}{15} = \frac{1}{60}$, diviso scil. tum numeratore tum denominatore per 3. Et $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$, & $\frac{45}{63} = \frac{5}{7}$, (divisis nempe tum numeratore, tum denominatore, illic per 5, hic per 7.) Sic $\frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 1\frac{1}{5}$ &c. Item $\frac{AB}{BC} = \frac{A}{C}$. $\frac{AB}{B} = \frac{A}{1} = A$. (dividendo utrinque per B.) Sic $\frac{AC+BC}{DC} = \frac{A+B}{D}$ (divisione facta per C.) Et $\frac{ab+bb-ac-cb}{b-c} = a+b$

$a+b$. Item $\frac{ab+b^2-ac-bc}{b^2-c^2} = \frac{a+b}{b+c}$. (facta utrobiq; divisione per $b-c$.) Et similiter in aliis. Estque hæc fractionũ ad minimos terminos reductio, ad faciliorẽ valoris æstimationẽ apprime utilis. Ecquis enim non facilius intelligit & mente concipit fractionem sive rationem $\frac{1}{2}$, vel 1 ad 2; quam $\frac{783}{1566}$, vel 783 ad 1566? Adeoque tum fractiones tum Rationes commodius exprimuntur (cæteris paribus) in minoribus quam in majoribus terminis; & propterea, (nisi quid speciatim aliquando altioris momenti impediat,) ad terminos minimos reducendæ.

Fractionum reductio ad communem Denominatorem.

Fractionum duarum pluriumve ad communem denominatorem reductio, (quæ quam ad Additionem & Subductionem necessaria sit, jam supra dictum est,) ostenditur Cap. XLII. Nempe denominatoribus omnibus continue ductis, habetur communis Denominator; cui conveniant Numeratores, ex numeratorum expositorum singulis, in reliquorum omnium denominatores continue ductis, emergentes. Puta, $\frac{a}{\alpha} \cdot \frac{b}{\beta} \cdot \frac{c}{\gamma}$. sic reductæ, fiunt $\frac{a\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} \cdot \frac{b\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma} \cdot \frac{c\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}$. Item $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}$, reducuntur ad $\frac{20}{40}, \frac{20}{40}, \frac{16}{40}$. Si autem non modo ad communem saltem aliquem, sed ad minimum communem denominatorem, reducendæ sint expositæ quotlibet fractiones: Habetur communis ille denominator, si datorum denominatorum illi omnes qui communem aliquam mensuram patiuntur, per illam dividantur, &, pro ipsis denominatoribus, quotientes ex ea divisione emergentes assumantur; ut ex horum quotientum, reliquorumque siqui sunt denominatorum, ipsiusque communis divisoris maximi (aut etiam maximorum omnium, si plures fiant comparationes,) continua multiplicatione habeatur communis denominator minimus: (ad quem quærendi Numeratores congrui, modo mox ostendendo.) Sic in modò expositis, $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}$; quia 2 & 4 communem patiuntur divisorem 2; uterque per 2 dividatur 2)2(1, 2)4(2; & quotientes ea divisione emergentes, 1, 2, cum tertio denominatore 5, ipsoque communi divisore 2, continue multiplicati, exhibent minimum communem denominatorem $1 \times 2 \times 5 \times 2 = 20$.

Cui

Cui denominatores congrui (modo mox ostendendo) assumpti 10, 15, 8, exhibent expositis $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$, æquales cognomines $\frac{10}{20}, \frac{15}{20}, \frac{8}{20}$, & quidem minimum communem denominatorem habentes. Sic $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$; divisis tum 2 & 10 per communem mensuram 2, prodibunt quotientes 1, 5; tum iterum 5 (quotientum jam inventorum altero, qui propterea etiam eliminandus erit, cujusque loco novus per sequentem divisionem substituendus) & 5 (denominatore tertio) per communem divisorem 5, unde prodibunt quotientes 1, 1, & (ex prioribus duobus) resumendus 1, qui in duos communes divisores 2, 5, continue ducti, dant $1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 5 = 10$ communem denominatorem minimum; quibus respondent denominatores congrui 5, 3, 8; adeoque fractionibus expositis $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}$, æquales sunt, cognomines $\frac{5}{10}, \frac{6}{10}, \frac{8}{10}$. Sic $\frac{a}{\alpha\beta}, \frac{b}{\beta\gamma}, \frac{c}{\gamma\delta}$, reducuntur ad cognomines minimos $\frac{a\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}, \frac{b\alpha\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}, \frac{c\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma\delta}$.

Invento autem communi denominatore minimo, Numeratores congrui inveniantur, hoc est, fractiones expositæ ad datum Denominatorem reducuntur, hoc modo:

Fractionis ad Denominatorem datum reductio.

Ad datum denominatorem reducitur data fractio, si novus assumatur Numerator, qui, ad datum Denominatorem, eam habeat rationem, quam habet fractionis datæ numerator ad denominatorem suum. (Ratio manifesta est; quoniam dum servatur eadem Numeratoris ad Denominatorem ratio, eadem manet fractionis quantitas.) Sic si fractionem $\frac{1}{2}$, reducere velim ad æqualem aliam, quæ denominatorem habeat 10; quærendus est Numerator, qui sit ad 10, ut est 1 ad 2. Sive, ad quem, eam habeat rationem 10, quam 2 ad 1. Quod per auream regulam peragitur: Puta $2.1::10.q = \frac{10}{2} = 5$. Adeoque $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Pariter si ad eundem denominatorem 10, reducere velim fractionem $\frac{4}{5}$, sumendus est Numerator 8: (quia $5.4::10.8$.) Adeoque $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Et propterea (quod modo dictum erat) fractiones $\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}$, ad communem denominatorem 10 reductæ, erunt $\frac{5}{10}, \frac{3}{10}, \frac{8}{10}$. Eodem modo, fractiones $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, ad communem denominatorem 20 reductæ, erunt $\frac{10}{20}, \frac{15}{20}, \frac{16}{20}$: (Nam $2.1::20.10$. Item $4.3::20.15$.

Item

Item 5 . 2 :: 20 . 4.) Sic fractio $\frac{a}{b}$, ad denominatorem be reducta, erit $\frac{ac}{bc}$. (Quia $b . a :: bc . \frac{abc}{b} = ac.$) & fractio $\frac{ac}{bc}$, ad denominatorem b reducta, erit $\frac{a}{b}$. (quia $bc . ac :: b . \frac{acb}{bc} = a.$) Et sic ubique.

Atque hujus reductionis magna est utilitas, (ut alibi, sic) in partibus expositis alicujus integri, ad partes nobis notiores, vel usitatiores, reducendis. Exempli gratia; si exponatur $\frac{2}{3}$ *Solidi* Anglicani; & scire velim, quot ea fractio valeat nummos *Denarios* dictos, sive partes duodecimas. Reducenda quippe erit exposita fractio $\frac{2}{3}$, ad æqualem aliam quæ denominatorem habeat 12. Adeoque (quia 3 . 2 :: 12 . 8.) invenio $\frac{8}{12}$, bessem, sive duos trientes, tantundem valere atque $\frac{8}{12}$, octo duodecimas, hoc est, octo denarios.

Verum hic intelligendum est; non posse ita semper ad datum denominatorem reduci fractio data, quòd pro quæsito Denominatore emerget nonnunquam vel fractio vel numerus mistus; adeoque non possit fractione simplici, quæ datum habeat denominatorem, data fractio designari, sed fractione composita opus erit. Puta si fractionem $\frac{2}{3}$, ad partes duodecimas reducere velim, (hoc est, ad fractionem æqualem, cujus denominator sit 12.) quoniam est 5 . 2 :: 12 . $\frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$, quæsita fractio esset $\frac{4\frac{4}{5}}{12}$. Hoc est, 4 duodecimæ, atque insuper $\frac{4}{5}$ unius duodecimæ. Adeoque, verbi gratia, $\frac{2}{3}$ solidi Anglicani, valebit denarios Anglicanos $4\frac{4}{5}$; hoc est quatuor denarios, atq; insuper $\frac{4}{5}$ unius denarii. Sic, fractio $\frac{a}{b}$, ad aliam reducenda quæ denominatorem habeat c, erit $\frac{b)ac}{c}$.

Fractionum reductio ad datum Numeratorem, vel Numeratorem communem.

Quæ autem jam tradita sunt de Fractionis ad datum Denominatorem reductione; vel etiam plurium fractionum reductione ad Denominatorem communem: Eadem non difficulter de reductionibus ad Numeratorem datum, atque ad numeratorem communem

rem communem, exponi possunt. Vix enim aliud ad hoc factu opus est, quam ut pro *Denominatoris* voce substituatur *Numeratoris*, & contra. Sic fractiones $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, æquipollent hisce $\frac{2}{6}, \frac{2}{4}$. Item fractionibus $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, æquipollent $\frac{6}{12}, \frac{6}{24}, \frac{6}{30}$. Et fractionibus $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}$, æquipollent $\frac{\beta\gamma a}{\alpha\beta\gamma}, \frac{\alpha\gamma b}{\alpha\beta\gamma}, \frac{\alpha\beta c}{\alpha\beta\gamma}$.

Sic fractio $\frac{a}{b}$, ad aliam reducenda quæ numeratorem habeat, c, erit $\frac{c}{a \cdot b \cdot c} = \frac{a}{b}$. Et sic alibi.

De fractionum fractionibus reducendis.

De Fractionum fractionibus, sive minutiarum minutiis, reducendis; nonnihil etiam dicendum est. Quippe nonnunquam fractionem aliquam ulterius frangi contingit; cujus, tanquam Integri, partes, Minutiæ minutiarum, sive fractionum fractiones dici solent. Puta trientis semis, vel bessis dodrans, &c; quos sic notare solent, $\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$. &c. vel sic, $\frac{1}{2}$ ex $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ ex $\frac{1}{2}$. &c. Malle m ego sic $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$. &c. (quippe nihil aliud est hujusmodi fractionis fractio, quam fractio ex duabus invicem multiplicatis composita.) Uti enim $\frac{1}{2}$ A vel $\frac{1}{2} \times$ A, est semissis quantitatis A; & $\frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{2} \times 1$, semissis unius integri; $\frac{1}{2} \times 2$, semissis duorum; $\frac{1}{2} \times 3$, semissis trium: ita $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, est semissis trientis; $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$, dodrans bessis, sive tres quartæ duarum tertiarum: &c.

Atque hinc statim patet methodus, ejusmodi fractiones compositas ad simplices reducendi. Nempe multiplicatione sola id peragitur. Puta ductis invicem $\frac{1}{4}$ & $\frac{2}{3}$, erit (per tradita in superiore capite) $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Sic $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. &c. Similiter si pluries adhuc componatur; puta semis dodrantis duarum tertiarum, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$. Et sic alibi.

Eodem plane modo reducenda est, hujusmodi fractio $\frac{4\frac{4}{5}}{12}$, hoc est $4\frac{4}{5} \times \frac{1}{12}$, sive $\frac{24}{5} \times \frac{1}{12} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$. aliæque similes ubi Numerator fractionem adjunctam habet. Quod etiam sic tradi possit: Ducti- tum numeratore $4\frac{4}{5}$, tum Denominatore 12, in communem multiplicatorem 5, prodibit (immutata quantitate) $\frac{24}{60}$, vel $\frac{2}{5}$.

Nec dissimilis erit reductio fractionis hujusmodi (cujus Deneminatori

nominatori adjungitur fractio) $\frac{3}{12\frac{1}{2}} = \frac{6}{25}$: Ductis nempe tum Numeratore tum Denominatore, in communem multiplicatorem 2, non immutatur quantitas.

Sic $\frac{4\frac{1}{2}}{12\frac{1}{2}} = \frac{9}{25}$; ductis nempe tum numeratore tum denominatore, in $10 = 5 \times 2$.

Eademque plane methodo utendum erit, in fractionibus (si id obtingat) etiam adhuc ulterius fractis, sive quoad Numeratorem, sive Denominatorem, sive etiam utrumque. Ut non sit opus hisce diutius immorari.

De Fractionibus Sexagenariis & Decimalibus.

Supereſt ut de Fractionibus Sexagenariis, & Decimalibus verba facimus; earumque tum ad invicem, tum ad fractiones ordinarias reductione; atque harum ad illas. Ex omnibus enim fractionum Reductionibus, hæ duæ præ reliquis celebres sunt; nempe reductio ad partes Sexagenarias, & ad partes Decimales: & vice versa. Illa veteribus admodum familiaris erat & frequens; hæc maxime Recentioribus.

In fractionibus Sexagenariis, supponitur integrum quodvis in partes 60 dividi, quas vocant λεπτὰ minuta prima, scrupulos primos; Et eorum quodlibet in 60 minuta secunda; & quodvis horum in totidem minuta tertia; & sic deinceps, in continua ratione subsexagecupla. Sic, verbi gratia; *Hora* dividitur in 60 minuta prima, & quodlibet minutum primum in 60 secunda; & quodlibet secundum in totidem tertia, &c. Item circuli, sive quadrantis, aut etiam Signi Gradus quilibet eadem ratione dividitur in Minuta prima, secunda, tertia, &c.

In Recentiorum partibus Decimalibus, supponitur Integrum quodvis dividi in 10 partes decimas; & decima quælibet, in 10 Centesimas; quælibet centesima in 10 Millesimas; & sic deinceps, in continua ratione subdecupla infra Unitatis locum descendendo, sicut supra Unitatis locum continua ratione decupla ascenditur, ad decades, centurias, millia, &c. Quæ quidem ratio dividendi integrum, multo accommodatior est, quam veterum Sexagenaria; quia fractiones decimales eodem plane modo tractantur, quo numeri integri, (ut suo loco dictum est,) nullamque calculi difficultatem involvunt; cum Sexagenaria illa

illa progressio perplexa nimium fit, variasq; reductiones postu- De utrisque autem seorsim dicetur.

Reductio fractionis ordinariæ ad partes decimales. Et contra.

Reducitur fractio quælibet ordinaria ad partes decimales, si numeratorem (additis post lineam separatricem quot opus est ciphris, quæ gradus infra Unitatem descendentes designent,) per denominatorem dividamus. (quippe hoc pacto divisio, quam indicat fractionis notatio, actu peragitur: Quomodo autem ea instituenda est per locos descendentes divisio, jam supra suo loco ostensum est, ubi de integrorum divisione verba fecimus.) Sic $\frac{4}{5} = 0\,\underline{8}$. $\frac{3}{8} = 0\,\underline{375}$. &c. ut divisione patebit.

5) 4, ø o (0, 8.
8

8) 3, ø ø ø o (0, 375:
8 8 8

Si autem (quod non raro contingit) ejusmodi occurrat fractio, quæ vel non omnino, vel non nisi longiori operatione, accurate possit in partibus decimalibus exprimi: possumus operationem quousque libet instituere, donec quod superfit tam sit exiguum ut tuto negligi possit. Sic $\frac{1}{3} = 0\,\underline{3333}$ &c. $\frac{2}{3} = 0\,\underline{6666}$ &c. $\frac{1}{6} = 0\,\underline{1666}$ &c. $\frac{5}{6} = 0\,\underline{8333}$ &c. $\frac{10}{11} = 0\,\underline{909090}$ &c. $\frac{1}{11} = 0\,\underline{454545}$ &c. $\frac{3}{7} = 0\,\underline{428571428}$ &c. (In quibus omnibus, aliisque similibus observare licet eorundem numerorum recursum, quousque libet continuandum,) item $\frac{3}{32} = 0\,09375$. $\frac{23}{64} = 0\,\underline{359375}$. (In quibus, aliisque similibus, exhauritur quidem, sed sero, exposita fractio partibus decimalibus.) ut dividendo patebit.

1 1 1
1, ø ø ø o (0, 333 &c.
3, 3 3 3

4 4 4
1, ø ø ø o (0, 166 &c.
6, 6 6 6

5 5 6 5
5, ø ø ø ø o o (0, 4545 &c.
11, 11 11 11
1 1 1 1

2 1
1 2 4 6
3, ø ø ø ø ø (0, 09375
32 32222
3 3 3 3 3

In

In his, inquam, aliisque ejusmodi casibus, ubi partes decimales vel in longum nimis, vel in infinitum excurrunt; sufficit vero proximum pro vero accipere; adeoq; operatione quousq; libet continuata, quod supereſt negligere. Puta, pro $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{3}{22}$, &c. sumatur $0\overline{|3333}$. $0\overline{|8333}$. $0\overline{|90909}$. $0\overline{|0937}$. Vel etiam $0\overline{|333}$. $0\overline{|833}$. $0\overline{|909}$. $0\overline{|094}$. Vel forte $0\overline{|33}$. $0\overline{|83}$. $0\overline{|91}$. $0\overline{|09}$. prout major minorve accuratio requiratur.

Fractiones autem Decimales, ubi opus est, eodem plane modo ad alias reducuntur, quo reliquæ fractiones ab una ad aliam denominationem. Puta $0\overline{|5}$, hoc est $\frac{5}{10}$, ad $\frac{1}{2}$, dividendo tum Numeratorem tum Denominatorem, per maximum communem divisorem 5. Sic $0\overline{|09375} = \frac{9375}{100000} = \frac{3}{32}$, nempe dividendo per maximam communem mensuram 3125. Et sic in reliquis. Si autem ea reperiatur mensura quæ non quidem accurate, at saltem quã proxime utrumq; terminũ mensuret; poterit illius ope assumi fractio ordinaria, quæ, licet non accuratè, quam proximè tamen æquabitur expositæ Decimali: adeoque pro hac assumi possit; præsertim si supponatur fractio illa decimalis (quod non raro fit, præsertim in tabulis Astronomicis, Trigonometricis, &c.) non præcise Geometricam veritatem, sed vero proximum, designare. Sic, pro $0\overline{|33333}$, hoc est $\frac{33333}{100000}$ assumi poterit tanquam æqualis $\frac{1}{3}$, cum tamen hæc aliquanto major sit, (quippe æqualis huic $\frac{33333}{99999}$,) sed tantillo ut ea differentia tutò negligi possit, ubi geometrica *ἀκρίβεια* non exigitur.

Reductio fractionis ordinariæ, ad partes sexagesimales.

Si Fractio ordinaria quævis; ad partes Sexagesimales reducenda sit: Ducto Numeratore in 60, per Denominatorem fiat Divisio; & Quotiens indicabit Minuta. Residuum autem divisionis, si quod sit, in 60 ductum, & per Denominatorem (fractionis datæ) divisum, exhibebit in Quotiente Minuta secunda: Et sic deinceps minuta tertia, quarta, &c. prodibunt, si divisionum residua semper in 60 ducantur, & producta per communem fractionis datæ Denominatorem dividantur. Quod eousq; faciendum erit, donec vel nullum superſit residuum, vel quod (ob operationem jam satis continuatam) negligi possit. Quod enim de Decimalibus modo dictum est, idem & in Sexagenariis fractionibus sæpissime fit; nempe nunc in infinitũ, nunc saltem in nimis longum procedendum esse priusquam tota fra-

ctio expoſita plane exhauriatur: quo caſu, pro accurate vero, ſaltem vero proximum aſſumendum erit.

Sic $\frac{1}{24}$ = Min: 12'. 30". præciſe. Ut calculo patet. Hoc modo.

$$24\overline{)300}\,(12'\,\tfrac{12}{24}. \qquad 24\overline{)720}\,(30".$$

Vel etiam.

$$24\overline{)300}\,(12'\,\tfrac{12}{24} = 12\tfrac{1}{2}. \qquad 2\overline{)60}\,(30".$$

Sic $\frac{7}{11}$ = Min: 38'. 10". 54'". 32". &c. = Min: 38'. 11". fere. Nam

$$11\overline{)420}\,(38'\,\tfrac{2}{11}. \qquad 11\overline{)120}\,(10"\,\tfrac{10}{11}.$$

$$11\overline{)600}\,(54"\,\tfrac{6}{11}. \qquad 11\overline{)360}\,(32'"\,\tfrac{2}{11}.$$

Partes autem Sexageſimales ad fractiones ordinarias, reducuntur: ſi reductis omnibus ad ſcrupulorum ultimam denominationem, eorumque numero pro numeratore ſumpto, congruus ſcribatur Denominator; nempe numerus ille qui oſtendit quot iſtius ordinis ſcrupuli in uno integro continentur. Sic 12'. 30". reducuntur ad fractionem ordinariam $\frac{1}{24}$. Hoc modo

$$12' \times 60 = 720" \qquad 1 \times 60 \times 60 = 3600"$$
$$30" \qquad\qquad 60$$
$$750" \qquad\qquad 3600"$$

$$\frac{750}{3600} = \frac{75}{360} = \frac{15}{72} = \frac{1}{24}.$$

Cum enim ſingula minuta prima contineant 60 ſecunda, 12 prima

prima continebunt 720 secunda, quibus additis aliis secundis 30, erit secundorum numerus 750. At vero in uno Integro continentur Minuta prima 60, adeoque minuta secunda 3600: Sunt ergo illa ad unum integrum, ut 750 ad 3600, hoc est (reductione facta ad minimos terminos) ut 5 ad 24. Adeoque $12'.30'' = {}^{720}/_{3600} = {}^{5}/_{24}$.

Decimalium usus, quàm Sexagesimalium, quanto expeditior.

Est autem usus partium decimalium incredibili fere differentia magis compendiosus, quam partium sexagesimalium. Quod vel unico hoc exemplo satis indicabitur.

Posito quod Solis cursus annuus, per integrum Zodiaci circulum, absolvatur diebus 365, horis 5, minutis 49′, 16″, 46‴: quæritur quantus sit illius motus diurnus medius. Hoc est, juxta leges Regulæ aureæ; Ut tempus annuum, $365^{d}, 5^{h}, 49', 16'', 46'''$; ad tempus diurnum, 24^{h}: sic motus annuus medius, graduum 60; ad motum diurnum, graduum quot?

Quoniam autem hic terminus primus, qui futurus est divisor, ex pluribus denominatoribus constat; quo melius instituatur divisio, reducendus est ille primò ad unam denominationem. In quem finem, numerus dierum 365, per 24 (numerum horarum in singulis diebus) multiplicandus, atque adjiciendæ insuper horæ 5 (in quæstione adjunctæ) ut habeatur numerus horarum in tempore exposito, nempe 8765; Hæ horæ in minuta prima reductæ (multiplicando per 60) adjunctis insuper 49′ expositis; exhibent minuta prima, 525949: His autem minutis primis, in secunda redactis, (multiplicando per 60,) & adjunctis insuper 16″ expositis habentur minuta secunda 31556956: His denique in tertia pariter redactis, & adjunctis item 46‴, habentur minuta tertia 1893417406: quæ expositum tempus æquant.

Reducto autem tempore annuo in 24 horaria minuta tertia; in eadem etiam reducendum erit tempus diurnum; nempe primum in 24, & deinde in 60 ter, continue multiplicando, adeoque dies unus reperietur minutis tertiis 5184000 æqualis.

Atque hac preparatione facta; constituatur quæstio ad hanc formam. Si in anno integro, hoc est in minutis tertiis horariis: 1893417406; absolvatur integer circulus, hoc est gradus 360: in uno die, hoc est, minutis tertiis horariis 5184000, absolventur quot gradus? Et, operationibus Aureæ regulæ rite peractis, reperietur, ne unum quidem gradum integrum uno

uno die absolvi; sed $\frac{1866240000}{1893417406}$ unius gradus. Ut ex adjuncto totius processus typo patet.

$365^d, 5^h, 49', 16'', 46'''.$ $1^d :: 360^{gr.}$ quot?

$\times 24$ $\times 24$

1460 24^h

730 $\times 60$

$+5$ $1440'$

8765^h $\times 60$

$\times 60$ $86400''$

525900 $\times 60$

$+49$ $5184000''$

$525949'$

$\times 60$

31556940

$+16$

$31556956''$

$\times 60$

1893417360

$+46$

$1893417406'''.$ $5184000''' :: 360^{gr.}$ quot?

360

31104

$$1893417406 \Big) \frac{15552}{1866240000} \Big(0' \frac{1866240000}{1893417406}!$$

Denique, ut inventus motus diurnus medius, ordinaria fractione designatus, nempe grad: $0 \frac{1866240000}{1893417406}$, partibus sexagesimalibus exhibeatur; reducenda est fractio modo superius ostenso, multiplicando Numeratorem per 60, & productum per datum denominatorem dividendo: atque hoc continue quousque opus erit. Sive etiam (quod eodem recidet) repetitis Aureæ regulæ operationibus; Nempe, ut Denominator fractionis datæ, ad suum Numeratorem, sic 60 Denominator fractionis quæsitæ, ad Numeratorem quæsitum; hoc est ad numerum partium sexagesimaliũ loci proximè inferioris. Adeoq; tandem multiplici calculo comperietur, motum solis diurnum medium

medium, esse, grad: $0\frac{1866240000}{1893417406}$ = grad: 0, 59′, 8″, 19‴, 37⁗, proxime.

$$1893417406 \,.\, 1866240000 :: 60.\ 59'\ \frac{262773046}{1893417406}$$
$$1893417406 \,.\, 262773046 :: 60.\ 8''\ \frac{619043512}{1893417406}$$
$$1893417406 \,.\, 619043512 :: 60.\ 19'''\ \frac{1167680006}{1893417406}$$
$$1893417406 \,.\, 1167680006 :: 60.\ 37''''\ \frac{4356338}{1893417406}$$

Totum autem hoc negotium, per partes decimales, levissimo statim labore peragitur. Posito nẽpe quod Solis cursus Annuus, per integrum Zodiaci circulum absolvatur, diebus 365 $\underline{242555}$; motus diurnus, unica divisionis operatione peracta, reperietur, grad. 0 $\underline{9856463735}$ proxime. Quod calculus indicabit.

$$365\ \underline{242555}.\ 360 :: 1.\ 0\ \underline{9856463735}.$$

$$365\ \underline{242555}\ )\ \overset{1}{\overline{360}}\ \underline{000000}\ (\ 0\ \underline{9856463735}.$$

Hanc autem quæstionis tum propositionem tum resolutionem in partibus Decimalibus, tantundem plane valere, atque operosam illam in partibus Sexagesimalibus; statim apparebit, ubi ostendero methodum has ad illas, & vice versa, reducendi.

Reductio partium Sexagesimalium ad Decimales, & contra.

Reducuntur autem partes Sexagesimales, (& quidem eadem methodo, mutatis mutandis, aliæ item quantitates pluribus denominationibus designatæ,) ad partes Decimales hac methodo. Quoniam, verbi gratia, quodvis Minutum Tertium, sit $\frac{1}{60}$ unius secundi, & quodvis secundum, $\frac{1}{60}$ unius primi, & quodvis minutum primum $\frac{1}{60}$ unius horæ; & hora quævis $\frac{1}{24}$ unius diei: Erunt, (in exposita quantitate annua, dierum 365, hor: 5, Min: 49′, 16″, 46‴.) minuta tertia 46‴, æqualia $\frac{46}{60}$ unius secundi; hoc est (dividendo 46 per 60) secund: 0 7666 &c. adeoq; 16″, 46‴, = 16 7666″. Cumque hæc Secunda, sint totidem Sexagesimæ unius Primi; dividendo 16 $\underline{76666''}$ per 60; reperietur 16 $\underline{7666''}$ = 0 $\underline{2794'}$ & propterea 46′, 16″, 46‴, = 49′, 16 $\underline{7666''}$ = 49 $\underline{2794'}$. Et similiter, cum minuta prima sint totidem sexagesimæ unius horæ; dividendo iterum per 60; erunt Min. prima

49 (2794 = 0 (8213 horæ: adeoque $5^h, 49', 16'', 46''', = 5 (8213$ horæ. Et, quia hora eſt $\frac{1}{24}$ diei; dividendo per 24 reperientur horæ 5 (8213 = d: 0 (2425; adeoque $365^d, 5^h, 49', 16'', 46''', =$ diebus 365 (2425 proxime. Operationis proceſſum hic ſubjecimus.

	$365^d, 5^h, 49', 16'', 46'''$.
60) 46,00000 (0,76666 &c.	16 (76666 ſecund.
60) 16,76666 (0,279444 &c.	49 (2794444 prim.
60) 49,27944 (0,821324074 &c.	5 (821324074 horæ.
24) 5,82132407 (0,242555 16975. &c.	365 (242555 16975 dies.

Contra vero; Partes Decimales, ad Sexageſimales (aliaſve hiſce ſimileſq;) methodo contraria reducuntur. Nempe reſiduas ubique fractiones decimales multiplicando per 60, (aut per alium, quicunque fuerit, quæſitæ fractionis denominatorem.) Sic, verbi gratia, Motus Solis diurnus, grad: 0 (9856462735, reducitur ad partes ſexageſimales $59', 8'', 19''', 37''''$. quam proxime. Ut ex adjuncta operatione patet.

0	9856463735	
59′	13878241	× 60
8″	3269446	
19‴	616676	
37⁗	00056	

Atque hoc pacto partes Sexageſimales, aliæque pluribus denominationibus conſtantes, ad Decimales reduci poſſunt; & rurſus (ubi opus fuerit) hæ ad illas. Et quidem de Fractionum Reductionibus hactenus.

CAP. XLV.

De Fractionum, & Rationum, Rationibus. Totius operis Epilogus.

ATque hactenus quidem cum Fractionum, ſive etiam Rationum, (quippe perinde eſt utrâ ſub notione conſiderentur

tur,) Additionem, Subductionem, Multiplicationem, & Divisionem, variasque etiam Reductiones, quantum opus videtur, tradidimus: Non erit opus, ut quæ de Aurea Regula (ut loquuntur) aliave de Rationum aut Proportionum doctrina superius tradita sunt universaliter, jam iterum de Fractionibus speciatim repetantur. Quippe nihil hic novi occurrit de Fractionum, sive etiam Rationum, (sunt enim & illæ quantitates) rationibus dicendum; præter ea quæ universaliter de Quantitatum simpliciter (cujuscunque sint generis) Rationibus jam sunt tradita. Et quidem ut numeri integri (puta 2, 3, &c.) sunt Rationum Multiplicium (duplæ, triplæ, &c.) denominatores; sic fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, &c. sunt denominatores rationum submultiplicium (subduplæ, subtriplæ, &c.) reliquæque fractiones, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, &c. reliquarum item rationum denominatores. Et quidem, sicut dupli ad triplum, puta 2 A ad 3 A, eadem est ratio quæ denominatorum suorum 2, ad 3. Sic, sesquialteri ad sesquitertium, $\frac{1}{8}$ A ad $\frac{4}{3}$ A, eadem est ratio quæ denominatorum suorum $\frac{1}{2}$ ad $\frac{4}{3}$. Item subduplum ad subtriplum; subsesquialterum ad subsesquitertium, &c. eadem omnino ratio atque suorum respective denominatorum.

De Rationum Rationumve Rationibus.

Dupl. Tripl :: 2 A . 3 A :: 2 . 3.

Subdupl. Subtripl :: $\frac{1}{2}$ A . $\frac{1}{3}$ A :: $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ :: 3 . 2.

Sesquialt. Sesquitert :: $\frac{3}{2}$ A . $\frac{4}{3}$ A :: $\frac{3}{2}$. $\frac{4}{3}$ :: 9 . 8.

Subsesquialt. subsesquiter: : $\frac{2}{3}$ A . $\frac{3}{4}$ A :: $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$ :: 8 . 9.

Item; Dupl. Tripl :: Quadrupl. Sextupl.

Hoc est; 2 . 3 :: 4 . 6

Et, Subdupla Subtripl :: Subquadri. Subsext.

Hoc est, $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ :: $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{6}$ :: 3 . 2.

Atque hæc quidem, cum apertissima sint; mirum mihi plane videtur Recentiorum aliquos, doctrinam de Rationum Rationibus, quasi jam plane novam venditare, atque a se jam primum in Matheſin introductam; cum tamen Aureæ Regulæ (ut vocant) praxis in numeris fractis, nil aliud plane sit quam illa de Rationum rationibus doctrina, eaque omnibus notissima; sal-

tem ſi ſpecierum ſive Symbolorum uſus etiam adhibeatur; quæ non minus quantitates irrationales quam rationales reſpiciunt. Quique eaſdem plane leges de rationibus addendis, componendis, dividendis, alternandis, &c. in numeris fractis valere docent, atque in numeris integris; eâdem opera docent etiam Rationum rationes eaſdem ſubire leges, atque rationes Abſolutarum quantitatum.

Totius operis Epilogus. Supereſt adhuc ad perfectam Arithmetici negotii traditionem, *Analytices* doctrina. Quam quidem ſtatueram præſenti operi adjunxiſſe. Verum cum videam jam ultra quam ſperaveram molem creviſſe; nec interim poſſe totum illud negotium ita in compendium redigi, ut huic commode ſubjungi poſſit: Placuit potius rem illam totam hic intactam præterire; adeoque & Poteſtatum Analyſin, ſive (ut loquuntur) Radicum extractionem, quæque huic conjuncta eſt de Radicibus ſurdis doctrinam. Quæ omnia aliquando forſan, modo Deus ita voluerit, peculiari ſeorſim volumine abſolvenda ſpero. Adeoque pedem hic figo.

FINIS.